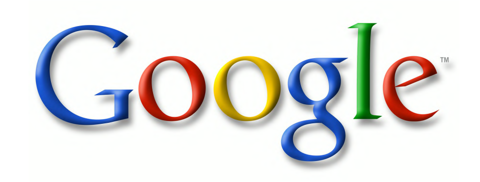
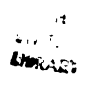










ŒUVRES

COMPLÈTES

DE NIELS HENRIK ABEL

NOUVELLE ÉDITION

PUBLIÉE AUX FRAIS DE L'ÉTAT NORVÉGIEN

PAR MM. L. SYLOW ET S. LIE

TOME PREMIER

CONTENANT LES MÉMOIRES PUBLIÉS PAR ABEL



CHRISTIANIA
IMPRIMERIE DE GRØNDAHL & SØN

M DCCC LXXXI





PREFACE.

L'édition des Œuvres d'Abel faite par *Holmboe* et publiée en 1839, était devenue très rare trente ans après. C'est pourquoi plusieurs mathématiciens étrangers, surtout allemands et français, en demandaient une nouvelle édition à leurs confrères norvégiens. C'étaient MM. *Clebsch*, *Kronecker* et *Weierstrass* qui firent les premiers cette proposition, dont la *Société Mathématique de France* déclara hautement l'utilité par son président *Chasles*. Dans ces circonstances, le Gouvernement Norvégien, sollicité par la *Société des Sciences* de Christiania, crut devoir inviter le Corps Législatif à voter la somme nécessaire pour faire une nouvelle édition revue et complète des Œuvres d'Abel. Le *Storthing* accorda promptement la somme voulue, et conformément à la proposition émise l'édition nous fut confiée. Pendant l'exécution de cette tâche importante, nous avons profité des sages conseils et du précieux concours de beaucoup de personnes autorisées. Outre les mathématiciens déjà nommés nous devons remercier spécialement M. *O. J. Broch*, de Christiania, M. *C. Jordan*, de Paris, et M. *E. Schering*, de Gottingue. L'illustre *Académie* de Berlin mit à notre disposition, avec une bienveillance extrême, les manuscrits de plusieurs mémoires, imprimés dans le Journal de *Crelle*, et les dates de publication des mémoires d'Abel insérés dans les tomes II—IV dudit Journal, nous ont été obligeamment fournies par *Borchardt*.

Nous avons cru de notre devoir d'admettre tout travail publié par Abel dans notre édition; à ceci nous n'avons fait qu'une seule exception, dont nous parlerons aussitôt. En outre nous avons cherché à recueillir tous les manuscrits et toutes les lettres d'Abel encore existantes, en les soumettant à un examen minutieux pour en extraire tout ce qui pût avoir de l'intérêt scientifique. La Bibliothèque de notre Université avait acquis quelques-uns des manuscrits d'Abel; d'autres, moins importans, il est vrai, étaient devenus la propriété de quelques mathématiciens norvégiens. Sollicitée par nous, la veuve de *Holmboe* a revu soigneusement les papiers de son défunt mari, avec l'heureux résultat que toute une série des manuscrits d'Abel fut retrouvée et donnée à la Bibliothèque de l'Université. Néanmoins beaucoup des documens qui étaient sous les mains de *Holmboe* nous manquent, étant probablement détruits par un incendie survenu peu après sa mort. Cependant il nous semble probable que la plus grande partie de ce qui date des dernières années d'Abel est encore conservé. Dans ces manuscrits nous n'avons relevé, il est vrai, aucun résultat nouveau à la science; cependant ils ont montré que plusieurs théorèmes importans, trouvés plus tard par d'autres, étaient déjà connus à Abel et se cachaient dans ses papiers quand ils furent publiés pour la première fois. Outre les théorèmes, déjà connus par l'édition de *Holmboe*, sur les équations résolubles par radicaux, nous pouvons mentionner comme tels: un théorème fondamental sur les relations qui peuvent avoir lieu entre des intégrales de différentielles algébriques, qu'Abel avait bien énoncé dans une lettre adressée à *Legendre*, mais dont il n'avait pas donné la démonstration; en outre une proposition très-générale sur la convergence des séries, laquelle fut publiée pour la première fois par M. *Bertrand*.

Le Tome I de notre édition contient, dans l'ordre chronologique, tous les mémoires publiés par Abel, à l'exception d'un opuscule imprimé dans le *Magasin des Sciences Naturelles*, année 1824, dans lequel il s'était glissé, par inadvertance, une faute grave. Or comme Abel a expressément retracté ce mémoire, nous croyons avec *Holmboe* devoir l'exclure des Œuvres Complètes. Notre édition contient quatre mémoires publiés par Abel qui manquent à celle de *Holmboe*, savoir les mémoires III, V, XII, et XIII de notre premier volume.

Les deux premiers furent omis par *Holmboe*, parce que le contenu s'en retrouve dans d'autres travaux d'Abel. Le mémoire XII, présenté par Abel à *L'Académie des Sciences* de Paris en 1826, ne put être inséré dans l'édition de *Holmboe;* ce n'est qu'en 1841 qu'il fut imprimé dans les *Mémoires des Savans étrangers.* Le mémoire XIII semble avoir échappé à l'attention de *Holmboe.*

Les mémoires publiés par Abel dans les revues norvégiennes, furent rédigés en norvégien; par égard à la plupart des lecteurs nous les rendons en français. Tous les autres travaux d'Abel furent, d'après ce que nous dit *Holmboe* dans sa préface, rédigés en français; mais les mémoires publiés dans les deux premiers volumes du *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, furent traduits en allemand par *Crelle*, à l'exception des *Recherches sur les fonctions elliptiques.* Pour ce qui est des mémoires imprimés dans le quatrième volume du même journal, il existe encore, comme il est dit plus haut, des copies des manuscrits originaux d'Abel; elles font voir que *Crelle* a fait plusieurs corrections du style en partie inutiles; il y en a même qui ont modifié le sens. Ainsi les traductions allemandes de *Crelle* ne pouvant être considérées comme des versions absolument exactes du texte original, nous avons cru, avec *Holmboe*, devoir rendre ces mémoires en français afin de conserver l'unité linguistique de notre édition.

Le Tome II de notre édition comprend les Œuvres posthumes, des extraits de lettres d'Abel, et les notes des éditeurs. Tout en reconnaissant le grand mérite de *Holmboe*, comme l'habile maître et le fidèle ami d'Abel, et aussi comme le zélé éditeur de ses Œuvres, nous ne pouvons nous empêcher de faire observer qu'à notre avis l'éditeur n'a pas toujours traité les manuscrits laissés par Abel avec toute la critique désirable. En effet, dans le second volume de son édition, il a imprimé, à côté de plusieurs mémoires précieux, un certain nombre de travaux de jeunesse, datant d'une période où la critique d'Abel ne s'était pas encore complètement développée. Et même quand Abel parle plus tard des faux résultats auxquels conduit un raisonnement peu rigoureux, il nous paraît évident qu'il pense, entre autres, aux erreurs auxquelles il avait été porté lui-même dans ses anciens travaux, depuis long-

temps rejetés par lui; or ce sont ceux-là qu'a admis *Holmboe*, après la mort de l'auteur, parmi ses Œuvres Complètes. Si nous avions à faire la première édition des Œuvres d'Abel, nous aurions renoncé à publier plusieurs travaux imprimés dans le second volume de l'édition de *Holmboe.* Cependant, comme ces travaux sont déjà connus au public et souvent cités, nous ne nous sommes décidés à omettre que trois des travaux publiés par *Holmboe*, lesquels nous semblent n'avoir plus aucun intérêt même historique. D'autre part nous avons cru devoir mettre au jour plusieurs parties inédites des manuscrits d'Abel, dont quelques-uns offrent un grand intérêt.

Tome II, p. 283—289 nous donnons un aperçu de tous les manuscrits d'Abel encore existans. Ici nous nous bornons à faire remarquer que dans un protocole rempli depuis août 1826 à la fin de la même année ou au commencement de 1827, nous avons trouvé des endroits qui prouvent qu' Abel s'occupait de la *Théorie de la transformation des fonctions elliptiques* à Paris, à la fin de 1826, ce qui d'ailleurs s'accorde avec ce qu'il a dit à *Holmboe*, cité par nous dans le second volume.

Des lettres d'Abel nous donnons des extraits plus complets que ne le faisait *Holmboe*. Nous signalons à l'attention des lecteurs la première lettre d'Abel à *Holmboe.* Cette lettre prouve que, déjà en 1823, Abel avait considéré la fonction inverse de l'intégrale elliptique de la première espèce, mais elle fait voir aussi qu'à cette époque il ne savait pas encore maîtriser les paradoxes apparens qu'il avait rencontrés dans ses recherches.

A l'édition nous avons ajouté quelques notes, dans lesquelles nous donnons tantôt des renseignemens sur les divers mémoires, tantôt sur les endroits où nous avons cru devoir nous écarter du texte original, pourvu toutefois que ce ne soient pas de simples corrections de fautes de calcul ou d'impression; tantôt nous faisons observer des inexactitudes que nous ne nous croyions pas autorisés à corriger. Quelquefois nous donnons notre interprétation de passages obscurs, ou bien nous indiquons comment selon nous Abel a déduit des propositions qu'il a avancées sans preuve. Nous faisons observer expressément, que si dans les notes nous citons quelquefois des auteurs postérieurs, ce n'est que pour éclaircir le texte, et nullement pour montrer comment les découvertes d'Abel ont été développées par ses successeurs.

Au moment où nous achevons cette édition, M. *Bjerknes*, professeur à l'Université de Christiania, vient de publier une biographie détaillée d'Abel, fondée sur des recherches étendues, dans laquelle il a tenu compte des matériaux recueillis pour cette édition. Dans ce travail intéressant on trouve réuni à peu près toutes les données accessibles de la vie d'Abel. Tout en exprimant le vœu que cette biographie soit bientôt traduite dans une langue plus généralement connue, nous devons faire observer que nous ne partageons pas toutes les vues de l'auteur, bien que nous reconnaissions avec lui que c'est à Abel en première ligne que la science doit la découverte des fonctions elliptiques proprement dites.

En présentant, un demi-siècle après la mort d'Abel, cette nouvelle édition de ses Œuvres au public mathématique, nous osons espérer qu'elle contribuera fortement à ce que ces travaux qui ont tant guidé le mouvement mathématique de notre temps, soient étudiés dans l'original par la génération actuelle de mathématiciens. Abel a eu de grands successeurs; mais pour qui veut continuer dans la voie frayée par lui, il sera toujours profitable de remonter à la source même: les immortelles Œuvres d'Abel.

Christiania, août 1881.

Les Éditeurs.

TABLE DES MATIÈRES DU TOME PREMIER.

I.

MÉTHODE GÉNÉRALE POUR TROUVER DES FONCTIONS D'UNE SEULE QUANTITÉ VARIABLE, LORSQU'UNE PROPRIÉTÉ DE CES FONCTIONS EST EXPRIMÉE PAR UNE ÉQUATION ENTRE DEUX VARIABLES.

Magazin for Naturvidenskaberne, Aargang I, Bind 1, Christiania 1823.

Soient x et y deux quantités variables indépendantes, α, β, γ, δ etc. des fonctions données de x et y, et φ, f, F etc. des fonctions cherchées entre lesquelles une relation est exprimée par une équation $V=0$, contenant d'une manière quelconque les quantités x, y, $\varphi\alpha$, $f\beta$, $F\gamma$ etc. et leurs différentielles. On pourra, en général, à l'aide de cette seule équation, trouver toutes les fonctions inconnues dans les cas où le problème est possible.

Pour trouver l'une des fonctions, il est clair qu'on doit chercher une équation où cette fonction soit la seule inconnue et par conséquent chasser toutes les autres. Cherchons donc d'abord à chasser une fonction inconnue par exemple $\varphi\alpha$ et ses différentielles. Les quantités x et y étant indépendantes, on peut regarder l'une d'elles, ou une fonction donnée des deux, comme constante. On peut donc différentier l'équation $V=0$ par rapport à l'une des variables x, en considérant α comme constant, et dans ce cas l'autre variable y doit être considérée comme fonction de x et de α. Or en différentiant l'équation $V=0$ plusieurs fois de suite, en supposant α constant, il ne se trouvera pas dans les équations résultantes, d'autres fonctions de α que celles qui sont comprises dans l'équation $V=0$, savoir $\varphi\alpha$ et ses différentielles. Donc si la fonction V contient

$$\varphi\alpha,\ d\varphi\alpha,\ d^2\varphi\alpha, \ldots d^n\varphi\alpha,$$

on obtiendra, en différentiant l'équation $V=0$ $n+1$ fois de suite dans la supposition de α constant, les $n+2$ équations suivantes:

$$V=0,\ dV=0,\ d^2V=0, \ldots d^{n+1}V=0.$$

Éliminant de ces $n+2$ équations les $n+1$ quantités inconnues

$$\varphi\alpha,\ d\varphi\alpha,\ d^2\varphi\alpha \text{ etc.},$$

il en résultera une équation $V_1=0$ qui ne contiendra ni la fonction $\varphi\alpha$ ni ses différentielles, mais seulement les fonctions $f\beta$, $F\gamma$, etc. et leurs différentielles.

Cette équation $V_1=0$ pourra maintenant être traitée de la même manière, par rapport à l'une des autres fonctions inconnues $f\beta$, et l'on obtiendra une équation $V_2=0$ qui ne contiendra ni $\varphi\alpha$ ou ses différentielles, ni $f\beta$ ou ses différentielles, mais seulement $F\gamma$ etc. et les différentielles de ces fonctions.

De cette manière, on peut continuer l'élimination des fonctions inconnues, jusqu'à ce qu'on soit parvenu à une équation qui ne contienne qu'une seule fonction inconnue avec ses différentielles, et en regardant maintenant l'une des quantités variables comme constante, on a, entre la fonction inconnue et l'autre variable, une équation différentielle d'où l'on pourra tirer cette fonction par intégration.

On peut remarquer, qu'il suffit d'éliminer jusqu'à ce qu'on ait obtenu une équation qui ne contienne que deux fonctions inconnues et leurs différentielles; car, si par exemple ces fonctions sont $\varphi\alpha$ et $f\beta$, on pourra, en supposant β constant, exprimer x et y en fonction de α à l'aide des deux équations $\alpha=\alpha$ et $\beta=c$, et arriver de cette manière à une équation différentielle entre $\varphi\alpha$ et α, d'où l'on pourra par conséquent déduire $\varphi\alpha$. De la même manière, on trouvera une équation entre $f\beta$ et β en déterminant x et y par les équations $\alpha=c$ et $\beta=\beta$. Ces fonctions étant ainsi trouvées, on trouvera aisément les autres fonctions à l'aide des équations qui restent.

De cette manière, on pourra donc en général trouver toutes les fonctions inconnues, toutes les fois que le problème sera possible. Pour s'en rendre compte il faut substituer les valeurs trouvées dans l'équation donnée, et voir si elle est satisfaite.

Ce qui précède dépend, comme nous venons de le voir, de la différentiation d'une fonction de x et y par rapport à x, en supposant constante une fonction donnée de x et y; y est donc fonction de x et dans les différentielles

se trouvent les expressions $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}$, etc. Ces expressions se trouvent aisément en différentiant l'équation $\alpha = c$ par rapport à x, et en supposant y fonction de x. En effet, on obtiendra les équations suivantes:

$$\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\alpha}{dy}\frac{dy}{dx} = 0,$$

$$\frac{d^2\alpha}{dx^2} + 2\frac{d^2\alpha}{dx\,dy}\frac{dy}{dx} + \frac{d^2\alpha}{dy^2}\frac{dy^2}{dx^2} + \frac{d\alpha}{dy}\frac{d^2y}{dx^2} = 0 \text{ etc.},$$

d'où l'on tire

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{d\alpha}{dx}}{\frac{d\alpha}{dy}},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\frac{d^2\alpha}{dx^2}}{\frac{d\alpha}{dy}} + 2\frac{\frac{d^2\alpha}{dx\,dy}\frac{d\alpha}{dx}}{\left(\frac{d\alpha}{dy}\right)^2} - \frac{\frac{d^2\alpha}{dy^2}\left(\frac{d\alpha}{dx}\right)^2}{\left(\frac{d\alpha}{dy}\right)^3} \text{ etc.}$$

La méthode générale de résoudre l'équation $V = 0$ est applicable dans tous les cas où l'élimination peut s'effectuer, mais il peut arriver que cela ne soit pas possible, et alors il faut avoir recours au calcul des différences; mais pour n'être pas trop long, je passerai ce cas sous silence, d'autant plus qu'on peut voir dans le traité du calcul différentiel et du calcul intégral de M. *Lacroix* t. III, p. 208, comment on doit s'y prendre.

Nous allons appliquer la théorie générale à quelques exemples.

1. Trouver la fonction φ qui satisfasse à l'équation

$$\varphi\alpha = f(x, y, \varphi\beta, \varphi\gamma),$$

f étant une fonction quelconque donnée.

En différentiant cette équation par rapport à x, en supposant α constant, on aura

$$0 = f'x + f'y\frac{dy}{dx} + f'(\varphi\beta)\varphi'\beta\left(\frac{d\beta}{dx} + \frac{d\beta}{dy}\frac{dy}{dx}\right) + f'(\varphi\gamma)\varphi'\gamma\left(\frac{d\gamma}{dx} + \frac{d\gamma}{dy}\frac{dy}{dx}\right),$$

or nous avons vu que

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{d\alpha}{dx}}{\frac{d\alpha}{dy}};$$

cette valeur étant substituée dans l'équation ci-dessus, on obtiendra, après

avoir multiplié par $\frac{d\alpha}{dy}$:

$$0 = f'x\frac{d\alpha}{dy} - f'y\frac{d\alpha}{dx} + f'(\varphi\beta)\varphi'\beta\left(\frac{d\beta}{dx}\frac{d\alpha}{dy} - \frac{d\alpha}{dx}\frac{d\beta}{dy}\right) + f'(\varphi\gamma)\,\varphi'\gamma\left(\frac{d\gamma}{dx}\frac{d\alpha}{dy} - \frac{d\alpha}{dx}\frac{d\gamma}{dy}\right).$$

Faisant maintenant γ constant, déterminant x et y en β par les deux équations $\gamma = c$, $\beta = \beta$ et substituant leurs valeurs, on obtiendra entre $\varphi\beta$ et β une équation différentielle du premier ordre, d'où l'on tirera la fonction $\varphi\beta$.

Soit

$$f(x, y, \varphi\beta, \varphi\gamma) = \varphi\beta + \varphi\gamma,$$

on aura

$$f'x = 0,\ f'y = 0,\ f'(\varphi\beta) = 1,\ f'(\varphi\gamma) = 1.$$

L'équation deviendra donc

$$0 = \varphi'\beta\left(\frac{d\beta}{dx}\frac{d\alpha}{dy} - \frac{d\alpha}{dx}\frac{d\beta}{dy}\right) + \varphi'\gamma\left(\frac{d\gamma}{dx}\frac{d\alpha}{dy} - \frac{d\alpha}{dx}\frac{d\gamma}{dy}\right);$$

on tire de là en intégrant

$$\varphi\beta = \varphi'\gamma\int\frac{\frac{d\alpha}{dx}\frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\alpha}{dy}\frac{d\gamma}{dx}}{\frac{d\beta}{dx}\frac{d\alpha}{dy} - \frac{d\alpha}{dx}\frac{d\beta}{dy}}\,d\beta.$$

On voit aisément que sans diminuer la généralité du problème on peut faire $\beta = x$ et $\gamma = y$; on aura ainsi

$$\frac{d\beta}{dx} = 1,\ \frac{d\beta}{dy} = 0,\ \frac{d\gamma}{dx} = 0,\ \frac{d\gamma}{dy} = 1.$$

Donc, ayant

$$\varphi\alpha = \varphi x + \varphi y,$$

on en conclut

$$\varphi x = \varphi' y\int\frac{\frac{d\alpha}{dx}}{\frac{d\alpha}{dy}}\,dx,$$

où y est supposé constant après la différentiation.

Appliquons cela à la recherche du logarithme. On a

$$\log(xy) = \log x + \log y,$$

donc

$$\alpha = xy,\ \frac{d\alpha}{dx} = y,\ \frac{d\alpha}{dy} = x;$$

substituant ces valeurs on obtient

$$\varphi x = \varphi' y \int \frac{y}{x}\, dx = c \int \frac{dx}{x},$$

donc

$$\log x = c \int \frac{dx}{x}.$$

Si l'on veut trouver arc tang x, on a

$$\text{arc tang}\, \frac{x+y}{1-xy} = \text{arc tang}\, x + \text{arc tang}\, y,$$

donc

$$\alpha = \frac{x+y}{1-xy}$$

et par suite

$$\frac{d\alpha}{dx} = \frac{1}{1-xy} + \frac{y(x+y)}{(1-xy)^2} = \frac{1+y^2}{(1-xy)^2},$$

$$\frac{d\alpha}{dy} = \frac{1}{1-xy} + \frac{x(y+x)}{(1-xy)^2} = \frac{1+x^2}{(1-xy)^2}.$$

On tire de là

$$\frac{\frac{d\alpha}{dx}}{\frac{d\alpha}{dy}} = \frac{1+y^2}{1+x^2},$$

par conséquent

$$\varphi x = \varphi' y \int \frac{1+y^2}{1+x^2}\, dx,$$

d'où

$$\text{arc tang}\ x = c \int \frac{dx}{1+x^2} = \int \frac{dx}{1+x^2}, \text{ en faisant } c = 1.$$

Supposons maintenant

$$f(x, y, \varphi\beta, \varphi\gamma) = \varphi\beta . \varphi\gamma = \varphi x . \varphi y,$$

en faisant $\beta = x$, $\gamma = y$. On aura

$$f'x = f'y = 0, \ \ f'(\varphi x) = \varphi y, \ \ f'(\varphi y) = \varphi x,$$

$$\frac{d\beta}{dx} = \frac{d\gamma}{dy} = 1, \ \ \frac{d\beta}{dy} = \frac{d\gamma}{dx} = 0.$$

L'équation deviendra donc

$$\varphi y . \varphi' x \frac{d\alpha}{dy} - \varphi x . \varphi' y \frac{d\alpha}{dx} = 0,$$

donc

$$\frac{\varphi' x}{\varphi x} = \frac{\varphi' y}{\varphi y} \cdot \frac{\frac{d\alpha}{dx}}{\frac{d\alpha}{dy}},$$

et en intégrant

$$\log \varphi x = \frac{\varphi' y}{\varphi y} \int \frac{\frac{d\alpha}{dx}}{\frac{d\alpha}{dy}} dx.$$

Soit

$$\int \frac{\frac{d\alpha}{dx}}{\frac{d\alpha}{dy}} dx = T,$$

on aura

$$\varphi x = e^{cT}.$$

Soit par exemple $\alpha = x + y$, on aura $\frac{d\alpha}{dx} = 1 = \frac{d\alpha}{dy}$, donc

$$T = \int dx = x,$$

et

$$\varphi x = e^{cx}.$$

Soit $\alpha = xy$, on aura

$$\frac{d\alpha}{dx} = y, \quad \frac{d\alpha}{dy} = x, \quad T = y \int \frac{dx}{x},$$

donc

$$\varphi x = e^{c \log x},$$

c'est-à-dire

$$\varphi x = x^c.$$

Si l'on cherche la résultante R de deux forces égales P, dont les directions font un angle égal à $2x$, on trouvera que $R = P\varphi x$, où φx est une fonction qui satisfait à l'équation

$$\varphi x \,.\, \varphi y = \varphi(x + y) + \varphi(x - y).\text{*)}$$

Pour déterminer cette fonction, il faut différentier l'équation par rapport à x, en supposant $y + x = \text{const.}$, et l'on aura

$$\varphi' x \,.\, \varphi y + \varphi x \,.\, \varphi' y \frac{dy}{dx} = \varphi'(x - y)\left(1 - \frac{dy}{dx}\right).$$

---

*) Voyez *Poisson* traité de mécanique t. I, p. 14.

Mais de l'équation $x+y=c$ on tire $\frac{dy}{dx}=-1$; substituant cette valeur, on obtient

$$\varphi'x.\varphi y-\varphi x.\varphi'y=2\varphi'(x-y).$$

Différentiant maintenant par rapport à x, en supposant $x-y=$ const., on aura

$$\varphi''x.\varphi y+\varphi'x.\varphi'y\frac{dy}{dx}-\varphi'x.\varphi'y-\varphi x.\varphi''y\frac{dy}{dx}=0;$$

or l'équation $x-y=c$ donne $\frac{dy}{dx}=1$, donc

$$\varphi''x.\varphi y-\varphi x.\varphi''y=0.$$

La supposition de y constant donne

$$\varphi''x+c\varphi x=0,$$

d'où l'on tire en intégrant

$$\varphi x=\alpha\cos(\beta x+\gamma),$$

α, β et γ étant des constantes. En déterminant celles-ci par les conditions du problème, on trouvera

$$\alpha=2,\ \beta=1,\ \gamma=0,$$

donc

$$\varphi x=2\cos x,\ \text{ et par suite }\ R=2P\cos x.$$

2. Déterminer les trois fonctions φ, f et ψ qui satisfassent à l'équation

$$\psi\alpha=F(x,y,\varphi x,\varphi'x,\ldots fy,f'y,\ldots),$$

où α est une fonction donnée de x et de y, et F une fonction donnée des quantités entre les parenthèses.

Différentiant l'équation par rapport à x, en supposant α constant, et écrivant ensuite $-\frac{\frac{d\alpha}{dx}}{\frac{d\alpha}{dy}}$ au lieu de $\frac{dy}{dx}$, on obtiendra l'équation suivante

$$\frac{\frac{d\alpha}{dx}}{\frac{d\alpha}{dy}}=\frac{F'x+F'(\varphi x)\varphi'x+\ldots}{F'y+F'(fy)f'y+\ldots}.$$

Si dans cette équation on fait y constant, on a une équation différentielle entre φx et x, d'où l'on peut tirer φx, et si l'on fait x constant, on a une équation différentielle d'où l'on peut tirer fy; ces deux fonctions étant trouvées, la fonction $\psi\alpha$ se trouvera sans difficulté par l'équation proposée.

Exemples. Trouver les trois fonctions qui satisfassent à l'équation

$$\psi(x+y)=\varphi x\,.\,f'y+fy\,.\,\varphi'x.$$

On a ici

$$F(x,\ y,\ \varphi x,\ \varphi'x,\ fy,\ f'y)=\varphi x\,.\,f'y+fy\,.\,\varphi'x,$$

donc

$$F'x=F'y=0,\quad F'(\varphi x)=f'y,\quad F'(\varphi'x)=fy,$$
$$F'(fy)=\varphi'x,\quad F'(f'y)=\varphi x;$$

de plus

$$\alpha=x+y,$$

donc

$$\frac{d\alpha}{dx}=1,\quad \frac{d\alpha}{dy}=1.$$

Ces valeurs étant substituées, on aura

$$1=\frac{f'y\,.\,\varphi'x+fy\,.\,\varphi''x}{\varphi'x\,.\,f'y+\varphi x\,.\,f''y},$$

ou bien

$$\varphi x\,.\,f''y-fy\,.\,\varphi''x=0.$$

Faisant y constant, on trouvera

$$\varphi x=a\sin(bx+c),$$

et si l'on fait x constant,

$$fy=a'\sin(by+c').$$

On tire de là

$$\varphi'x=ab\cos(bx+c),$$
$$f'y=a'b\cos(by+c').$$

Ces valeurs étant substituées dans l'équation proposée, on obtiendra

$$\psi(x+y)=aa'b\Big(\sin(bx+c)\cos(by+c')+\sin(by+c')\cos(bx+c)\Big)$$
$$=aa'b\sin\Big(b(x+y)+c+c'\Big).$$

Les trois fonctions cherchées sont donc

$$\varphi x = a \sin(bx + c),$$
$$fy = a' \sin(by + c'),$$
$$\psi \alpha = aa'b \sin(b\alpha + c + c').$$

Si l'on fait $a = a' = b = 1$ et $c = c' = 0$, on aura

$$\varphi x = \sin x, \quad fy = \sin y, \quad \psi \alpha = \sin \alpha,$$

et par suite

$$\sin(x + y) = \sin x . \sin' y + \sin y . \sin' x.$$

Trouver les trois fonctions qui sont déterminées par l'équation

$$\psi(x + y) = f(xy) + \varphi(x - y).$$

Différentiant par rapport à x, en supposant $x + y$ constant, on aura

$$0 = f'(xy)(y - x) + 2\varphi'(x - y).$$

Maintenant pour trouver φ, soit $xy = c$ et $x - y = \alpha$, on aura

$$\varphi' \alpha = k \alpha,$$

donc

$$\varphi \alpha = k' + \frac{k}{2} \alpha^2.$$

Pour trouver f, soit $xy = \beta$ et $x - y = c$, on aura

$$f' \beta = c',$$

donc

$$f \beta = c'' + c' \beta.$$

Ces valeurs de $\varphi \alpha$ et $f \beta$ étant substituées dans l'équation donnée, on obtiendra

$$\psi(x + y) = c'' + c'xy + k' + \frac{k}{2}(x - y)^2.$$

Pour déterminer ψ, soit $x + y = \alpha$, d'où l'on tire $y = \alpha - x$, d'où

$$\psi \alpha = c'' + c'x(\alpha - x) + k' + \frac{k}{2}(2x - \alpha)^2 = c'' + \frac{k}{2}\alpha^2 + k' + x\alpha(c' - 2k) + (2k - c')x^2.$$

Pour que cette équation soit possible, il faut que x disparaisse; alors on aura

$$2k - c' = 0, \quad \text{et} \quad c' = 2k.$$

Cette valeur étant substituée, on obtient

$$\psi \alpha = k' + c'' + \frac{k}{2}\alpha^2, \quad f\beta = c'' + 2k\beta, \quad \varphi \gamma = k' + \frac{k}{2}\gamma^2,$$

qui sont les trois fonctions cherchées.

Comme dernier exemple je prendrai le suivant: Déterminer les fonctions φ et f par l'équation

$$\varphi(x+y)=\varphi x\,.\,fy+fx\,.\,\varphi y.$$

En supposant $x+y=c$, et en différentiant, on obtiendra

$$0=\varphi' x\,.\,fy-\varphi x\,.\,f'y+f'x\,.\,\varphi y-fx\,.\,\varphi' y.$$

Supposons de plus que $f(0)=1$ et $\varphi(0)=0$, nous aurons en posant $y=0$:

$$0=\varphi' x-\varphi x\,.\,c+fx\,.\,c',$$

donc

$$fx=k\varphi x+k'\varphi' x.$$

Substituant cette valeur de fx, et faisant y constant, on aura

$$\varphi'' x+a\varphi' x+b\varphi x=0,$$

et en intégrant,

$$\varphi x=c'\,e^{\alpha x}+c''\,e^{\alpha' x}.$$

Connaissant φx, on connaît aussi fx, et en substituant les valeurs de ces fonctions, on pourra déterminer les valeurs des quantités constantes. On peut supposer

$$c'=-c''=\frac{1}{2\sqrt{-1}},\quad \alpha=-\alpha'=\sqrt{-1},$$

ce qui donnera

$$\varphi x=\frac{e^{x\sqrt{-1}}-e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}=\sin x,\quad fx=\cos x.$$



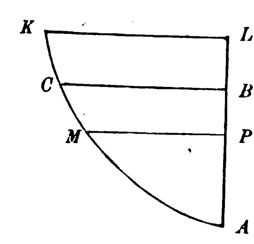
II.

SOLUTION DE QUELQUES PROBLÈMES À L'AIDE D'INTÉGRALES DÉFINIES.

Magazin for Naturvidenskaberne, Aargang I, Bind 2, Christiania 1823

1.

C'est bien connu qu'on résout à l'aide d'intégrales définies, beaucoup de problèmes qui autrement ne peuvent point se résoudre, ou du moins sont très-difficiles à traiter. Elles ont surtout été appliquées avec avantage à la solution de plusieurs problèmes difficiles de la mécanique, par exemple, à celui du mouvement d'une surface élastique, des problèmes de la théorie des ondes etc. Je vais en montrer une nouvelle application en résolvant le problème suivant.



Soit CB une ligne horizontale, A un point donné, AB perpendiculaire à BC, AM une courbe dont les coordonnées rectangulaires sont $AP=x$, $PM=y$. Soit de plus $AB=a$, $AM=s$. Si l'on conçoit maintenant qu'un corps se meut sur l'arc CA, la vitesse initiale étant nulle, le temps T qu'il emploie pour le parcourir dépendra de la forme de la courbe, et de a. Il s'agit de déterminer la courbe KCA pour que le temps T soit égal à une fonction donnée de a, p. ex. ψa.

Si l'on désigne par h la vitesse du corps au point M, et par t le temps qu'il emploie pour parcourir l'arc CM, on a comme on sait

$$h=\sqrt{BP}=\sqrt{a-x},\quad dt=-\frac{ds}{h},$$

donc

$$dt = -\frac{ds}{\sqrt{a-x}},$$

et en intégrant

$$t = -\int \frac{ds}{\sqrt{a-x}}.$$

Pour avoir T on doit prendre l'intégrale depuis $x=a$ jusqu'à $x=0$, on a donc

$$T = \int_{x=0}^{x=a} \frac{ds}{\sqrt{a-x}}.$$

Or comme T est égal à ψa, l'équation devient

$$\psi a = \int_{x=0}^{x=a} \frac{ds}{\sqrt{a-x}}.$$

Au lieu de résoudre cette équation, je vais montrer comment on peut tirer s de l'équation plus générale

$$\psi a = \int_{x=0}^{x=a} \frac{ds}{(a-x)^n},$$

où n est supposé moindre que l'unité, afin que l'intégrale ne devienne pas infinie entre les limites données; ψa est une fonction quelconque qui n'est pas infinie quand a est égal à zéro.

Posons

$$s = \Sigma \alpha^{(m)} x^m,$$

où $\Sigma \alpha^{(m)} x^m$ a la valeur suivante:

$$\Sigma \alpha^{(m)} x^m = \alpha^{(m')} x^{m'} + \alpha^{(m'')} x^{m''} + \alpha^{(m''')} x^{m'''} + \dots.$$

En différentiant on obtient

$$ds = \Sigma m \alpha^{(m)} x^{m-1} dx,$$

donc

$$\frac{ds}{(a-x)^n} = \frac{\Sigma m \alpha^{(m)} x^{m-1} dx}{(a-x)^n} = \Sigma m \alpha^{(m)} \frac{x^{m-1} dx}{(a-x)^n}.$$

En intégrant on a

$$\int_{x=0}^{x=a} \frac{ds}{(a-x)^n} = \int_{x=0}^{x=a} \Sigma m \alpha^{(m)} \frac{x^{m-1} dx}{(a-x)^n}.$$

Or

$$\int \Sigma m \alpha^{(m)} \frac{x^{m-1} dx}{(a-x)^n} = \Sigma m \alpha^{(m)} \int \frac{x^{m-1} dx}{(a-x)^n},$$

donc, puisque $\int_{x=0}^{x=a} \frac{ds}{(a-x)^n} = \psi a$:

$$\psi a = \Sigma m \alpha^{(m)} \int_0^a \frac{x^{m-1}dx}{(a-x)^n}.$$

La valeur de l'intégrale

$$\int_0^a \frac{x^{m-1}dx}{(a-x)^n}$$

se trouve aisément de la manière suivante: Si l'on pose $x = at$, on a

$$x^m = a^m t^m, \quad mx^{m-1}dx = ma^m t^{m-1}dt$$
$$(a-x)^n = (a-at)^n = a^n(1-t)^n,$$

donc

$$\frac{mx^{m-1}dx}{(a-x)^n} = \frac{ma^{m-n}t^{m-1}dt}{(1-t)^n},$$

et en intégrant

$$m\int_0^a \frac{x^{m-1}dx}{(a-x)^n} = ma^{m-n}\int_0^1 \frac{t^{m-1}dt}{(1-t)^n}.$$

Or on a

$$\int_0^1 \frac{t^{m-1}dt}{(1-t)^n} = \frac{\Gamma(1-n)\,\Gamma m}{\Gamma(m-n+1)},$$

où Γm est une fonction déterminée par les équations

$$\Gamma(m+1) = m\Gamma m, \quad \Gamma(1) = 1.\text{*)}$$

En substituant cette valeur pour l'intégrale $\int_0^1 \frac{t^{m-1}dt}{(1-t)^n}$, et remarquant que $m\Gamma m = \Gamma(m+1)$ on a

$$m\int_0^a \frac{x^{m-1}dx}{(a-x)^n} = \frac{\Gamma(1-n)\,\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)}a^{m-n}.$$

En substituant cette valeur dans l'expression pour ψa, on obtient

$$\psi a = \Gamma(1-n)\Sigma\alpha^{(m)}a^{m-n}\frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)}.$$

Soit

$$\psi a = \Sigma\beta^{(k)}a^k,$$

on a

$$\Sigma\beta^{(k)}a^k = \Sigma\frac{\Gamma(1-n)\,\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)}\alpha^{(m)}a^{m-n}.$$

---

*) Les propriétés de cette fonction remarquable ont été largement développées par M. *Legendre* dans son ouvrage, Exercices de calcul intégral t. I et II.

Pour que cette équation soit satisfaite il faut que $m - n = k$, donc $m = n + k$, et que

$$\beta^{(k)} = \frac{\Gamma(1-n)\,\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)}\alpha^{(m)} = \frac{\Gamma(1-n)\,\Gamma(n+k+1)}{\Gamma(k+1)}\alpha^{(m)},$$

donc

$$\alpha^{(m)} = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(1-n)\,\Gamma(n+k+1)}\beta^{(k)}.$$

Or on a

$$\int_0^1 \frac{t^k dt}{(1-t)^{1-n}} = \frac{\Gamma n\,.\,\Gamma(k+1)}{\Gamma(n+k+1)},$$

par conséquent

$$\alpha^{(m)} = \frac{\beta^{(k)}}{\Gamma n\,.\,\Gamma(1-n)}\int_0^1 \frac{t^k dt}{(1-t)^{1-n}}.$$

En multipliant par $x^m = x^{n+k}$ on obtient

$$\alpha^{(m)} x^m = \frac{x^n}{\Gamma n\,.\,\Gamma(1-n)}\int_0^1 \frac{\beta^{(k)}(xt)^k dt}{(1-t)^{1-n}},$$

d'où

$$\Sigma\alpha^{(m)} x^m = \frac{x^n}{\Gamma n\,.\,\Gamma(1-n)}\int_0^1 \frac{\Sigma\beta^{(k)}(xt)^k dt}{(1-t)^{1-n}}.$$

Mais on a $\Sigma\alpha^{(m)}x^m = s$, $\Sigma\beta^{(k)}(xt)^k = \psi(xt)$, donc

$$s = \frac{x^n}{\Gamma n\,.\,\Gamma(1-n)}\int_0^1 \frac{\psi(xt)\,dt}{(1-t)^{1-n}}.$$

En remarquant ensuite qu'on a $\Gamma n\,.\,\Gamma(1-n) = \frac{\pi}{\sin n\pi}$, on trouve

$$s = \frac{\sin n\pi\,.\,x^n}{\pi}\int_0^1 \frac{\psi(xt)\,dt}{(1-t)^{1-n}}.$$

De ce qui précède découle ce théorème remarquable:
Si l'on a

$$\psi a = \int_{x=0}^{x=a} \frac{ds}{(a-x)^n},$$

on a aussi

$$s = \frac{\sin n\pi}{\pi}\,x^n\int_0^1 \frac{\psi(xt)\,dt}{(1-t)^{1-n}}.$$

Appliquons maintenant cela à l'équation

$$\psi a = \int_{x=0}^{x=a} \frac{ds}{\sqrt{a-x}}.$$

On a dans ce cas $n=\frac{1}{2}$, donc $1-n=\frac{1}{2}$ et par conséquent

$$s=\frac{\sqrt{x}}{\pi}\int_0^1\frac{\psi(xt)\,dt}{\sqrt{1-t}}.$$

Voilà donc l'équation qui détermine l'arc s de la courbe cherchée par l'abscisse correspondante x; on en tirera facilement une équation entre les coordonnées rectangulaires, en remarquant que l'on a $ds^2=dx^2+dy^2$.

Appliquons maintenant la solution précédente à quelques cas spéciaux.

1) Trouver la courbe qui a la propriété, que le temps qu'un corps emploie pour parcourir un arc quelconque, soit proportionel à la $n^{\text{ième}}$ puissance de la hauteur que le corps a parcourue.

Dans ce cas on a $\psi a=ca^n$, où c est une constante, donc $\psi(xt)=cx^nt^n$, par suite:

$$s=\frac{\sqrt{x}}{\pi}\int_0^1\frac{cx^nt^n\,dt}{\sqrt{1-t}}=x^{n+\frac{1}{2}}\frac{c}{\pi}\int_0^1\frac{t^n dt}{\sqrt{1-t}},$$

donc en faisant

$$\frac{c}{\pi}\int_0^1\frac{t^n dt}{\sqrt{1-t}}=C,$$

on a

$$s=Cx^{n+\frac{1}{2}};$$

on tire de là

$$ds=(n+\tfrac{1}{2})Cx^{n-\frac{1}{2}}\,dx,$$

et

$$ds^2=(n+\tfrac{1}{2})^2C^2x^{2n-1}dx^2=dy^2+dx^2,$$

d'où l'on déduit en posant $(n+\frac{1}{2})^2C^2=k$

$$dy=dx\sqrt{kx^{2n-1}-1};$$

l'équation de la courbe cherchée devient donc

$$y=\int dx\sqrt{kx^{2n-1}-1}.$$

Si l'on fait $n=\frac{1}{2}$, on a $x^{2n-1}=1$, donc

$$y=\int dx\sqrt{k-1}=k'+x\sqrt{k-1},$$

la courbe cherchée est donc une droite.

2) Trouver l'équation de l'isochrone.

Puisque le temps doit être indépendant de l'espace parcouru, on a $\psi a = c$ et par conséquent

$$s = \frac{\sqrt{x}}{\pi}\, c \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t}},$$

donc

$$s = k\sqrt{x},$$

où

$$k = \frac{c}{\pi}\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t}},$$

ce qui est l'équation connue de la cycloide.

Nous avons vu que si l'on a

$$\psi a = \int_{x=0}^{x=a} \frac{ds}{(a-x)^n},$$

on a aussi

$$s = \frac{\sin n\pi}{\pi}\, x^n \int_0^1 \frac{\psi(xt)\,dt}{(1-t)^{1-n}}.$$

On peut aussi exprimer s d'une autre manière, que je vais rapporter à cause de sa singularité, savoir

$$s = \frac{1}{\Gamma(1-n)}\int^n \psi x \,.\, dx^n = \frac{1}{\Gamma(1-n)}\,\frac{d^{-n}\psi x}{dx^{-n}},$$

c'est-à-dire, si l'on a

$$\psi a = \int_{x=0}^{x=a} ds\,(a-x)^n,$$

on a aussi

$$s = \frac{1}{\Gamma(1+n)}\,\frac{d^n \psi x}{dx^n};$$

en d'autres termes, on a

$$\psi a = \frac{1}{\Gamma(1+n)}\int_{x=0}^{x=a} \frac{d^{n+1}\psi x}{dx^{n+1}}\,(a-x)^n dx.$$

Cette proposition se démontre aisément comme il suit. Si l'on pose

$$\psi x = \Sigma \alpha^{(m)} x^m,$$

on obtient en différentiant:

$$\frac{d^k \psi x}{dx^k} = \Sigma \alpha^{(m)}\, m(m-1)(m-2)\ldots(m-k+1)\, x^{m-k};$$

mais

$$m(m-1)(m-2)\ldots(m-k+1) = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-k+1)},$$

donc

$$\frac{d^k\psi x}{dx^k} = \Sigma\alpha^{(m)}\frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-k+1)}x^{m-k}.$$

Or on a

$$\frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-k+1)} = \frac{1}{\Gamma(-k)}\int_0^1 \frac{t^m dt}{(1-t)^{1+k}},$$

par conséquent

$$\frac{d^k\psi x}{dx^k} = \frac{1}{x^k\Gamma(-k)}\int_0^1 \frac{\Sigma\alpha^{(m)}(xt)^m dt}{(1-t)^{1+k}};$$

mais $\Sigma\alpha^{(m)}(xt)^m = \psi(xt)$, donc

$$\frac{d^k\psi x}{dx^k} = \frac{1}{x^k\Gamma(-k)}\int_0^1 \frac{\psi(xt)\,dt}{(1-t)^{1+k}}.$$

En posant $k=-n$, on en tire

$$\frac{d^{-n}\psi x}{dx^{-n}} = \frac{x^n}{\Gamma n}\int_0^1 \frac{\psi(xt)\,dt}{(1-t)^{1-n}}.$$

Or nous avons vu que

$$s = \frac{x^n}{\Gamma n\,.\,\Gamma(1-n)}\int_0^1 \frac{\psi(xt)\,dt}{(1-t)^{1-n}},$$

donc on a

$$s = \frac{1}{\Gamma(1-n)}\,\frac{d^{-n}\psi x}{dx^{-n}},$$

si

$$\psi a = \int_{x=0}^{x=a}\frac{ds}{(a-x)^n},$$

c. q. f. d.

En différentiant n fois de suite la valeur de s, on obtient

$$\frac{d^n s}{dx^n} = \frac{1}{\Gamma(1-n)}\,\psi x,$$

et par conséquent, en faisant $s=\varphi x$,

$$\frac{d^n\varphi a}{da^n} = \frac{1}{\Gamma(1-n)}\int_0^a \frac{\varphi' x\,.\,dx}{(a-x)^n}.$$

On doit remarquer que, dans ce qui précède, n doit toujours être moindre que l'unité.

Si l'on fait $n=\frac{1}{2}$, on a

$$\psi a = \int_{x=0}^{x=a}\frac{ds}{\sqrt{a-x}}$$

et

$$s = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d^{-\frac{1}{2}}\psi x}{dx^{-\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int^{\frac{1}{2}} \psi x \, . \, dx^{\frac{1}{2}}.$$

C'est là l'équation de la courbe cherchée, quand le temps est égal à ψa.

De cette équation on tire

$$\psi x = \sqrt{\pi} \frac{d^{\frac{1}{2}} s}{dx^{\frac{1}{2}}},$$

donc:

Si l'équation d'une courbe est $s = \varphi x$, le temps qu'un corps emploie pour en parcourir un arc, dont la hauteur est a, est égal à $\sqrt{\pi} \frac{d^{\frac{1}{2}}\varphi a}{da^{\frac{1}{2}}}$.

Je remarquerai enfin que de la même manière, qu'en partant de l'équation

$$\psi a = \int_{x=0}^{x=a} \frac{ds}{(a-x)^n}$$

j'ai trouvé s, de même en partant de l'équation

$$\psi a = \int \varphi(xa) fx \, . \, dx$$

j'ai trouvé la fonction φ, ψ et f étant des fonctions données, et l'intégrale étant prise entre des limites quelconques; mais la solution de ce problème est trop longue pour être donnée ici.

2.

Valeur de l'expression $\varphi(x + y\sqrt{-1}) + \varphi(x - y\sqrt{-1})$.

Lorsque φ est une fonction algébrique, logarithmique, exponentielle ou circulaire, on peut, comme on sait, toujours exprimer la valeur réelle de $\varphi(x + y\sqrt{-1}) + \varphi(x - y\sqrt{-1})$ sous forme réelle et finie. Si au contraire φ conserve sa généralité, on n'a pas que je sache, jusqu'à présent pu l'exprimer sous forme réelle et finie. On peut le faire à l'aide d'intégrales définies de la manière suivante.

Si l'on développe $\varphi(x + y\sqrt{-1})$ et $\varphi(x - y\sqrt{-1})$ d'après le théorème de *Taylor*, on obtient

$$\varphi(x + y\sqrt{-1}) = \varphi x + \varphi' x . y\sqrt{-1} - \frac{\varphi'' x}{1.2} y^2 - \frac{\varphi''' x}{1.2.3} y^3 \sqrt{-1} + \frac{\varphi'''' x}{1.2.3.4} y^4 + \cdots$$

$$\varphi(x - y\sqrt{-1}) = \varphi x - \varphi' x . y\sqrt{-1} - \frac{\varphi'' x}{1.2} y^2 + \frac{\varphi''' x}{1.2.3} y^3 \sqrt{-1} + \frac{\varphi'''' x}{1.2.3.4} y^4 - \cdots$$



donc

$$\varphi(x+y\sqrt{-1})+\varphi(x-y\sqrt{-1})=2\left(\varphi x-\frac{\varphi''x}{1.2}y^2+\frac{\varphi''''x}{1.2.3.4}y^4-\dots\right).$$

Pour trouver la somme de cette série, considérons la série

$$\varphi(x+t)=\varphi x+t\varphi'x+\frac{t^2}{1.2}\varphi''x+\frac{t^3}{1.2.3}\varphi'''x+\dots$$

En multipliant les deux membres de cette équation par $e^{-v^2t^2}dt$, et prenant ensuite l'intégrale depuis $t=-\infty$ jusqu'à $t=+\infty$, on aura

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x+t)e^{-v^2t^2}dt=\varphi x\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-v^2t^2}dt+\varphi'x\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-v^2t^2}tdt+\tfrac{1}{2}\varphi''x\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-v^2t^2}t^2dt+\dots$$

Or $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-v^2t^2}t^{2n+1}dt=0$, donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x+t)e^{-v^2t^2}dt=\varphi x\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-v^2t^2}dt+\frac{\varphi''x}{1.2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-v^2t^2}t^2dt+\frac{\varphi''''x}{1.2.3.4}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-v^2t^2}t^4dt+\dots$$

Considérons l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-v^2t^2}t^{2n}dt.$$

Soit $t=\frac{\alpha}{v}$, on a $e^{-v^2t^2}=e^{-\alpha^2}$, $t^{2n}=\frac{\alpha^{2n}}{v^{2n}}$, $dt=\frac{d\alpha}{v}$, donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-v^2t^2}t^{2n}dt=\frac{1}{v^{2n+1}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\alpha^2}\alpha^{2n}d\alpha=\frac{\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right)}{v^{2n+1}},$$

c'est-à-dire

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-v^2t^2}t^{2n}dt=\frac{1.3.5\dots(2n-1)\sqrt{\pi}}{2^nv^{2n+1}}=\frac{\sqrt{\pi}}{v^{2n+1}}A_n.$$

Cette valeur étant substituée ci-dessus, on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x+t)e^{-v^2t^2}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{v}\left(\varphi x+\frac{A_1}{2}\frac{\varphi''x}{v^2}+\frac{A_2}{2.3.4}\frac{\varphi''''x}{v^4}+\dots\right).$$

En multipliant par $e^{-v^2y^2}vdv$, et prenant l'intégrale depuis $v=-\infty$ jusqu'à $v=+\infty$, on obtiendra

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-v^2y^2}vdv\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x+t)e^{-v^2t^2}dt=\varphi x\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-v^2y^2}dv+\frac{A_1\varphi''x}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-v^2y^2}\frac{dv}{v^2}+\dots$$

Soit $vy=\beta$, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2y^2}v^{-2n}dv = y^{2n-1}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta^2}\beta^{-2n}d\beta.$$

Or $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta^2}\beta^{-2n}d\beta = \Gamma\left(\frac{1-2n}{2}\right) = \frac{(-1)^n 2^n\sqrt{\pi}}{1.3.5\ldots(2n-1)} = \frac{(-1)^n\sqrt{\pi}}{A_n}$, donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2y^2}v^{-2n}dv = \frac{(-1)^n\sqrt{\pi}\,y^{2n-1}}{A_n},$$

et par suite

$$A_n\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2y^2}v^{-2n}dv = (-1)^n y^{2n-1}.\sqrt{\pi}.$$

En substituant cette valeur, et divisant par $\frac{\sqrt{\pi}}{2y}$, on obtiendra

$$\frac{2y}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2y^2}vdv\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x+t)e^{-v^2t^2}dt = 2\left(\varphi x - \frac{\varphi''x}{2}y^2 + \frac{\varphi''''x}{2.3.4}y^4 - \ldots\right).$$

Le second membre de cette équation est égal à

$$\varphi(x+y\sqrt{-1}) + \varphi(x-y\sqrt{-1}),$$

donc

$$\varphi(x+y\sqrt{-1}) + \varphi(x-y\sqrt{-1}) = \frac{2y}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2y^2}vdv\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x+t)e^{-v^2t^2}dt.$$

Posant $x=0$, on a

$$\varphi(y\sqrt{-1}) + \varphi(-y\sqrt{-1}) = \frac{2y}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2y^2}vdv\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi t.e^{-v^2t^2}dt.$$

Soit par exemple $\varphi t = e^t$, on aura

$$\varphi(y\sqrt{-1}) + \varphi(-y\sqrt{-1}) = e^{y\sqrt{-1}} + e^{-y\sqrt{-1}} = 2\cos y,$$

donc

$$\cos y = \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2y^2}vdv\int_{-\infty}^{+\infty} e^{t-v^2t^2}dt;$$

or $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{t-v^2t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{v}e^{\frac{1}{4v^2}}$, donc

$$\cos y = \frac{y}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2y^2+\frac{1}{4v^2}}dv.$$

Si l'on fait $v=\frac{t}{y}$, on aura

$$\cos y = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2 + \frac{1}{4}\frac{y^2}{t^2}} dt.$$

En donnant d'autres valeurs à φt, on peut déduire la valeur d'autres intégrales définies, mais comme mon but était seulement de déterminer la valeur de $\varphi(x+y\sqrt{-1})+\varphi(x-y\sqrt{-1})$ je ne m'en occuperai pas.

3.

Nombres de Bernoulli exprimés par des intégrales définies, d'où l'on a ensuite déduit l'expression de l'intégrale finie $\Sigma \varphi x$.

Si l'on développe la fonction $1-\frac{u}{2}\cot\frac{u}{2}$ en série suivant les puissances entières de u, en posant

$$1-\frac{u}{2}\cot\frac{u}{2} = A_1\frac{u^2}{2} + A_2\frac{u^4}{2.3.4} + \dots + A_n\frac{u^{2n}}{2.3.4..2n} + \dots,$$

les coefficiens A_1, A_2, A_3 etc. sont, comme on sait, les nombres de *Bernoulli*.*)

On a**)

$$1-\frac{u}{2}\cot\frac{u}{2} = 2u^2\left(\frac{1}{4\pi^2-u^2} + \frac{1}{4.4\pi^2-u^2} + \frac{1}{9.4\pi^2-u^2} + \dots\right);$$

et en développant le second membre en série:

$$\begin{aligned} 1-\frac{u}{2}\cot\frac{u}{2} = & \frac{u^2}{2\pi^2}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots\right) \\ & + \frac{u^4}{2^3\pi^4}\left(1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\dots\right) \\ & + \frac{u^6}{2^5\pi^6}\left(1+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\dots\right) \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & + \frac{u^{2n}}{2^{2n-1}\pi^{2n}}\left(1+\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\dots\right) \\ & + \dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

En comparant ce développement au précédent, on aura

$$\frac{A_n}{1.2.3\dots 2n} = \frac{1}{2^{2n-1}\pi^{2n}}\left(1+\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\dots\right).$$

*) Voyez *Euleri* Institutiones calc. diff. p. 426.

**) Voyez *Euleri* Institutiones calc. diff. p. 423.

Considérons maintenant l'intégrale $\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{t^{2n-1}dt}{e^t - 1}$. On a

$$\frac{1}{e^t - 1} = e^{-t} + e^{-2t} + e^{-3t} + \ldots,$$

donc

$$\int \frac{t^{2n-1}dt}{e^t - 1} = \int e^{-t} t^{2n-1} dt + \int e^{-2t} t^{2n-1} dt + \ldots + \int e^{-kt} t^{2n-1} dt + \ldots$$

Or $\int_0^{\frac{1}{0}} e^{-kt} t^{2n-1} dt = \frac{\Gamma(2n)}{k^{2n}}$ *), donc

$$\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{t^{2n-1}dt}{e^t - 1} = \Gamma(2n)\left(1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \ldots\right);$$

mais d'après ce qui précède, on a

$$1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \ldots = \frac{2^{2n-1}\pi^{2n}}{1.2.3\ldots 2n} A_n = \frac{2^{2n-1}\pi^{2n}}{\Gamma(2n+1)} A_n,$$

donc

$$\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{t^{2n-1}dt}{e^t - 1} = \frac{\Gamma(2n)}{\Gamma(2n+1)} 2^{2n-1}\pi^{2n} A_n = \frac{2^{2n-1}\pi^{2n}}{2n} A_n,$$

et par conséquent

$$A_n = \frac{2n}{2^{2n-1}\pi^{2n}} \int_0^{\frac{1}{0}} \frac{t^{2n-1}dt}{e^t - 1}.$$

En mettant $t\pi$ au lieu de t, on obtiendra enfin

$$A_n = \frac{2n}{2^{2n-1}} \int_0^{\frac{1}{0}} \frac{t^{2n-1}dt}{e^{\pi t} - 1}.$$

Ainsi les nombres de *Bernoulli* peuvent être exprimés d'une manière très simple, par des intégrales définies.

D'un autre côté on voit aussi, lorsque n est un nombre entier, que l'expression $\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{t^{2n-1}dt}{e^{\pi t} - 1}$ est toujours rationnelle et égale à $\frac{2^{2n-1}}{2n} A_n$, ce qui est assez remarquable. Ainsi on aura par exemple en faisant $n = 1, 2, 3$ etc.

$$\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{t\,dt}{e^{\pi t} - 1} = \frac{1}{6},$$

$$\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{t^3 dt}{e^{\pi t} - 1} = \frac{1}{30} \cdot \frac{2^3}{4} = \frac{1}{15},$$

*) Cette expression se déduit de l'équation fondamentale $\Gamma a = \int_0^1 dx \left(\log \frac{1}{x}\right)^{a-1}$, en y faisant $a = 2n$ et $x = e^{-kt}$. *Legendre*, Exercices de calc. int. t. I, p. 277.

$$\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{t^5\,dt}{e^{\pi t}-1} = \frac{1}{42}\cdot\frac{2^5}{6} = \frac{8}{63} \text{ etc.}$$

Maintenant à l'aide de ce qui précède, on pourra très facilement exprimer la fonction $\Sigma\varphi x$ par une intégrale définie. On a

$$\Sigma\varphi x = \int\varphi x\,.\,dx - \tfrac{1}{2}\varphi x + A_1\frac{\varphi' x}{1\,.\,2} - A_2\frac{\varphi''' x}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} + \cdots$$

En substituant les valeurs de A_1, A_2, A_3 etc., on aura

$$\Sigma\varphi x = \int\varphi x\,.\,dx - \tfrac{1}{2}\varphi x + \frac{\varphi' x}{1\,.\,2}\int_0^{\frac{1}{0}}\frac{t\,dt}{e^{\pi t}-1} - \frac{\varphi''' x}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,2^3}\int_0^{\frac{1}{0}}\frac{t^3\,dt}{e^{\pi t}-1} + \cdots$$

c'est-à-dire

$$\Sigma\varphi x = \int\varphi x\,.\,dx - \tfrac{1}{2}\varphi x + \int_0^{\frac{1}{0}}\frac{dt}{e^{\pi t}-1}\left(\varphi' x\,.\,\frac{t}{2} - \frac{\varphi''' x}{1\,.\,2\,.\,3}\,\frac{t^3}{2^3} + \cdots\right).$$

Or

$$\varphi\left(x + \frac{t}{2}\sqrt{-1}\right) = \varphi x - \frac{\varphi'' x}{1\,.\,2}\,\frac{t^2}{2^2} + \frac{\varphi'''' x}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\,\frac{t^4}{2^4} - \cdots$$
$$+ \sqrt{-1}\left(\varphi' x\,.\,\frac{t}{2} - \frac{\varphi''' x}{1\,.\,2\,.\,3}\,\frac{t^3}{2^3} + \cdots\right),$$

$$\varphi\left(x - \frac{t}{2}\sqrt{-1}\right) = \varphi x - \frac{\varphi'' x}{1\,.\,2}\,\frac{t^2}{2^2} + \frac{\varphi'''' x}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\,\frac{t^4}{2^4} - \cdots$$
$$- \sqrt{-1}\left(\varphi' x\,.\,\frac{t}{2} - \frac{\varphi''' x}{1\,.\,2\,.\,3}\,\frac{t^3}{2^3} + \cdots\right).$$

On tire de là

$$\varphi' x\,.\,\frac{t}{2} - \frac{\varphi''' x}{1\,.\,2\,.\,3}\,\frac{t^3}{2^3} + \cdots = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\left[\varphi\left(x + \frac{t}{2}\sqrt{-1}\right) - \varphi\left(x - \frac{t}{2}\sqrt{-1}\right)\right].$$

Cette valeur étant substituée dans l'expression de $\Sigma\varphi x$, on obtient

$$\Sigma\varphi x = \int\varphi x\,.\,dx - \tfrac{1}{2}\varphi x + \int_0^{\frac{1}{0}}\frac{\varphi\left(x + \frac{t}{2}\sqrt{-1}\right) - \varphi\left(x - \frac{t}{2}\sqrt{-1}\right)}{2\sqrt{-1}}\,\frac{dt}{e^{\pi t}-1}.$$

Cette expression de l'intégrale finie d'une fonction quelconque me paraît très remarquable, et je ne crois pas qu'elle ait été trouvée auparavant.

De l'équation précédente on tire

$$\int_0^{\frac{1}{0}}\frac{\varphi\left(x + \frac{t}{2}\sqrt{-1}\right) - \varphi\left(x - \frac{t}{2}\sqrt{-1}\right)}{2\sqrt{-1}}\,\frac{dt}{e^{\pi t}-1} = \Sigma\varphi x - \int\varphi x\,.\,dx + \tfrac{1}{2}\varphi x.$$

On a ainsi l'expression d'une intégrale définie très générale. Je vais en faire voir l'application à quelques cas particuliers.

1. Soit $\varphi x = e^x$. Dans ce cas on a

$$\varphi\left(x+\frac{t}{2}\sqrt{-1}\right) = e^x e^{\frac{t}{2}\sqrt{-1}} = e^x\left(\cos\frac{t}{2}+\sqrt{-1}\sin\frac{t}{2}\right),$$

donc

$$\frac{\varphi\left(x+\frac{t}{2}\sqrt{-1}\right)-\varphi\left(x-\frac{t}{2}\sqrt{-1}\right)}{2\sqrt{-1}} = e^x\sin\frac{t}{2},$$

et par conséquent

$$\int_0^{\frac{1}{0}}\frac{\sin\frac{t}{2}\,dt}{e^{\pi t}-1} = e^{-x}\Sigma e^x - e^{-x}\int e^x dx + \tfrac{1}{2};$$

mais $\Sigma e^x = \frac{e^x}{e-1}$, et $\int e^x dx = e^x$, donc

$$\int_0^{\frac{1}{0}}\frac{\sin\frac{t}{2}\,dt}{e^{\pi t}-1} = \frac{1}{e-1} - \tfrac{1}{2}.$$

Si l'on fait $\varphi x = e^{mx}$, on obtiendra de la même manière

$$\int_0^{\frac{1}{0}}\frac{\sin\frac{mt}{2}\,dt}{e^{\pi t}-1} = \frac{1}{e^m-1} - \frac{1}{m} + \tfrac{1}{2}.$$

Si l'on met $2t$ à la place de t, on aura

$$\int_0^{\frac{1}{0}}\frac{\sin mt.dt}{e^{2\pi t}-1} = \frac{1}{4}\,\frac{e^m+1}{e^m-1} - \frac{1}{2m},$$

formule trouvée d'une autre manière par M. *Legendre*. (Exerc. de calc. int. t. II, p. 189.)

2. Soit $\varphi x = \frac{1}{x}$, on trouvera

$$\frac{\varphi\left(x+\frac{t}{2}\sqrt{-1}\right)-\varphi\left(x-\frac{t}{2}\sqrt{-1}\right)}{2\sqrt{-1}} = -\frac{t}{2(x^2+\frac{1}{4}t^2)},$$

et

$$\int\varphi x.dx = \int\frac{dx}{x} = \log x + C,$$

donc

$$\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{t\,dt}{(x^2+\frac{1}{4}t^2)(e^{\pi t}-1)} = 2\log x - \frac{1}{x} - 2\Sigma\frac{1}{x} + C.$$

On détermine C en posant $x=1$, ce qui donne

$$C = 3 + \int_0^{\frac{1}{0}} \frac{t\,dt}{(1+\frac{1}{4}t^2)(e^{\pi t}-1)}.$$

3. Soit $\varphi x = \sin ax$, on aura

$$\sin\left(ax+\frac{at}{2}\sqrt{-1}\right)-\sin\left(ax-\frac{at}{2}\sqrt{-1}\right) = 2\cos ax.\sin\frac{at}{2}\sqrt{-1} = \cos ax\,\frac{e^{-\frac{at}{2}}-e^{\frac{at}{2}}}{\sqrt{-1}},$$

$$\Sigma\sin ax = -\frac{\cos(ax-\frac{1}{2}a)}{2\sin\frac{1}{2}a}, \quad \int\sin ax.dx = -\frac{1}{a}\cos ax,$$

donc

$$\frac{\cos ax}{2}\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{e^{\frac{at}{2}}-e^{-\frac{at}{2}}}{e^{\pi t}-1}\,dt = -\frac{\cos(ax-\frac{1}{2}a)}{2\sin\frac{1}{2}a} + \frac{1}{a}\cos ax + \frac{1}{2}\sin ax,$$

et en écrivant $2a$ au lieu de a, et réduisant

$$\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{e^{at}-e^{-at}}{e^{\pi t}-1}\,dt = \frac{1}{a} - \operatorname{cotg} a.$$

En supposant d'autres formes pour la fonction φx on pourra de la même manière trouver la valeur d'autres intégrales définies.

4.

Sommation de la série infinie $S=\varphi(x+1)-\varphi(x+2)+\varphi(x+3)-\varphi(x+4)+\dots$ *à l'aide d'intégrales définies.*

On voit aisément que S pourra être exprimé comme il suit,

$$S = \frac{1}{2}\varphi x + A_1\varphi' x + A_2\varphi'' x + A_3\varphi''' x + \dots$$

Si l'on suppose $\varphi x = e^{ax}$ on obtient

$$S = \frac{1}{2}e^{ax} + e^{ax}(A_1 a + A_2 a^2 + A_3 a^3 + \dots).$$

Mais on a aussi

$$S = e^{ax+a} - e^{ax+2a} + e^{ax+3a} - \dots = \frac{e^{ax}e^a}{1+e^a},$$

donc

$$\frac{e^a}{1+e^a} - \frac{1}{2} = A_1 a + A_2 a^2 + A_3 a^3 + \ldots$$

En faisant $a = c\sqrt{-1}$, on trouve

$$\frac{e^{c\sqrt{-1}}}{1+e^{c\sqrt{-1}}} - \frac{1}{2} = \sqrt{-1}\,(A_1 c - A_3 c^3 + A_5 c^5 - \ldots) + P,$$

où P désigne la somme de tous les termes réels. Mais

$$\frac{e^{c\sqrt{-1}}}{1+e^{c\sqrt{-1}}} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\,\frac{e^{\frac{c}{2}\sqrt{-1}} - e^{-\frac{c}{2}\sqrt{-1}}}{e^{\frac{c}{2}\sqrt{-1}} + e^{-\frac{c}{2}\sqrt{-1}}} = \frac{1}{2}\sqrt{-1}\ \text{tang}\ \frac{1}{2}c,$$

donc

$$\frac{1}{2}\ \text{tang}\ \frac{1}{2}c = A_1 c - A_3 c^3 + A_5 c^5 - \ldots$$

Or on a (*Legendre* Exerc. de calc. int. t. II, p. 186)

$$\frac{1}{2}\ \text{tang}\ \frac{1}{2}c = \int_0^{\frac{1}{0}} \frac{e^{ct} - e^{-ct}}{e^{\pi t} - e^{-\pi t}}\, dt,$$

donc, puisque

$$e^{ct} - e^{-ct} = 2\left\{ct + \frac{c^3}{2.3}t^3 + \frac{c^5}{2.3.4.5}t^5 + \ldots\right\},$$

on obtient

$$\frac{1}{2}\ \text{tang}\ \frac{1}{2}c = A_1 c - A_3 c^3 + A_5 c^5 - \ldots$$

$$= 2c\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{t\,dt}{e^{\pi t} - e^{-\pi t}} + 2\frac{c^3}{2.3}\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{t^3 dt}{e^{\pi t} - e^{-\pi t}} + 2\frac{c^5}{2.3.4.5}\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{t^5 dt}{e^{\pi t} - e^{-\pi t}} + \ldots$$

On en conclut,

$$A_1 = 2\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{t\,dt}{e^{\pi t} - e^{-\pi t}},$$

$$A_3 = -\frac{2}{2.3}\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{t^3 dt}{e^{\pi t} - e^{-\pi t}},$$

$$A_5 = \frac{2}{2.3.4.5}\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{t^5 dt}{e^{\pi t} - e^{-\pi t}},$$

etc.

En substituant ces valeurs dans l'expression pour S, on trouve

$$S = \frac{1}{2}\varphi x + 2\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{dt}{e^{\pi t} - e^{-\pi t}}\left\{t\varphi' x - \frac{t^3}{2.3}\varphi''' x + \frac{t^5}{2.3.4.5}\varphi^{(V)} x - \ldots\right\};$$

mais on a

$$t\varphi'x - \frac{t^3}{2.3}\varphi'''x + \frac{t^5}{2.3.4.5}\varphi^{(V)}x - \ldots = \frac{\varphi(x+t\sqrt{-1}) - \varphi(x-t\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}},$$

donc

$$\varphi(x+1) - \varphi(x+2) + \varphi(x+3) - \varphi(x+4) + \ldots$$
$$= \tfrac{1}{2}\varphi x + 2\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{dt}{e^{\pi t} - e^{-\pi t}} \cdot \frac{\varphi(x+t\sqrt{-1}) - \varphi(x-t\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}.$$

Si l'on pose $x = 0$, on obtient

$$\varphi(1) - \varphi(2) + \varphi(3) - \varphi(4) + \ldots \text{ in inf.}$$
$$= \tfrac{1}{2}\varphi(0) + 2\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{dt}{e^{\pi t} - e^{-\pi t}} \cdot \frac{\varphi(t\sqrt{-1}) - \varphi(-t\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}.$$

Supposons par exemple $\varphi x = \dfrac{1}{x+1}$, on a

$$\frac{\varphi(t\sqrt{-1}) - \varphi(-t\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}} = -\frac{t}{1+t^2},$$

donc

$$\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{5} + \ldots = \tfrac{1}{2} - 2\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{t\,dt}{(1+t^2)(e^{\pi t} - e^{-\pi t})};$$

or on a

$$\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{5} + \ldots = 1 - \log 2,$$

par conséquent

$$\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{t\,dt}{(1+t^2)(e^{\pi t} - e^{-\pi t})} = \tfrac{1}{2}\log 2 - \tfrac{1}{4}.$$

III.

MÉMOIRE SUR LES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES, OÙ L'ON DÉMONTRE L'IMPOSSIBILITÉ DE LA RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION GÉNÉRALE DU CINQUIÈME DEGRÉ.

Brochure imprimée chez Grøndahl, Christiania 1824.

Les géomètres se sont beaucoup occupés de la résolution générale des équations algébriques, et plusieurs d'entre eux ont cherché à en prouver l'impossibilité; mais si je ne me trompe pas, on n'y a pas réussi jusqu'à présent. J'ose donc espérer que les géomètres recevront avec bienveillance ce mémoire qui a pour but de remplir cette lacune dans la théorie des équations algébriques.

Soit

$$y^5 - ay^4 + by^3 - cy^2 + dy - e = 0$$

l'équation générale du cinquième degré, et supposons qu'elle soit résoluble algébriquement, c'est-à-dire qu'on puisse exprimer y par une fonction des quantités a, b, c, d et e, formée par des radicaux. Il est clair qu'on peut dans ce cas mettre y sous la forme:

$$y = p + p_1 R^{\frac{1}{m}} + p_2 R^{\frac{2}{m}} + \ldots + p_{m-1} R^{\frac{m-1}{m}},$$

m étant un nombre premier et R, p, p_1, p_2 etc. des fonctions de la même forme que y, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on parvienne à des fonctions rationnelles des quantités a, b, c, d et e. On peut aussi supposer qu'il soit impossible d'exprimer $R^{\frac{1}{m}}$ par une fonction rationnelle des quantités a, b etc. p, p_1, p_2 etc., et en mettant $\frac{R}{p_1^m}$ au lieu de R il est clair qu'on peut faire $p_1 = 1$. On aura donc,

$$y = p + R^{\frac{1}{m}} + p_2 R^{\frac{2}{m}} + \ldots + p_{m-1} R^{\frac{m-1}{m}}.$$

En substituant cette valeur de y dans l'équation proposée, on obtiendra en réduisant un résultat de cette forme,

$$P = q + q_1 R^{\frac{1}{m}} + q_2 R^{\frac{2}{m}} + \ldots + q_{m-1} R^{\frac{m-1}{m}} = 0,$$

q, q_1, q_2 etc. étant des fonctions rationnelles et entières des quantités a, b, c, d, e, p, p_2 etc. et R. Pour que cette équation puisse avoir lieu il faut que $q = 0$, $q_1 = 0$, $q_2 = 0$ etc. $q_{m-1} = 0$. En effet, en désignant $R^{\frac{1}{m}}$ par z, on aura les deux équations

$$z^m - R = 0 \quad \text{et} \quad q + q_1 z + \ldots + q_{m-1} z^{m-1} = 0.$$

Si maintenant les quantités q, q_1 etc. ne sont pas égales à zéro, ces équations ont nécessairement une ou plusieurs racines communes. Soit k le nombre de ces racines, on sait qu'on peut trouver une équation du degré k qui a pour racines les k racines mentionnées, et dans laquelle tous les coefficiens sont des fonctions rationnelles de R, q, q_1 et q_{m-1}. Soit

$$r + r_1 z + r_2 z^2 + \ldots + r_k z^k = 0$$

cette équation. Elle a ces racines communes avec l'équation $z^m - R = 0$; or toutes les racines de cette équation sont de la forme $\alpha_\mu z$, α_μ désignant une des racines de l'équation $\alpha_\mu^m - 1 = 0$. On aura donc en substituant les équations suivantes,

$$\begin{aligned} r + r_1 z + r_2 z^2 + \ldots + r_k z^k &= 0, \\ r + \alpha r_1 z + \alpha^2 r_2 z^2 + \ldots + \alpha^k r_k z^k &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ r + \alpha_{k-2} r_1 z + \alpha_{k-2}^2 r_2 z^2 + \ldots + \alpha_{k-2}^k r_k z^k &= 0. \end{aligned}$$

De ces k équations, on peut toujours tirer la valeur de z exprimée par une fonction rationnelle des quantités r, r_1, r_2 etc. r_k, et comme ces quantités sont elles-mêmes des fonctions rationnelles de a, b, c, d, e, $R \ldots p$, p_2 etc., il s'en suit que z est aussi une fonction rationnelle de ces dernières quantités; mais cela est contre l'hypothèse. Il faut donc que

$$q = 0, \; q_1 = 0 \; \text{etc.} \; q_{m-1} = 0.$$

Si maintenant ces équations ont lieu, il est clair que l'équation proposée est satisfaite par toutes les valeurs qu'on obtiendra pour y, en donnant à $R^{\frac{1}{m}}$ toutes les valeurs

$$R^{\frac{1}{m}}, \; \alpha R^{\frac{1}{m}}, \; \alpha^2 R^{\frac{1}{m}}, \; \alpha^3 R^{\frac{1}{m}}, \; \text{etc.} \; \alpha^{m-1} R^{\frac{1}{m}},$$

α étant une racine de l'équation

$$\alpha^{m-1} + \alpha^{m-2} + \ldots + \alpha + 1 = 0.$$

On voit aussi que toutes ces valeurs de y sont différentes; car dans le cas contraire on aurait une équation de la même forme que l'équation $P = 0$, et une telle équation conduit comme on vient de le voir à un résultat qui ne peut avoir lieu. Le nombre m ne peut donc dépasser 5. En désignant donc par y_1, y_2, y_3, y_4 et y_5 les racines de l'équation proposée, on aura

$$y_1 = p + R^{\frac{1}{m}} + p_2 R^{\frac{2}{m}} + \ldots + p_{m-1} R^{\frac{m-1}{m}},$$

$$y_2 = p + \alpha R^{\frac{1}{m}} + \alpha^2 p_2 R^{\frac{2}{m}} + \ldots + \alpha^{m-1} p_{m-1} R^{\frac{m-1}{m}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y_m = p + \alpha^{m-1} R^{\frac{1}{m}} + \alpha^{m-2} p_2 R^{\frac{2}{m}} + \ldots + \alpha p_{m-1} R^{\frac{m-1}{m}}.$$

De ces équations on tirera sans peine

$$p = \frac{1}{m}(y_1 + y_2 + \ldots + y_m),$$

$$R^{\frac{1}{m}} = \frac{1}{m}(y_1 + \alpha^{m-1} y_2 + \ldots + \alpha y_m),$$

$$p_2 R^{\frac{2}{m}} = \frac{1}{m}(y_1 + \alpha^{m-2} y_2 + \ldots + \alpha^2 y_m),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$p_{m-1} R^{\frac{m-1}{m}} = \frac{1}{m}(y_1 + \alpha y_2 + \ldots + \alpha^{m-1} y_m).$$

On voit par là que p, p_2 etc. p_{m-1}, R et $R^{\frac{1}{m}}$ sont des fonctions rationnelles des racines de l'équation proposée.

Considérons maintenant l'une quelconque de ces quantités, par exemple R. Soit

$$R = S + v^{\frac{1}{n}} + S_2 v^{\frac{2}{n}} + \ldots + S_{n-1} v^{\frac{n-1}{n}}.$$

En traitant cette quantité de la même manière que y, on obtiendra un résultat pareil savoir que les quantités $v^{\frac{1}{n}}$, v, S, S_2 etc. sont des fonctions rationnelles des différentes valeurs de la fonction R; et comme celles-ci sont des fonctions rationnelles de y_1, y_2 etc., les fonctions $v^{\frac{1}{n}}$, v, S, S_2 etc. le sont de même. En poursuivant ce raisonnement on conclura que toutes

les fonctions irrationnelles contenues dans l'expression de y sont des fonctions rationnelles des racines de l'équation proposée.

Cela posé, il n'est pas difficile d'achever la démonstration. Considérons d'abord les fonctions irrationnelles de la forme $R^{\frac{1}{m}}$, R étant une fonction rationnelle de a, b, c, d et e. Soit $R^{\frac{1}{m}} = r$, r est une fonction rationnelle y_1, y_2, y_3, y_4 et y_5, et R une fonction symétrique de ces quantités. Maintenant comme il s'agit de la résolution de l'équation générale du cinquième degré, il est clair qu'on peut considérer y_1, y_2, y_3, y_4 et y_5 comme des variables indépendantes; l'équation $R^{\frac{1}{m}} = r$ doit donc avoir lieu dans cette supposition. Par conséquent on peut échanger les quantités y_1, y_2, y_3, y_4 et y_5 entre elles dans l'équation $R^{\frac{1}{m}} = r$; or par ce changement $R^{\frac{1}{m}}$ obtient nécessairement m valeurs différentes en remarquant que R est une fonction symétrique. La fonction r doit donc avoir la propriété qu'elle obtient m valeurs différentes en permutant de toutes les manières possibles les cinq variables qu'elle contient. Or pour cela il faut que $m = 5$ ou $m = 2$ en remarquant que m est un nombre premier. (Voyez un mémoire de M. *Cauchy* inséré dans le Journal de l'école polytechnique, XVIIe Cahier). Soit d'abord $m = 5$. La fonction r a donc cinq valeurs différentes, et peut par conséquent être mise sous la forme

$$R^{\frac{1}{5}} = r = p + p_1 y_1 + p_2 y_1^2 + p_3 y_1^3 + p_4 y_1^4;$$

p, p_1, p_2... étant des fonctions symétriques de y_1, y_2 etc. Cette équation donne en changeant y_1 en y_2

$$p + p_1 y_1 + p_2 y_1^2 + p_3 y_1^3 + p_4 y_1^4 = \alpha p + \alpha p_1 y_2 + \alpha p_2 y_2^2 + \alpha p_3 y_2^3 + \alpha p_4 y_2^4$$

où

$$\alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1 = 0;$$

mais cette équation ne peut avoir lieu; le nombre m doit par conséquent être égal à deux. Soit donc

$$R^{\frac{1}{2}} = r,$$

r doit avoir deux valeurs différentes et de signe contraire; on aura donc (voyez le mémoire de M. *Cauchy*)

$$R^{\frac{1}{2}} = r = v(y_1 - y_2)\ (y_1 - y_3) \ldots (y_2 - y_3) \ldots (y_4 - y_5) = v S^{\frac{1}{2}},$$

v étant une fonction symétrique.



Considérons maintenant les fonctions irrationnelles de la forme

$$\left(p+p_1 R^{\frac{1}{\nu}}+p_2 R_1^{\frac{1}{\mu}}+\dots\right)^{\frac{1}{m}},$$

p, p_1, p_2 etc., R, R_1 etc. étant des fonctions rationnelles de a, b, c, d et e et par conséquent des fonctions symétriques de y_1, y_2, y_3, y_4 et y_5. Comme on l'a vu, on doit avoir $\nu=\mu=$ etc. $=2$, $R=v^2 S$, $R_1=v_1^2 S$ etc. La fonction précédente peut donc être mise sous la forme

$$\left(p+p_1 S^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{m}}.$$

Soit

$$r=\left(p+p_1 S^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{m}},$$

$$r_1=\left(p-p_1 S^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{m}},$$

on aura en multipliant,

$$rr_1=\left(p^2-p_1^2 S\right)^{\frac{1}{m}}.$$

Si maintenant rr_1 n'est pas une fonction symétrique, le nombre m doit être égal à deux; mais dans ce cas r aura quatre valeurs différentes, ce qui est impossible; il faut donc que rr_1 soit une fonction symétrique. Soit v cette fonction, on aura

$$r+r_1=\left(p+p_1 S^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{m}}+v\left(p+p_1 S^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{m}}=z.$$

Cette fonction a m valeurs différentes, il faut donc que $m=5$, en remarquant que m est un nombre premier. On aura par conséquent

$$z=q+q_1 y+q_2 y^2+q_3 y^3+q_4 y^4=\left(p+p_1 S^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{5}}+v\left(p+p_1 S^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{5}},$$

q, q_1, q_2 etc. étant des fonctions symétriques de y_1, y_2, y_3 etc. et par conséquent des fonctions rationnelles de a, b, c, d et e. En combinant cette équation avec l'équation proposée, on en tirera la valeur de y exprimée par une fonction rationnelle de z, a, b, c, d et e. Or une telle fonction est toujours réductible à la forme

$$y=P+R^{\frac{1}{5}}+P_2 R^{\frac{2}{5}}+P_3 R^{\frac{3}{5}}+P_4 R^{\frac{4}{5}},$$

où P, R, P_2, P_3 et P_4 sont des fonctions de la forme $p+p_1 S^{\frac{1}{2}}$, p, p_1, et S étant des fonctions rationnelles de a, b, c, d et e. De cette valeur de y on tire

$$R^{\frac{1}{5}} = \tfrac{1}{5}\,(y_1 + \alpha^4 y_2 + \alpha^3 y_3 + \alpha^2 y_4 + \alpha\, y_5) = \left(p + p_1 S^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{5}}$$

où

$$\alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1 = 0.$$

Or le premier membre a 120 valeurs différentes et le second membre seulement 10; par conséquent y ne peut avoir la forme que nous venons de trouver; mais nous avons démontré que y doit nécessairement avoir cette forme, si l'équation proposée est résoluble; nous concluons donc

qu'il est impossible de résoudre par des radicaux l'équation générale du cinquième degré.

Il suit immédiatement de ce théorème qu'il est de même impossible de résoudre par des radicaux les équations générales des degrés supérieurs au cinquième.

IV.

L'INTÉGRALE FINIE $\Sigma^n \varphi x$ EXPRIMÉE PAR UNE INTÉGRALE DÉFINIE SIMPLE.

Magazin for Naturvidenskaberne, Aargang III, Bind 2, Christiania 1825.

On peut comme on sait, au moyen du théorème de *Parseval* exprimer l'intégrale finie $\Sigma^n \varphi x$ par une intégrale définie double, mais si je ne me trompe, on n'a pas exprimé la même intégrale par une intégrale définie simple. C'est ce qui est l'objet de ce mémoire.

En désignant par φx une fonction quelconque de x, il est aisé de voir qu'on peut toujours supposer

(1) $$\varphi x = \int e^{vx} fv \,.\, dv,$$

l'intégrale étant prise entre deux limites quelconques de v, indépendantes de x. La fonction fv désigne une fonction de v, dont la forme dépend de celle de φx. En supposant $\Delta x = 1$, on aura en prenant l'intégrale finie des deux membres de l'équation (1)

(2) $$\Sigma \varphi x = \int e^{vx} \frac{fv}{e^v - 1} dv,$$

où il faut ajouter une constante arbitraire. En prenant une seconde fois l'intégrale finie, on obtiendra

$$\Sigma^2 \varphi x = \int e^{vx} \frac{fv}{(e^v - 1)^2} dv.$$

En général on trouvera

(3) $$\Sigma^n \varphi x = \int e^{vx} \frac{fv}{(e^v - 1)^n} dv.$$

Pour compléter cette intégrale il faut ajouter au second membre une fonction de la forme

$$C + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots + C_{n-1} x^{n-1},$$

C, C_1, C_2 etc. étant des constantes arbitraires.

Il s'agit maintenant de trouver la valeur de l'intégrale définie $\int e^{vx} \frac{fv}{(e^v - 1)^n} dv$. Pour cela je me sers d'un théorème dû à M. *Legendre* (Exerc. de calc. int. t. II, p. 189), savoir que

$$\frac{1}{4} \frac{e^v + 1}{e^v - 1} - \frac{1}{2v} = \int_0^{\frac{1}{0}} \frac{dt \,.\, \sin vt}{e^{2\pi t} - 1}.$$

On tire de cette équation

$$(4) \qquad \frac{1}{e^v - 1} = \frac{1}{v} - \frac{1}{2} + 2 \int_0^{\frac{1}{0}} \frac{dt \,.\, \sin vt}{e^{2\pi t} - 1}.$$

En substituant cette valeur de $\frac{1}{e^v - 1}$ dans l'équation (2), on aura

$$\Sigma \varphi x = \int e^{vx} \frac{fv}{v} dv - \frac{1}{2} \int e^{vx} fv \,.\, dv + 2 \int_0^{\frac{1}{0}} \frac{dt}{e^{2\pi t} - 1} \int e^{vx} fv \,.\, \sin vt \,.\, dv.$$

L'intégrale $\int e^{vx} fv \,.\, \sin vt \,.\, dv$ se trouve de la manière suivante. En remplaçant dans l'équation (1) x successivement par $x + t\sqrt{-1}$ et $x - t\sqrt{-1}$, on obtiendra

$$\varphi(x + t\sqrt{-1}) = \int e^{vx} e^{vt\sqrt{-1}} fv \,.\, dv,$$
$$\varphi(x - t\sqrt{-1}) = \int e^{vx} e^{-vt\sqrt{-1}} fv \,.\, dv,$$

d'où l'on tire, en retranchant et divisant par $2\sqrt{-1}$,

$$\int e^{vx} \sin vt \,.\, fv \,.\, dv = \frac{\varphi(x + t\sqrt{-1}) - \varphi(x - t\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}.$$

Ainsi l'expression de $\Sigma \varphi x$ devient

$$\Sigma \varphi x = \int \varphi x \,.\, dx - \frac{1}{2} \varphi x + 2 \int_0^{\frac{1}{0}} \frac{dt}{e^{2\pi t} - 1} \frac{\varphi(x + t\sqrt{-1}) - \varphi(x - t\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}.$$

Maintenant pour trouver la valeur de l'intégrale générale

$$\Sigma^n \varphi x = \int e^{vx} fv \frac{dv}{(e^v - 1)^n},$$

posons

$$\frac{1}{(e^v - 1)^n} = (-1)^{n-1} \left(A_{0,n} p + A_{1,n} \frac{dp}{dv} + A_{2,n} \frac{d^2 p}{dv^2} + \ldots + A_{n-1,n} \frac{d^{n-1} p}{dv^{n-1}} \right)$$

où p est égal à $\frac{1}{e^v-1}$, $A_{0,n}$, $A_{1,n}\dots$ étant des coefficiens numériques qui doivent être déterminés. Si l'on différentie l'équation précédente, on a

$$\frac{ne^v}{(e^v-1)^{n+1}}=(-1)^n\left(A_{0,n}\frac{dp}{dv}+A_{1,n}\frac{d^2p}{dv^2}+\dots+A_{n-1,n}\frac{d^np}{dv^n}\right).$$

Or

$$\frac{ne^v}{(e^v-1)^{n+1}}=\frac{n}{(e^v-1)^n}+\frac{n}{(e^v-1)^{n+1}},$$

donc

$$\frac{ne^v}{(e^v-1)^{n+1}}=n(-1)^{n-1}\left(A_{0,n}p+A_{1,n}\frac{dp}{dv}+\dots+A_{n-1,n}\frac{d^{n-1}p}{dv^{n-1}}\right)$$
$$+n(-1)^n\left(A_{0,n+1}p+A_{1,n+1}\frac{dp}{dv}+\dots+A_{n,n+1}\frac{d^np}{dv^n}\right).$$

En comparant ces deux expressions de $\frac{ne^v}{(e^v-1)^{n+1}}$, on en déduit les équations suivantes:

$$A_{0,n+1}-A_{0,n}=0 \quad \text{ɔ:} \quad \Delta A_{0,n}=0,$$
$$A_{1,n+1}-A_{1,n}=\frac{1}{n}A_{0,n} \quad \text{ɔ:} \quad \Delta A_{1,n}=\frac{1}{n}A_{0,n},$$
$$A_{2,n+1}-A_{2,n}=\frac{1}{n}A_{1,n} \quad \text{ɔ:} \quad \Delta A_{2,n}=\frac{1}{n}A_{1,n},$$
$$\dots\dots\dots\dots \qquad \dots\dots\dots$$
$$A_{n-1,n+1}-A_{n-1,n}=\frac{1}{n}A_{n-2,n} \quad \text{ɔ:} \quad \Delta A_{n-1,n}=\frac{1}{n}A_{n-2,n},$$
$$A_{n,n+1}=\frac{1}{n}A_{n-1,n},$$

d'où l'on tire

$$A_{0,n}=1,\ A_{1,n}=\Sigma\frac{1}{n},\ A_{2,n}=\Sigma\left(\frac{1}{n}\Sigma\frac{1}{n}\right),\ A_{3,n}=\Sigma\left[\frac{1}{n}\Sigma\left(\frac{1}{n}\Sigma\frac{1}{n}\right)\right] \text{ etc.}$$
$$A_{n,n+1}=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{n-2}\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1}\cdot A_{0,1}=\frac{1}{\Gamma(n+1)}.$$

Cette dernière équation servira à déterminer les constantes qui rentrent dans les expressions de $A_{1,n}$, $A_{2,n}$, $A_{3,n}$ etc.

Ayant ainsi déterminé les coefficiens $A_{0,n}$, $A_{1,n}$, $A_{2,n}$ etc., on aura, en substituant dans l'équation (3) au lieu de $\frac{1}{(e^v-1)^n}$ sa valeur,

$$\Sigma^n\varphi x=(-1)^{n-1}\int e^{vx}fv\,.\,dv\left(A_{0,n}p+A_{1,n}\frac{dp}{dv}+\dots+A_{n-1,n}\frac{d^{n-1}p}{dv^{n-1}}\right);$$

maintenant on a

$$p=\frac{1}{v}-\frac{1}{2}+2\int_0^{\frac{1}{0}}\frac{dt.\sin vt}{e^{2\pi t}-1},$$

d'où l'on tire en différentiant

$$\frac{dp}{dv}=-\frac{1}{v^2}+2\int_0^{\frac{1}{0}}\frac{t\,dt.\cos vt}{e^{2\pi t}-1},$$

$$\frac{d^2p}{dv^2}=\quad\frac{2}{v^3}-2\int_0^{\frac{1}{0}}\frac{t^2dt.\sin vt}{e^{2\pi t}-1},$$

$$\frac{d^3p}{dv^3}=-\frac{2.3}{v^4}-2\int_0^{\frac{1}{0}}\frac{t^3dt.\cos vt}{e^{2\pi t}-1}\quad\text{etc.};$$

donc en substituant

$$\Sigma^n\varphi x=\int\Big(A_{n-1,n}\frac{\Gamma n}{v^n}-A_{n-2,n}\frac{\Gamma(n-1)}{v^{n-1}}+\ldots+(-1)^{n-1}A_{0,n}\frac{1}{v}+(-1)^n.\tfrac{1}{2}\Big)e^{vx}fv.dv$$
$$+2(-1)^{n-1}\iint_0^{\frac{1}{0}}\frac{P\sin vt.dt}{e^{2\pi t}-1}e^{vx}fv.dv+2(-1)^{n-1}\iint_0^{\frac{1}{0}}\frac{Q\cos vt.dt}{e^{2\pi t}-1}e^{vx}fv.dv.$$

De l'équation $\varphi x=\int e^{vx}fv.dv$ on tire en intégrant:

$$\int\varphi x.dx=\int e^{vx}fv\frac{dv}{v},$$

$$\int^2\varphi x.dx^2=\int e^{vx}fv\frac{dv}{v^2},$$

$$\int^3\varphi x.dx^3=\int e^{vx}fv\frac{dv}{v^3}\quad\text{etc.};$$

de plus on a

$$\int\sin vt.e^{vx}fv.dv=\frac{\varphi(x+t\sqrt{-1})-\varphi(x-t\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}},$$

$$\int\cos vt.e^{vx}fv.dv=\frac{\varphi(x+t\sqrt{-1})+\varphi(x-t\sqrt{-1})}{2},$$

donc on aura en substituant

$$\Sigma^n\varphi x=A_{n-1,n}\Gamma n\int^n\varphi x.dx^n-A_{n-2,n}\Gamma(n-1)\int^{n-1}\varphi x.dx^{n-1}+\ldots+(-1)^{n-1}\int\varphi x.dx$$
$$+(-1)^n.\tfrac{1}{2}\varphi x+2(-1)^{n-1}\int_0^{\frac{1}{0}}\frac{P\,dt}{e^{2\pi t}-1}\,\frac{\varphi(x+t\sqrt{-1})-\varphi(x-t\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}$$
$$+2(-1)^{n-1}\int_0^{\frac{1}{0}}\frac{Q\,dt}{e^{2\pi t}-1}\,\frac{\varphi(x+t\sqrt{-1})+\varphi(x-t\sqrt{-1})}{2}$$

où

$$P=A_{0,n}-A_{2,n}t^2+A_{4,n}t^4-\ldots,$$
$$Q=A_{1,n}t-A_{3,n}t^3+A_{5,n}t^5-\ldots.$$

En faisant p. ex. $n=2$, on aura

$$\Sigma^2 \varphi x = \iint \varphi x . dx^2 - \int \varphi x . dx + \tfrac{1}{2}\varphi x - 2\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{dt}{e^{2\pi t}-1} \frac{\varphi(x+t\sqrt{-1}) - \varphi(x-t\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}$$
$$- 2\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{t\,dt}{e^{2\pi t}-1} \frac{\varphi(x+t\sqrt{-1}) + \varphi(x-t\sqrt{-1})}{2}.$$

Soit p. ex. $\varphi x = e^{ax}$, on aura

$$\varphi(x \pm t\sqrt{-1}) = e^{ax} e^{\pm at\sqrt{-1}}, \int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a} e^{ax}, \iint e^{ax}\,dx^2 = \frac{1}{a^2} e^{ax},$$

donc, en substituant et divisant par e^{ax},

$$\frac{1}{(e^a-1)^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} - 2\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{dt . \sin at}{e^{2\pi t}-1} - 2\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{t\,dt . \cos at}{e^{2\pi t}-1}.$$

Le cas le plus remarquable est celui où $n=1$. On a alors, comme on l'a vu précédemment:

$$\Sigma \varphi x = C + \int \varphi x . dx - \tfrac{1}{2}\varphi x + 2\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{dt}{e^{2\pi t}-1} \frac{\varphi(x+t\sqrt{-1}) - \varphi(x-t\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}.$$

En supposant que les deux intégrales $\Sigma\varphi x$ et $\int \varphi x\,dx$ s'annulent pour $x=a$, il est clair qu'on aura:

$$C = \tfrac{1}{2}\varphi a - 2\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{dt}{e^{2\pi t}-1} \frac{\varphi(a+t\sqrt{-1}) - \varphi(a-t\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}};$$

donc

$$\Sigma \varphi x = \int \varphi x . dx - \tfrac{1}{2}(\varphi x - \varphi a) + 2\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{dt}{e^{2\pi t}-1} \frac{\varphi(x+t\sqrt{-1}) - \varphi(x-t\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}$$
$$- 2\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{dt}{e^{2\pi t}-1} \frac{\varphi(a+t\sqrt{-1}) - \varphi(a-t\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}.$$

Si l'on fait $x=\infty$, en supposant que φx et $\int \varphi x . dx$ s'annulent pour cette valeur de x, on aura:

$$\varphi a + \varphi(a+1) + \varphi(a+2) + \varphi(a+3) + \dots \text{ in inf.}$$
$$= \int_a^{\frac{1}{0}} \varphi x . dx + \tfrac{1}{2}\varphi a - 2\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{dt}{e^{2\pi t}-1} \frac{\varphi(a+t\sqrt{-1}) - \varphi(a-t\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}.$$

Soit p. ex. $\varphi x = \frac{1}{x^2}$, on aura

$$\frac{\varphi(a+t\sqrt{-1})-\varphi(a-t\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}} = \frac{-2at}{(a^2+t^2)^2},$$

donc

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{(a+1)^2}+\frac{1}{(a+2)^2}+\ldots=\frac{1}{2a^2}+\frac{1}{a}+4a\int_0^{\frac{1}{0}}\frac{t\,dt}{(e^{2\pi t}-1)(a^2+t^2)^2},$$

et en faisant $a=1$

$$1+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{9}+\tfrac{1}{16}+\tfrac{1}{25}+\ldots=\frac{\pi^2}{6}=\tfrac{3}{2}+4\int_0^{\frac{1}{0}}\frac{t\,dt}{(e^{2\pi t}-1)(1+t^2)^2}.$$

V.

PETITE CONTRIBUTION A LA THÉORIE DE QUELQUES FONCTIONS TRANSCENDANTES.

Présenté à la société royale des sciences à Throndhjem le 22 mars 1826. Imprimé dans Det kongelige norske Videnskabers Selskabs Skrifter t. 2. Throndhjem 1824—1827.

1.

Considérons l'intégrale

$$p = \int \frac{q\,dx}{x-a},$$

q étant une fonction de x qui ne contient pas a. En différentiant p par rapport à a on trouve

$$\frac{dp}{da} = \int \frac{q\,dx}{(x-a)^2}.$$

Si maintenant q est choisi tel que $\int \frac{q\,dx}{(x-a)^2}$ puisse être exprimé par l'intégrale $\int \frac{q\,dx}{x-a}$, on trouvera une équation différentielle linéaire entre p et a d'où l'on pourra tirer p en fonction de a. On obtiendra ainsi une relation entre plusieurs intégrales prises les unes par rapport à x, les autres par rapport à a. Comme on est conduit par ce procédé à plusieurs théorèmes intéressants, je vais les développer pour un cas très étendu où la réduction mentionnée de l'intégrale $\int \frac{q\,dx}{(x-a)^2}$ est possible, savoir le cas où l'on a $q = \varphi x \,.\, e^{fx}$, fx étant une fonction algébrique rationnelle de x, et φx étant déterminé par l'équation

$$\varphi x = k(x+\alpha)^{\beta}(x+\alpha')^{\beta'}(x+\alpha'')^{\beta''}\dots(x+\alpha^{(n)})^{\beta^{(n)}}$$

où $\alpha, \alpha', \alpha'' \ldots$ sont des constantes, $\beta, \beta', \beta'' \ldots$ des nombres rationnels quelconques. Dans ce cas on a

$$p = \int \frac{e^{fx} \varphi x \, . \, dx}{x - a},$$

$$\frac{dp}{da} = \int \frac{e^{fx} \varphi x \, . \, dx}{(x - a)^2}.$$

2.

La dernière de ces intégrales peut être réduite de deux manières.

a) Si l'on différentie la quantité $\frac{e^{fx} \varphi x}{x - a}$ on trouve

$$-\frac{e^{fx} \varphi x \, . \, dx}{(x-a)^2} + \frac{(e^{fx} \varphi' x + e^{fx} f' x \, . \, \varphi x) \, dx}{x - a} = d\left(\frac{e^{fx} \varphi x}{x - a}\right).$$

En intégrant cette équation de sorte que les intégrales s'annulent pour $x = c$, on obtient

$$\int \frac{e^{fx} \varphi x \, . \, dx}{(x-a)^2} = \frac{e^{fx} \varphi x}{a - x} - \frac{e^{fc} \varphi c}{a - c} + \int \frac{e^{fx} (\varphi' x + \varphi x \, . \, f' x) \, dx}{x - a}.$$

Si l'on différentie l'expression de φx on obtient

$$\varphi' x = \left(\frac{\beta}{x + \alpha} + \frac{\beta'}{x + \alpha'} + \frac{\beta''}{x + \alpha''} + \ldots + \frac{\beta^{(n)}}{x + \alpha^{(n)}}\right) \varphi x = \Sigma \frac{\beta^{(p)}}{x + \alpha^{(p)}} \varphi x,$$

où la somme doit être étendue aux valeurs $p = 0, 1, 2, 3 \ldots n$. On tire de là

$$\frac{\varphi' x}{x - a} = \Sigma \frac{\beta^{(p)}}{(x + \alpha^{(p)})(x - a)} \varphi x;$$

or on a

$$\frac{\beta^{(p)}}{(x + \alpha^{(p)})(x - a)} = -\frac{\beta^{(p)}}{(x + \alpha^{(p)})(a + \alpha^{(p)})} + \frac{\beta^{(p)}}{(x - a)(a + \alpha^{(p)})},$$

donc

$$\frac{\varphi' x}{x - a} = -\varphi x \, \Sigma \frac{\beta^{(p)}}{(x + \alpha^{(p)})(a + \alpha^{(p)})} + \frac{\varphi x}{x - a} \Sigma \frac{\beta^{(p)}}{a + \alpha^{(p)}}.$$

Considérons maintenant la quantité $\frac{f' x}{x - a}$. Comme fx est une fonction rationnelle de x on peut faire

$$fx = \Sigma \gamma^{(p)} x^p + \Sigma \frac{\delta^{(p)}}{(x + \varepsilon^{(p)})^{\mu^{(p)}}},$$

la somme étant étendue à toute valeur entière de p, et $\mu^{(p)}$ désignant un nombre entier. En différentiant on obtient

$$f'x = \Sigma p\gamma^{(p)} x^{p-1} - \Sigma \frac{\delta^{(p)} \mu^{(p)}}{(x+\varepsilon^{(p)})^{\mu^{(p)}+1}},$$

donc

$$\frac{f'x}{x-a} = \Sigma p\gamma^{(p)} \frac{x^{p-1}}{x-a} - \Sigma \frac{\delta^{(p)} \mu^{(p)}}{(x-a)(x+\varepsilon^{(p)})^{\mu^{(p)}+1}}.$$

Or on a

$$\frac{x^{p-1}}{x-a} = x^{p-2} + a x^{p-3} + \ldots + a^{p'} x^{p-p'-2} + \ldots + a^{p-2} + \frac{a^{p-1}}{x-a},$$

donc

$$\Sigma p\gamma^{(p)} \frac{x^{p-1}}{x-a} = \Sigma\Sigma p\gamma^{(p)} a^{p'} x^{p-p'-2} + \frac{1}{x-a} \Sigma p\gamma^{(p)} a^{p-1}.$$

Pour réduire l'expression $\Sigma \frac{\delta^{(p)} \mu^{(p)}}{(x-a)(x+\varepsilon^{(p)})^{\mu^{(p)}+1}}$ posons

$$\frac{1}{(x-a)(x+c)^m} = \frac{A}{x-a} + \frac{A_1}{x+c} + \frac{A_2}{(x+c)^2} + \ldots + \frac{A_m}{(x+c)^m};$$

si l'on multiplie de part et d'autre par $x-a$, et qu'on fasse ensuite $x=a$, on obtient

$$A = \frac{1}{(a+c)^m}.$$

Pour trouver $A_{p'}$ on multiplie les deux membres de l'équation par $(x+c)^m$,

$$\frac{1}{x-a} = \left(\frac{A}{x-a} + \frac{A_1}{x+c} + \ldots + \frac{A_{p'-1}}{(x+c)^{p'-1}}\right)(x+c)^m$$
$$+ A_{p'}(x+c)^{m-p'} + A_{p'+1}(x+c)^{m-p'-1} + \ldots,$$

puis on différentie $m-p'$ fois de suite, ce qui donne

$$(-1)^{m-p'} \frac{1.2.3\ldots(m-p')}{(x-a)^{m-p'+1}} = (x+c)R + 1.2.3\ldots(m-p')A_{p'}.$$

En faisant $x=-c$, on tire

$$A_{p'} = -\frac{1}{(a+c)^{m-p'+1}},$$

donc

$$\frac{1}{(x-a)(x+c)^m} = \frac{1}{(a+c)^m (x-a)} - \Sigma \frac{1}{(a+c)^{m-p'+1} (x+c)^{p'}}.$$

En écrivant maintenant $\varepsilon^{(p)}$ au lieu de c, $\mu^{(p)}+1$ au lieu de m, et multipliant par $\mu^{(p)}\delta^{(p)}$ on a

$$\frac{\mu^{(p)}\delta^{(p)}}{(x-a)(x+\varepsilon^{(p)})^{\mu^{(p)}+1}}=\frac{\mu^{(p)}\delta^{(p)}}{(a+\varepsilon^{(p)})^{\mu^{(p)}+1}(x-a)}-\Sigma\frac{\mu^{(p)}\delta^{(p)}}{(a+\varepsilon^{(p)})^{\mu^{(p)}-p'+2}(x+\varepsilon^{(p)})^{p'}},$$

donc

$$\Sigma\frac{\mu^{(p)}\delta^{(p)}}{(x-a)(x+\varepsilon^{(p)})^{\mu^{(p)}+1}}=\frac{1}{x-a}\Sigma\frac{\mu^{(p)}\delta^{(p)}}{(a+\varepsilon^{(p)})^{\mu^{(p)}+1}}-\Sigma\Sigma\frac{\mu^{(p)}\delta^{(p)}}{(a+\varepsilon^{(p)})^{\mu^{(p)}-p'+2}(x+\varepsilon^{(p)})^{p'}}.$$

En substituant dans l'expression de $\frac{f'x}{x-a}$ cette valeur, de même que celle trouvée plus haut pour $\Sigma p\gamma^{(p)}\frac{x^{p-1}}{x-a}$, on obtient

$$\frac{f'x}{x-a}=\frac{1}{x-a}\left(\Sigma p\gamma^{(p)}a^{p-1}-\Sigma\frac{\mu^{(p)}\delta^{(p)}}{(a+\varepsilon^{(p)})^{\mu^{(p)}+1}}\right)$$
$$+\Sigma\Sigma p\gamma^{(p)}a^{p'}x^{p-p'-2}+\Sigma\Sigma\frac{\mu^{(p)}\delta^{(p)}}{(a+\varepsilon^{(p)})^{\mu^{(p)}-p'+2}(x+\varepsilon^{(p)})^{p'}}.$$

Si l'on multiplie les deux membres de cette équation par φx, et qu'on remarque que le coefficient de $\frac{1}{x-a}$ est égal à $f'a$ on a

$$\frac{\varphi x.f'x}{x-a}=\frac{\varphi x.f'a}{x-a}+\varphi x\,\Sigma\Sigma\,p\gamma^{(p)}a^{p'}x^{p-p'-2}+\varphi x\,\Sigma\Sigma\frac{\mu^{(p)}\delta^{(p)}}{(a+\varepsilon^{(p)})^{\mu^{(p)}-p'+2}(x+\varepsilon^{(p)})^{p'}}.$$

En y ajoutant la valeur trouvée pour $\frac{\varphi'x}{x-a}$, multipliant ensuite par $e^{fx}dx$ et intégrant, on en tire

$$\int\frac{e^{fx}(\varphi'x+\varphi x.f'x)\,dx}{x-a}=\left(f'a+\frac{\varphi'a}{\varphi a}\right)\int\frac{e^{fx}\varphi x.dx}{x-a}+\Sigma\Sigma p\gamma^{(p)}a^{p'}\int e^{fx}\varphi x.x^{p-p'-2}\,dx$$
$$-\Sigma\frac{\beta^{(p)}}{a+\alpha^{(p)}}\int\frac{e^{fx}\varphi x.dx}{x+\alpha^{(p)}}+\Sigma\Sigma\frac{\mu^{(p)}\delta^{(p)}}{(a+\varepsilon^{(p)})^{\mu^{(p)}-p'+2}}\int\frac{e^{fx}\varphi x.dx}{(x+\varepsilon^{(p)})^{p'}}.$$

Si l'on substitue cette valeur dans l'expression de $\int\frac{e^{fx}\varphi x.dx}{(x-a)^2}$ ou $\frac{dp}{da}$, et qu'on écrive p au lieu de $\int\frac{e^{fx}\varphi x.dx}{x-a}$, on trouve

$$\frac{dp}{da}-\left(f'a+\frac{\varphi'a}{\varphi a}\right)p=-\frac{e^{fx}\varphi x}{x-a}+\frac{e^{fc}\varphi c}{c-a}+\Sigma\Sigma p\gamma^{(p)}a^{p'}\int e^{fx}\varphi x.x^{p-p'-2}\,dx\tag{1}$$
$$-\Sigma\frac{\beta^{(p)}}{a+\alpha^{(p)}}\int\frac{e^{fx}\varphi x.dx}{x+\alpha^{(p)}}+\Sigma\Sigma\frac{\mu^{(p)}\delta^{(p)}}{(a+\varepsilon^{(p)})^{\mu^{(p)}-p'+2}}\int\frac{e^{fx}\varphi x.dx}{(x+\varepsilon^{(p)})^{p'}}.$$

b) Je vais maintenant exposer la seconde méthode de réduction; mais comme celle-ci est assez longue et compliquée quand fx est une fonction rationnelle quelconque de x, je me bornerai au cas où fx est une fonction entière. On a donc

$$fx = \Sigma \gamma^{(p)} x^p.$$

En différentiant l'expression $\frac{e^{fx}\varphi x \cdot \psi x}{x-a}$ où

$$\psi x = (x+\alpha)(x+\alpha')\dots(x+\alpha^{(n)}),$$

on obtient

$$-\frac{e^{fx}\varphi x \cdot \psi x}{(x-a)^2}dx + \frac{e^{fx}\varphi x\left[\psi' x + \psi x\left(\frac{\varphi' x}{\varphi x} + f' x\right)\right]dx}{x-a} = d\left(\frac{e^{fx}\varphi x \cdot \psi x}{x-a}\right).$$

Pour réduire cette expression, considérons l'équation

$$\frac{Fx}{x-a} = \frac{F + F'.x + \frac{F''}{2}x^2 + \frac{F'''}{2.3}x^3 + \dots + \frac{F^{(m)}}{2.3\dots m}x^m}{x-a},$$

où F, F', $F''\dots$ désignent les valeurs que prennent Fx, $F'x$, $F''x\dots$ quand on fait $x=0$. On a ainsi

$$\frac{Fx}{x-a} = \Sigma\frac{F^{(p)}}{2.3\dots p}\frac{x^p}{x-a} = \frac{\Sigma\frac{F^{(p)}}{2.3\dots p}a^p}{x-a} + \Sigma\Sigma\frac{F^{(p)}}{2.3\dots p}a^{p'}x^{p-p'-1}$$

ou, en remarquant que $\Sigma\frac{F^{(p)}}{2.3\dots p}a^p = Fa$,

$$\frac{Fx}{x-a} = \frac{Fa}{x-a} + \Sigma\Sigma\frac{F^{(p+p'+1)}}{2.3\dots(p+p'+1)}a^{p'}x^p,$$

où l'on a mis $p+p'+1$ au lieu de p. En différentiant cette formule par rapport à a on obtient

$$\frac{Fx}{(x-a)^2} = \frac{Fa}{(x-a)^2} + \frac{F'a}{x-a} + \Sigma\Sigma\frac{p' F^{(p+p'+1)}}{2.3\dots(p+p'+1)}a^{p'-1}x^p.$$

Si dans cette formule on pose $Fx = \psi x$, on a

$$\frac{\psi x}{(x-a)^2} = \frac{\psi a}{(x-a)^2} + \frac{\psi' a}{x-a} + \Sigma\Sigma\frac{(p'+1)\psi^{(p+p'+2)}}{2.3\dots(p+p'+2)}a^{p'}x^p.$$

En mettant dans la première formule, pour Fx la fonction entière $\psi' x + \psi x\left(\frac{\varphi' x}{\varphi x} + f' x\right)$, on obtient

$$\frac{\psi' x + \psi x\left(\frac{\varphi' x}{\varphi x} + f' x\right)}{x - a} = \frac{\psi' a + \psi a\left(\frac{\varphi' a}{\varphi a} + f' a\right)}{x - a} + \Sigma\Sigma \frac{\psi^{(p+p'+2)}}{2.3\ldots(p+p'+1)} a^{p'} x^{p}$$
$$+ \Sigma\Sigma \frac{\left(\psi \frac{\varphi'}{\varphi} + f'\right)^{(p+p'+1)}}{2.3\ldots(p+p'+1)} a^{p'} x^{p}.$$

Si l'on substitue ces valeurs dans l'expression de $d\left(\frac{e^{fx}\varphi x \,.\, \psi x}{x-a}\right)$, on obtient

$$d\left(\frac{e^{fx}\varphi x \,.\, \psi x}{x-a}\right) = -\psi a \frac{e^{fx}\varphi x \,.\, dx}{(x-a)^2} + \psi a\left(\frac{\varphi' a}{\varphi a} + f' a\right)\frac{e^{fx}\varphi x \,.\, dx}{x-a}$$
$$+ \Sigma\Sigma \frac{(p+1)\,\psi^{(p+p'+2)}}{2.3\ldots(p+p'+2)} a^{p'} e^{fx}\varphi x \,.\, x^{p}\, dx$$
$$+ \Sigma\Sigma \frac{\left(\psi \frac{\varphi'}{\varphi} + f'\right)^{(p+p'+1)}}{2.3\ldots(p+p'+1)} a^{p'} e^{fx}\varphi x \,.\, x^{p}\, dx.$$

En intégrant cette équation, divisant de part et d'autre par ψa, et écrivant p au lieu de $\int \frac{e^{fx}\varphi x \,.\, dx}{x-a}$, $\frac{dp}{da}$ au lieu de $\int \frac{e^{fx}\varphi x \,.\, dx}{(x-a)^2}$, on trouve

$$\frac{dp}{da} - \left(\frac{\varphi' a}{\varphi a} + f' a\right) p = \frac{e^{fx}\varphi x \,.\, \psi x}{\psi a (a-x)} - \frac{e^{fc}\varphi c \,.\, \psi c}{\psi a (a-c)}$$
$$+ \Sigma\Sigma \frac{(p+1)\,\psi^{(p+p'+2)}}{2.3\ldots(p+p'+2)} \frac{a^{p'}}{\psi a} \int e^{fx}\varphi x \,.\, x^{p}\, dx$$
$$+ \Sigma\Sigma \frac{\left(\psi \frac{\varphi'}{\varphi} + f'\right)^{(p+p'+1)}}{2.3\ldots(p+p'+1)} \frac{a^{p'}}{\psi a} \int e^{fx}\varphi x \,.\, x^{p}\, dx,$$

ou bien

$$(2)\quad \frac{dp}{da} - \left(\frac{\varphi' a}{\varphi a} + f' a\right) p = \frac{e^{fx}\varphi x \,.\, \psi x}{\psi a (a-x)} - \frac{e^{fc}\varphi c \,.\, \psi c}{\psi a (a-c)} + \Sigma\Sigma \varphi(p, p') \frac{a^{p'}}{\psi a} \int e^{fx}\varphi x \,.\, x^{p}\, dx$$

$$\text{où}\quad \varphi(p, p') = \frac{(p+1)\,\psi^{(p+p'+2)}}{2.3\ldots(p+p'+2)} + \frac{\left(\psi \frac{\varphi'}{\varphi} + f'\right)^{(p+p'+1)}}{2.3\ldots(p+p'+1)}.$$

3.

Les équations (1) et (2) deviennent immédiatement intégrables quand on les multiplie par $\frac{e^{-fa}}{\varphi a}$; on obtient de cette manière, en remarquant qu'on a

$$\int \left(dp - \left(\frac{\varphi' a}{\varphi a} + f' a\right) p\, da\right) \frac{e^{-fa}}{\varphi a} = \frac{p e^{-fa}}{\varphi a},$$

les deux formules suivantes:

$$\frac{pe^{-fa}}{\varphi a} = e^{fx}\varphi x \int \frac{e^{-fa}\,da}{(a-x)\,\varphi a} - e^{fc}\varphi c \int \frac{e^{-fa}\,da}{(a-c)\,\varphi a}$$
$$+ \Sigma\Sigma p\gamma^{(p)} \int \frac{e^{-fa} a^{p'} da}{\varphi a} \cdot \int e^{fx}\varphi x . x^{p-p'-2} dx - \Sigma\beta^{(p)} \int \frac{e^{-fa}\,da}{(a+\alpha^{(p)})\,\varphi a} \cdot \int \frac{e^{fx}\varphi x . dx}{x+\alpha^{(p)}}$$
$$+ \Sigma\Sigma \mu^{(p)}\delta^{(p)} \int \frac{e^{-fa}\,da}{(a+\varepsilon^{(p)})^{\mu^{(p)}-p'+2}\varphi a} \cdot \int \frac{e^{fx}\varphi x . dx}{(x+\varepsilon^{(p)})^{p'}} + C(x),$$

$$\frac{pe^{-fa}}{\varphi a} = e^{fx}\varphi x . \psi x \int \frac{e^{-fa}\,da}{(a-x)\,\varphi a . \psi a} - e^{fc}\varphi c . \psi c \int \frac{e^{-fa}\,da}{(a-c)\,\varphi a . \psi a}$$
$$+ \Sigma\Sigma \varphi(p, p') \int \frac{e^{-fa} a^{p'} da}{\varphi a . \psi a} \cdot \int e^{fx}\varphi x . x^p dx + C(x).$$

La quantité c étant arbitraire, nous ferons dans la première formule $e^{fc}\varphi c = 0$, dans la seconde $e^{fc}\varphi c . \psi c = 0$. Si de plus on suppose que les intégrales prises par rapport à a s'annulent pour $\frac{e^{-fa}}{\varphi a} = 0$, on voit aisément qu'on a $C(x) = 0$; on obtient ainsi, en remettant pour p sa valeur $\int \frac{e^{fx}\varphi x . dx}{x-a}$, les deux formules suivantes:

$$(3)\quad \frac{e^{-fa}}{\varphi a} \int \frac{e^{fx}\varphi x . dx}{x-a} - e^{fx}\varphi x \int \frac{e^{-fa}\,da}{(a-x)\,\varphi a} = \Sigma\Sigma p\gamma^{(p)} \int \frac{e^{-fa} a^{p'} da}{\varphi a} \cdot \int e^{fx}\varphi x . x^{p-p'-2} dx$$
$$- \Sigma\beta^{(p)} \int \frac{e^{-fa}\,da}{(a+\alpha^{(p)})\,\varphi a} \cdot \int \frac{e^{fx}\varphi x . dx}{x+\alpha^{(p)}}$$
$$+ \Sigma\Sigma \mu^{(p)}\delta^{(p)} \int \frac{e^{-fa}\,da}{(a+\varepsilon^{(p)})^{\mu^{(p)}-p'+2}\varphi a} \cdot \int \frac{e^{fx}\varphi x . dx}{(x+\varepsilon^{(p)})^{p'}};$$

$$(4)\quad \frac{e^{-fa}}{\varphi a} \int \frac{e^{fx}\varphi x . dx}{x-a} - e^{fx}\varphi x . \psi x \int \frac{e^{-fa}\,da}{(a-x)\,\varphi a . \psi a}$$
$$= \Sigma\Sigma \varphi(p, p') \int \frac{e^{-fa} a^{p'} da}{\varphi a . \psi a} \cdot \int e^{fx}\varphi x . x^p dx.$$

Si dans la première de ces formules, fx est une fonction entière, on a $\delta^{(p)} = 0$, donc

$$(5)\quad \frac{e^{-fa}}{\varphi a} \int \frac{e^{fx}\varphi x . dx}{x-a} - e^{fx}\varphi x . \int \frac{e^{-fa}\,da}{(a-x)\,\varphi a}$$
$$= \Sigma\Sigma (p+p'+2)\gamma^{(p+p'+2)} \int \frac{e^{-fa} a^{p'} da}{\varphi a} \cdot \int e^{fx}\varphi x . x^p dx$$
$$- \Sigma\beta^{(p)} \int \frac{e^{-fa}\,da}{(a+\alpha^{(p)})\varphi a} \cdot \int \frac{e^{fx}\varphi x\, dx}{x+\alpha^{(p)}}.$$

4.

Je vais maintenant appliquer les formules générales à quelques cas spéciaux.

a) Si l'on fait $\varphi a = 1$, la formule (3) donne

$$e^{-fa}\int\frac{e^{fx}dx}{x-a}-e^{fx}\int\frac{e^{-fa}da}{a-x}=\Sigma\Sigma p\gamma^{(p)}\int e^{-fa}a^{p'}da\,.\int e^{fx}x^{p-p'-2}dx.$$
$$+\Sigma\Sigma\mu^{(p)}\delta^{(p)}\int\frac{e^{-fa}da}{(a+\varepsilon^{(p)})^{\mu^{(p)}-p'+2}}\,.\int\frac{e^{fx}dx}{(x+\varepsilon^{(p)})^{p'}}.$$

Si de plus fx est une fonction entière, on a $\delta^{(p)}=0$; dans ce cas la formule devient

$$(6)\quad e^{-fa}\int\frac{e^{fx}dx}{x-a}-e^{fx}\int\frac{e^{-fa}da}{a-x}=\Sigma\Sigma(p+p'+2)\gamma^{(p+p'+2)}\int e^{-fa}a^{p'}da\,.\int e^{fx}x^{p}dx.$$

En développant le second membre, on obtient

$$e^{-fa}\int\frac{e^{fx}dx}{x-a}-e^{fx}\int\frac{e^{-fa}da}{a-x}=2\gamma^{(2)}\int e^{-fa}da\,.\int e^{fx}dx$$
$$+3\gamma^{(3)}\left(\int e^{-fa}a\,da\,.\int e^{fx}dx+\int e^{-fa}da\,.\int e^{fx}x\,dx\right)$$
$$+4\gamma^{(4)}\left(\int e^{-fa}a^2da\int e^{fx}dx+\int e^{-fa}a\,da\,.\int e^{fx}x\,dx+\int e^{-fa}da\,.\int e^{fx}x^2dx\right)$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+n\gamma^{(n)}\left(\int e^{-fa}a^{n-2}da\,.\int e^{fx}dx+\int e^{-fa}a^{n-3}da\,.\int e^{fx}x\,dx+\ldots+\int e^{-fa}da\,.\int e^{fx}x^{n-2}dx\right).$$

Si par exemple $fx=x^n$, on a $\gamma^{(2)}=\gamma^{(3)}=\ldots=\gamma^{(n-1)}=0$, $\gamma^{(n)}=1$; la formule ci-dessus devient

$$e^{-a^n}\int\frac{e^{x^n}dx}{x-a}-e^{x^n}\int\frac{e^{-a^n}da}{a-x}=n\left(\int e^{-a^n}a^{n-2}da\,.\int e^{x^n}dx+\int e^{-a^n}a^{n-3}da\,.\int e^{x^n}x\,dx+\ldots+\int e^{-a^n}da\,.\int e^{x^n}x^{n-2}dx\right);$$

par exemple pour $n=2$, $n=3$, on a respectivement

$$e^{-a^2}\int\frac{e^{x^2}dx}{x-a}-e^{x^2}\int\frac{e^{-a^2}da}{a-x}=2\int e^{-a^2}da\,.\int e^{x^2}dx,$$
$$e^{-a^3}\int\frac{e^{x^3}dx}{x-a}-e^{x^3}\int\frac{e^{-a^3}da}{a-x}=3\left(\int e^{-a^3}a\,da\,.\int e^{x^3}dx+\int e^{-a^3}da\,.\int e^{x^3}x\,dx\right).$$

b) Posons maintenant dans la formule (3) $fx = 0$, nous aurons

$$(7) \qquad \varphi x \int \frac{da}{(a-x)\varphi a} - \frac{1}{\varphi a}\int \frac{\varphi x \, . \, dx}{x-a} = \Sigma \beta^{(p)} \int \frac{da}{(a+\alpha^{(p)})\varphi a} \cdot \int \frac{\varphi x \, . \, dx}{x+\alpha^{(p)}},$$

ou bien, en développant le second membre,

$$\varphi x \int \frac{da}{(a-x)\varphi a} - \frac{1}{\varphi a}\int \frac{\varphi x \, . \, dx}{x-a} = \beta \int \frac{da}{(a+\alpha)\varphi a} \cdot \int \frac{\varphi x \, . \, dx}{x+\alpha}$$
$$+ \beta' \int \frac{da}{(a+\alpha')\varphi a} \cdot \int \frac{\varphi x \, . \, dx}{x+\alpha'} + \ldots + \beta^{(n)} \int \frac{da}{(a+\alpha^{(n)})\varphi a} \cdot \int \frac{\varphi x \, . \, dx}{x+\alpha^{(n)}}$$

où il faut se rappeler qu'on a

$$\varphi x = (x+\alpha)^{\beta}(x+\alpha')^{\beta'} \ldots (x+\alpha^{(n)})^{\beta^{(n)}}$$
$$\varphi a = (a+\alpha)^{\beta}(a+\alpha')^{\beta'} \ldots (a+\alpha^{(n)})^{\beta^{(n)}}.$$

c) En faisant dans la formule (4) $fx = 0$, on obtient

$$(8) \qquad \frac{1}{\varphi a}\int \frac{\varphi x \, . \, dx}{x-a} - \varphi x \, . \, \psi x \int \frac{da}{(a-x)\varphi a \, . \, \psi a} = \Sigma\Sigma \varphi(p, p') \int \frac{a^{p'} da}{\varphi a \, . \, \psi a} \cdot \int \varphi x \, . \, x^p \, dx$$

$$\text{où} \quad \varphi(p, p') = \frac{(p+1)\,\psi^{(p+p'+2)}}{2\,.\,3 \ldots (p+p'+2)} + \frac{\left(\psi \dfrac{\varphi'}{\varphi}\right)^{(p+p'+1)}}{2\,.\,3 \ldots (p+p'+1)},$$
$$\psi x = (x+\alpha)(x+\alpha') \ldots (x+\alpha^{(n)}).$$

d) Posons dans la formule (8) $\beta = \beta' = \ldots = \beta^{(n)} = m$, nous aurons

$$\varphi x = (\psi x)^m, \qquad \varphi x \, . \, \psi x = (\psi x)^{m+1},$$
$$\varphi' x = m(\psi x)^{m-1} \psi' x, \qquad \frac{\psi x \, . \, \varphi' x}{\varphi x} = m \psi' x,$$
$$\left(\psi \frac{\varphi'}{\varphi}\right)^{(p+p'+1)} = m \psi^{(p+p'+2)};$$

donc en posant

$$\psi x = k + k' x + k'' x^2 + \ldots + k^{(n)} x^n,$$

nous avons

$$\varphi(p, p') = \frac{\big(p+1+m(p+p'+2)\big)\psi^{(p+p'+2)}}{2\,.\,3 \ldots (p+p'+2)} = \big(p+1+m(p+p'+2)\big) k^{(p+p'+2)}.$$

En substituant ces valeurs, on trouve

$$(9) \qquad \frac{1}{(\psi a)^m}\int \frac{(\psi x)^m dx}{x-a} - (\psi x)^{m+1}\int \frac{da}{(a-x)(\psi a)^{m+1}}$$
$$= \Sigma\Sigma k^{(p+p'+2)} \big(p+1+m(p+p'+2)\big) \int \frac{a^{p'} da}{(\psi a)^{m+1}} \cdot \int (\psi x)^m x^p \, dx.$$

Le cas où $m = -\frac{1}{2}$ a cela de remarquable, que les intégrales par rapport à x et à a prennent la même forme; en effet on a

$$(\psi a)^{m+1} = (\psi a)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\psi a}, \quad \frac{1}{(\psi a)^m} = \sqrt{\psi a},$$

donc

$$\sqrt{\psi a}\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{\psi x}} - \sqrt{\psi x}\int\frac{da}{(a-x)\sqrt{\psi a}} = \frac{1}{2}\Sigma\Sigma(p-p')k^{(p+p'+2)}\int\frac{a^{p'}da}{\sqrt{\psi a}}\cdot\int\frac{x^p dx}{\sqrt{\psi x}}.$$

Si l'on suppose, par exemple que $\psi x = 1+\alpha x^n$, on a $k^{(n)} = \alpha$; $k^{(p+p'+2)}$ sera égal à zéro, à moins que $p+p'+2 = n$, c'est-à-dire que $p = n-p'-2$; donc

$$\sqrt{1+\alpha a^n}\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{1+\alpha x^n}} - \sqrt{1+\alpha x^n}\int\frac{da}{(a-x)\sqrt{1+\alpha a^n}}$$
$$= \frac{\alpha}{2}\Sigma(n-2p'-2)\int\frac{a^{p'}da}{\sqrt{1+\alpha a^n}}\cdot\int\frac{x^{n-p'-2}dx}{\sqrt{1+\alpha x^n}}.$$

En développant le second membre, on a

$$\sqrt{1+\alpha a^n}\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{1+\alpha x^n}} - \sqrt{1+\alpha x^n}\int\frac{da}{(a-x)\sqrt{1+\alpha a^n}}$$
$$= \frac{\alpha}{2}(n-2)\left[\int\frac{da}{\sqrt{1+\alpha a^n}}\cdot\int\frac{x^{n-2}dx}{\sqrt{1+\alpha x^n}} - \int\frac{a^{n-2}da}{\sqrt{1+\alpha a^n}}\cdot\int\frac{dx}{\sqrt{1+\alpha x^n}}\right]$$
$$+ \frac{\alpha}{2}(n-4)\left[\int\frac{a\,da}{\sqrt{1+\alpha a^n}}\cdot\int\frac{x^{n-3}dx}{\sqrt{1+\alpha x^n}} - \int\frac{a^{n-3}da}{\sqrt{1+\alpha a^n}}\cdot\int\frac{x\,dx}{\sqrt{1+\alpha x^n}}\right]$$
$$+ \frac{\alpha}{2}(n-6)\left[\int\frac{a^2da}{\sqrt{1+\alpha a^n}}\cdot\int\frac{x^{n-4}dx}{\sqrt{1+\alpha x^n}} - \int\frac{a^{n-4}da}{\sqrt{1+\alpha a^n}}\cdot\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1+\alpha x^n}}\right]$$
$$+ \cdots\cdots\cdots$$

Par exemple si $n = 3$, on a

$$\sqrt{1+\alpha a^3}\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{1+\alpha x^3}} - \sqrt{1+\alpha x^3}\int\frac{da}{(a-x)\sqrt{1+\alpha a^3}}$$
$$= \frac{\alpha}{2}\left[\int\frac{da}{\sqrt{1+\alpha a^3}}\cdot\int\frac{x\,dx}{\sqrt{1+\alpha x^3}} - \int\frac{a\,da}{\sqrt{1+\alpha a^3}}\cdot\int\frac{dx}{\sqrt{1+\alpha x^3}}\right].$$

Comme second exemple je prends

$$\psi x = (1-x^2)(1-\alpha x^2);$$

alors on a $k = 1$, $k' = 0 = k'''$, $k'' = -(1+\alpha)$, $k'''' = \alpha$. Si l'on écrit $-\alpha$ pour α, la formule devient

$$\sqrt{(1-a^2)(1-\alpha a^2)}\int\frac{dx}{(x+a)\sqrt{(1-x^2)(1-\alpha x^2)}}$$
$$-\sqrt{(1-x^2)(1-\alpha x^2)}\int\frac{da}{(a+x)\sqrt{(1-a^2)(1-\alpha a^2)}}$$
$$=\alpha\int\frac{da}{\sqrt{(1-a^2)(1-\alpha a^2)}}\cdot\int\frac{x^2dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\alpha x^2)}}$$
$$-\alpha\int\frac{a^2da}{\sqrt{(1-a^2)(1-\alpha a^2)}}\cdot\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\alpha x^2)}}.$$

En posant

$$x=\sin\varphi,\quad a=\sin\psi,$$

on a

$$\sqrt{(1-x^2)(1-\alpha x^2)}=\cos\varphi\sqrt{1-\alpha\sin^2\varphi},$$
$$\sqrt{(1-a^2)(1-\alpha a^2)}=\cos\psi\sqrt{1-\alpha\sin^2\psi},$$
$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\alpha x^2)}}=\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\alpha\sin^2\varphi}},$$
$$\frac{da}{\sqrt{(1-a^2)(1-\alpha a^2)}}=\frac{d\psi}{\sqrt{1-\alpha\sin^2\psi}},$$
$$\frac{x^2dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\alpha x^2)}}=\frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{\sqrt{1-\alpha\sin^2\varphi}},$$
$$\frac{a^2da}{\sqrt{(1-a^2)(1-\alpha a^2)}}=\frac{\sin^2\psi\,d\psi}{\sqrt{1-\alpha\sin^2\psi}}.$$

En substituant ces valeurs, on trouve

$$\cos\psi\sqrt{1-\alpha\sin^2\psi}\int\frac{d\varphi}{(\sin\varphi+\sin\psi)\sqrt{1-\alpha\sin^2\varphi}}$$
$$-\cos\varphi\sqrt{1-\alpha\sin^2\varphi}\int\frac{d\psi}{(\sin\psi+\sin\varphi)\sqrt{1-\alpha\sin^2\psi}}$$
$$=\alpha\int\frac{d\psi}{\sqrt{1-\alpha\sin^2\psi}}\cdot\int\frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{\sqrt{1-\alpha\sin^2\varphi}}-\alpha\int\frac{\sin^2\psi\,d\psi}{\sqrt{1-\alpha\sin^2\psi}}\cdot\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\alpha\sin^2\varphi}}.$$

Cette formule répond à celle que M. *Legendre* a donnée dans ses Exercices de calcul intégral t. I p. 136, et elle peut en être déduite.

e) Si dans la formule (5) on pose $fx=x$, on obtient

$$(10)\qquad \frac{e^{-a}}{\varphi a}\int\frac{e^x\varphi x\,dx}{x-a}-e^x\varphi x\int\frac{e^{-a}da}{(a-x)\varphi a}=-\Sigma\beta^{(p)}\int\frac{e^{-a}da}{(a+\alpha^{(p)})\varphi a}\cdot\int\frac{e^x\varphi x.dx}{x+\alpha^{(p)}},$$

d'où en développant le second membre on tire

$$e^x \varphi x \int \frac{e^{-a}\,da}{(a-x)\varphi a} - \frac{e^{-a}}{\varphi a}\int \frac{e^x \varphi x . dx}{x-a} = \beta \int \frac{e^{-a}\,da}{(a+\alpha)\varphi a} . \int \frac{e^x \varphi x . dx}{x+\alpha}$$
$$+ \beta' \int \frac{e^{-a}\,da}{(a+\alpha')\varphi a} . \int \frac{e^x \varphi x . dx}{x+\alpha'} + \cdots + \beta^{(n)} \int \frac{e^{-a}\,da}{(a+\alpha^{(n)})\varphi a} . \int \frac{e^x \varphi x . dx}{x+\alpha^{(n)}} .$$

Par exemple si $\varphi x = \sqrt{x^2-1}$, on a $\beta = \beta' = \frac{1}{2}$, $\alpha = 1$, $\alpha' = -1$, donc

$$e^x \sqrt{x^2-1} \int \frac{e^{-a}\,da}{(a-x)\sqrt{a^2-1}} - \frac{e^{-a}}{\sqrt{a^2-1}} \int \frac{e^x\,dx\,\sqrt{x^2-1}}{x-a}$$
$$= \tfrac{1}{2} \int \frac{e^{-a}\,da}{(a+1)\sqrt{a^2-1}} . \int \frac{e^x\,dx\,\sqrt{x^2-1}}{x+1} + \tfrac{1}{2} \int \frac{e^{-a}\,da}{(a-1)\sqrt{a^2-1}} . \int \frac{e^x\,dx\,\sqrt{x^2-1}}{x-1} .$$

f) En posant dans la formule (4) $\beta = \beta' = \beta'' = \ldots = \beta^{(n)} = m$, on a $\varphi x = (\psi x)^m$, $\varphi x . \psi x = (\psi x)^{m+1}$, donc

$$(11) \quad \frac{e^{-fa}}{(\psi a)^m} \int \frac{e^{fx}(\psi x)^m dx}{x-a} - e^{fx}(\psi x)^{m+1} \int \frac{e^{-fa}\,da}{(a-x)(\psi a)^{m+1}}$$
$$= \Sigma\Sigma\, \varphi(p,p') \int \frac{e^{-fa} a^{p'}\,da}{(\psi a)^{m+1}} . \int e^{fx}(\psi x)^m x^p\,dx .$$

Or on trouve

$$\varphi(p,p') = \frac{f^{(p+p'+2)}}{2.3\ldots(p+p'+1)} + \big(p+1+m(p+p'+2)\big)\frac{\psi^{(p+p'+2)}}{2.3\ldots(p+p'+2)};$$

donc, en faisant

$$fx = \gamma + \gamma' x + \gamma'' x^2 + \cdots + \gamma^{(n')} x^{n'},$$
$$\psi x = k + k' x + k'' x^2 + \cdots + k^{(n)} x^n,$$

on a

$$\varphi(p,p') = (p+p'+2)\gamma^{(p+p'+2)} + \big(p+1+m(p+p'+2)\big) k^{(p+p'+2)} .$$

Par conséquent on a

$$\frac{e^{-fa}}{(\psi a)^m} \int \frac{e^{fx}(\psi x)^m\,dx}{x-a} - e^{fx}(\psi x)^{m+1} \int \frac{e^{-fa}\,da}{(a-x)(\psi a)^{m+1}}$$
$$(12) \quad = \Sigma\Sigma \Big[(p+p'+2)\gamma^{(p+p'+2)}$$
$$+ \big(p+1+m(p+p'+2)\big) k^{(p+p'+2)}\Big] \int \frac{e^{-fa} a^{p'}\,da}{(\psi a)^{m+1}} . \int e^{fx}(\psi x)^m x^p\,dx .$$

Si l'on fait $m = -\frac{1}{2}$, on trouve

$$e^{-fa}\sqrt{\psi a}\int\frac{e^{fx}\,dx}{(x-a)\sqrt{\psi x}} - e^{fx}\sqrt{\psi x}\int\frac{e^{-fa}\,da}{(a-x)\sqrt{\psi a}}$$
$$= \Sigma\Sigma\left[(p+p'+2)\gamma^{(p+p'+2)} + \tfrac{1}{2}(p-p')k^{(p+p'+2)}\right]\int\frac{e^{-fa}a^{p'}\,da}{\sqrt{\psi a}}\int\frac{e^{fx}x^{p}\,dx}{\sqrt{\psi x}}.$$

Soit par exemple $fx = x$ et $\psi x = 1 - x^2$, on a

$$\gamma^{(p+p'+2)} = 0, \quad \tfrac{1}{2}(p-p')k^{(p+p'+2)} = 0,$$

donc

$$e^{-a}\sqrt{1-a^2}\int\frac{e^{x}\,dx}{(x-a)\sqrt{1-x^2}} = e^{x}\sqrt{1-x^2}\int\frac{e^{-a}\,da}{(a-x)\sqrt{1-a^2}}.$$

En écrivant $-a$ au lieu de a, on obtient

$$e^{a}\sqrt{1-a^2}\int\frac{e^{x}\,dx}{(x+a)\sqrt{1-x^2}} = e^{x}\sqrt{1-x^2}\int\frac{e^{a}\,da}{(a+x)\sqrt{1-a^2}};$$

en posant $x = \sin\varphi$, et $a = \sin\psi$, on trouve

$$\cos\psi\, e^{\sin\psi}\int\frac{e^{\sin\varphi}\,d\varphi}{\sin\varphi + \sin\psi} = \cos\varphi\, e^{\sin\varphi}\int\frac{e^{\sin\psi}\,d\psi}{\sin\psi + \sin\varphi},$$

les intégrales devant s'annuler pour $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\psi = \frac{\pi}{2}$.

Je vais maintenant faire une autre application des équations générales. Nous avons jusqu'à présent regardé x et a comme des indéterminées, sans nous occuper des valeurs spéciales de ces quantités qui simplifieraient les formules. Nous allons maintenant chercher de telles valeurs.

a) Considérons en premier lieu l'équation (5). Le premier membre de cette équation contient deux intégrales, mais comme chacune d'elles est multipliée par une quantité dépendant respectivement de a et de x, il est clair qu'on peut donner à ces quantités des valeurs telles, que les intégrales disparaissent, ou l'une, ou toutes les deux, pourvu seulement que chacune des équations $\frac{e^{-fa}}{\varphi a} = 0$, $e^{fx}\varphi x = 0$, ait au moins deux racines différentes; car nous avons déjà supposé que les intégrales s'annulent pour des valeurs de x et de a qui satisfont à ces équations.

Supposons d'abord $e^{fx}\varphi x = 0$, nous aurons après avoir multiplié par $e^{fa}\varphi a$,



$$(13)\quad \begin{aligned} \int \frac{e^{fx}\varphi x\,.\,dx}{x-a} &= e^{fa}\varphi a\,\Sigma\Sigma(p+p'+2)\gamma^{(p+p'+2)}\int\frac{e^{-fa}a^{p'}\,da}{\varphi a}\,.\int e^{fx}\varphi x\,.\,x^{p}\,dx \\ &\quad - e^{fa}\varphi a\,\Sigma\beta^{(p)}\int\frac{e^{-fa}\,da}{(a+\alpha^{(p)})\,\varphi a}\int\frac{e^{fx}\,\varphi x\,.\,dx}{x+\alpha^{(p)}} \\ &\qquad (x=x',\ x=x'',\ a=a'), \end{aligned}$$

les équations entre parenthèses indiquant les limites entre lesquelles les intégrales doivent être prises; ces limites doivent satisfaire aux équations

$$e^{fx'}\varphi x'=0,\quad e^{fx''}\varphi x''=0;\quad \frac{e^{-fa'}}{\varphi a'}=0.$$

De la formule précédente découle le théorème suivant:

"La valeur de l'intégrale $\int\frac{e^{fx}\varphi x\,.\,dx}{x-a}$, entre des limites qui annulent la "fonction $e^{fx}\varphi x$ peut être exprimée par des intégrales des formes suivantes:

$$\int e^{fx}\varphi x\,.\,x^{p}\,dx,\quad \int\frac{e^{-fa}a^{p'}\,da}{\varphi a},\quad \int\frac{e^{fx}\,\varphi x\,.\,dx}{x+\alpha^{(p)}},\quad \int\frac{e^{-fa}\,da}{(a+\alpha^{(p)})\,\varphi a},$$

"les intégrales par rapport à x étant prises entre les mêmes limites que la "première intégrale."

Ce théorème a cela de remarquable, que la même réduction est impossible, quand l'intégrale $\int\frac{e^{fx}\,\varphi x\,.\,dx}{x-a}$ est prise entre des limites indéterminées. En posant $fx=0$, on obtient

$$(14)\quad \begin{aligned} \int\frac{\varphi x\,.\,dx}{x-a} &= -\varphi a\,\Sigma\beta^{(p)}\int\frac{da}{(a+\alpha^{(p)})\,\varphi a}\,.\int\frac{\varphi x\,.\,dx}{x+\alpha^{(p)}} \\ &\qquad (x=x',\ x=x'',\ a=a'). \end{aligned}$$

Si l'on pose $\varphi x=1$, on aura

$$(15)\quad \begin{aligned} \int\frac{e^{fx}\,dx}{x-a} &= e^{fa}\,\Sigma\Sigma(p+p'+2)\gamma^{(p+p'+2)}\int e^{-fa}\,a^{p'}\,da\,.\int e^{fx}x^{p}\,dx. \\ &\qquad (x=x',\ x=x'',\ a=a'). \end{aligned}$$

Supposons maintenant qu'on donne en même temps à a une valeur qui annule la quantité $\frac{e^{-fa}}{\varphi a}$, et soit a'' cette valeur, la formule (13) donnera

$$(16)\quad \begin{aligned} &\Sigma\beta^{(p)}\int\frac{e^{-fa}\,da}{(a+\alpha^{(p)})\,\varphi a}\,.\int\frac{e^{fx}\,\varphi x\,.\,dx}{x+\alpha^{(p)}} \\ &= \Sigma\Sigma\,(p+p'+2)\gamma^{(p+p'+2)}\int\frac{e^{-fa}a^{p'}\,da}{\varphi a}\,.\int e^{fx}\,\varphi x\,.\,x^{p}\,dx. \\ &\qquad (x=x',\ x=x'';\ a=a',\ a=a''). \end{aligned}$$

En supposant $fx = kx$, on en tire

(17) $$\Sigma \beta^{(p)} \int \frac{e^{-ka}\, da}{(a+\alpha^{(p)})\,\varphi a} \cdot \int \frac{e^{kx}\,\varphi x \,.\, dx}{x+\alpha^{(p)}} = 0$$
$$(x=x',\quad x=x'';\quad a=a',\quad a=a'').$$

En faisant $k=0$, on obtient

(18) $$\Sigma \beta^{(p)} \int \frac{da}{(a+\alpha^{(p)})\,\varphi a} \cdot \int \frac{\varphi x \,.\, dx}{x+\alpha^{(p)}} = 0$$
$$(x=x',\quad x=x'';\quad a=a',\quad a=a'').$$

Posons par exemple $\varphi x = \sqrt{x^2-1} = \sqrt{(x-1)(x+1)}$, on a

$$\beta = \beta' = \tfrac{1}{2};\quad \alpha = -1,\quad \alpha' = 1;\quad x' = 1,\quad x'' = -1;\quad a' = \infty,\quad a'' = -\infty;$$

donc

$$\int \frac{da}{(a-1)\sqrt{a^2-1}} \cdot \int \frac{dx\sqrt{x^2-1}}{x-1} + \int \frac{da}{(a+1)\sqrt{a^2-1}} \cdot \int \frac{dx\sqrt{x^2-1}}{x+1} = 0$$
$$(x'=1,\quad x''=-1;\quad a'=+\infty,\quad a''=-\infty),$$

ce qui a lieu en effet, car on a

$$\int \frac{da}{(a-1)\sqrt{a^2-1}} = -\sqrt{\frac{a+1}{a-1}} = 0 \quad (a'=+\infty,\quad a''=-\infty),$$
$$\int \frac{da}{(a+1)\sqrt{a^2-1}} = -\sqrt{\frac{a-1}{a+1}} = 0 \quad (a'=+\infty,\quad a''=-\infty).$$

Si dans la formule (16) on fait $\varphi x = 1$, on obtient

(19) $$\Sigma\Sigma (p+p'+2)\gamma^{(p+p'+2)} \int e^{-fa} a^{p'} da \,.\int e^{fx} x^p dx = 0$$
$$(x=x',\quad x=x'';\quad a=a',\quad a=a'').$$

b) Considérons en second lieu la formule (4). En supposant $e^{fx}\varphi x.\psi x = 0$, on trouve après avoir multiplié par $e^{fa}\varphi a$

(20) $$\int \frac{e^{fx}\varphi x \,.\, dx}{x-a} = e^{fa}\varphi a\, \Sigma\Sigma\, \varphi(p,p') \int \frac{e^{-fa} a^{p'}\, da}{\varphi a \,.\, \psi a} \cdot \int e^{fx}\varphi x \,.\, x^p\, dx$$
$$(x=x',\quad x=x'';\quad a=a'),$$

où l'on a

$$e^{fx'}\varphi x' \,.\, \psi x' = 0,\quad e^{fx''}\varphi x'' \,.\, \psi x'' = 0,\quad \frac{e^{-fa'}}{\varphi a'} = 0.$$

Cette formule se traduit en théorème comme suit:

"La valeur de l'intégrale $\int \frac{e^{fx} \varphi x \,.\, dx}{x-a}$, prise entre des limites qui annu-"lent la quantité $e^{fx} \varphi x \,.\, \psi x$, peut être exprimée par des intégrales de ces "formes: $\int \frac{e^{-fa} a^{p'} da}{\varphi a \,.\, \psi a}$, $\int e^{fx} \varphi x \,.\, x^p \, dx$."

Pour des valeurs indéterminées de x au contraire, cette réduction de $\int \frac{e^{fx} \varphi x \,.\, dx}{x-a}$ est impossible.

En faisant $\beta = \beta' = \ldots = \beta^{(n)} = m$, on obtient la formule suivante

$$(21)\qquad \int \frac{e^{fx} (\psi x)^m dx}{x-a} = e^{fa} (\psi a)^m \Sigma\Sigma \varphi(p, p') \int \frac{e^{-fa} a^{p'} da}{(\psi a)^{m+1}} \cdot \int e^{fx} (\psi x)^m x^p \, dx$$
$$(x = x', \ x = x''; \ a = a'),$$

où

$$\psi x = (x + \alpha)(x + \alpha') \ldots (x + \alpha^{(n)}).$$

Si de plus on suppose $fx = 0$, on obtient

$$(22)\qquad \int \frac{(\psi x)^m dx}{x-a} = (\psi a)^m \Sigma\Sigma \varphi(p, p') \int \frac{a^{p'} da}{(\psi a)^{m+1}} \cdot \int (\psi x)^m x^p \, dx$$
$$(x = x', \ x = x''; \ a = a').$$

On a donc le théorème suivant, qui n'est qu'un cas spécial du précédent:

"La valeur de l'intégrale $\int \frac{(\psi x)^m dx}{x-a}$, prise entre des limites qui satis-"font à l'équation $(\psi x)^{m+1} = 0$, peut être exprimée par des intégrales des "formes $\int \frac{a^{p'} da}{(\psi a)^{m+1}}$, $\int (\psi x)^m x^p \, dx$, ψx étant une fonction entière de x."

En faisant $m = -\frac{1}{2}$, on obtient

$$(23)\qquad \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{\psi x}} = \frac{1}{2\sqrt{\psi a}} \Sigma\Sigma (p - p') k^{(p+p'+2)} \int \frac{a^{p'} da}{\sqrt{\psi a}} \cdot \int \frac{x^p dx}{\sqrt{\psi x}}$$
$$(x = x', \ x = x''; \ a = a'),$$

d'où le théorème suivant:

"La valeur de l'intégrale $\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{\psi x}}$, prise entre des limites qui annu-

"lent la fonction ψx, peut être exprimée par des intégrales de la forme $\int \frac{x^p\,dx}{\sqrt{\psi x}}$."

Faisons par exemple $\psi x = (1-x^2)(1-\alpha x^2)$, nous aurons $x'=1$, $x'=-1$, $x'=\sqrt{\frac{1}{\alpha}}$, $x'=-\sqrt{\frac{1}{\alpha}}$; $a'=1$, -1, $\sqrt{\frac{1}{\alpha}}$, $-\sqrt{\frac{1}{\alpha}}$; donc

$$\sqrt{(1-a^2)(1-\alpha a^2)}\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{(1-x^2)(1-\alpha x^2)}}$$
$$= \alpha\int \frac{da}{\sqrt{(1-a^2)(1-\alpha a^2)}}\cdot\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\alpha x^2)}}$$
$$- \alpha\int \frac{a^2\,da}{\sqrt{(1-a^2)(1-\alpha a^2)}}\cdot\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\alpha x^2)}}$$

$$\left(x=1,\ x=-1;\ a=\pm 1,\ \pm\sqrt{\frac{1}{\alpha}}\right)$$
$$\left(x=1,\ x=\pm\sqrt{\frac{1}{\alpha}};\ a=\pm 1,\ \pm\sqrt{\frac{1}{\alpha}}\right)$$
$$\left(x=-1,\ x=\pm\sqrt{\frac{1}{\alpha}};\ a=\pm 1,\ \pm\sqrt{\frac{1}{\alpha}}\right)$$
$$\left(x=\sqrt{\frac{1}{\alpha}},\ x=-\sqrt{\frac{1}{\alpha}};\ a=\pm 1,\ \pm\sqrt{\frac{1}{\alpha}}\right).$$

Si dans la formule (22) on suppose $\psi x = 1-x^{2n}$, on trouve

$$\int \frac{(1-x^{2n})^m\,dx}{x-a} = (1-a^{2n})^m\,\Sigma\Sigma\,\varphi(p,p')\int (1-x^{2n})^m x^p\,dx\cdot\int \frac{a^{p'}\,da}{(1-a^{2n})^{m+1}}$$
$$(x=1,\ x=-1,\ a=1),$$

où $m+1$ doit être moindre que l'unité, c'est-à-dire que $m<0$. On a

$$\varphi(p,p') = \left(p+1+m(p+p'+2)\right)k^{(p+p'+2)}:$$

puisque $k^{(p+p'+2)}=0$, à moins que $p+p'+2=2n$, et comme $k^{2n}=-1$, on en tire

$$\varphi(p,p') = -(p+1+2mn).$$

L'intégrale $\int (1-x^{2n})^m x^p\,dx$ peut être exprimée par la fonction Γ. On a en effet

$$\int_{+1}^{-1}(1-x^{2n})^m x^p\,dx = -\int_0^1 (1-x^{2n})^m x^p\,dx + \int_0^{-1}(1-x^{2n})^m x^p\,dx.$$

Mais on a

$$\int_0^{-1}(1-x^{2n})^m x^p\,dx = (-1)^{p+1}\int_0^1 (1-x^{2n})^m x^p\,dx,$$

comme on le voit en mettant $-x$ au lieu de x. Donc

$$\int_{+1}^{-1}(1-x^{2n})^m x^p\,dx = \left((-1)^{p+1}-1\right)\int_0^1 (1-x^{2n})^m x^p\,dx;$$

c'est-à-dire qu'on a

$$\int_{+1}^{-1}(1-x^{2n})^m x^{2p}\,dx = -2\int_0^1 (1-x^{2n})\,x^{2p}\,dx,$$

$$\int_{+1}^{-1}(1-x^{2n})^m x^{2p+1}\,dx = 0.$$

Or on déduit aisément d'une formule connue (*Legendre* Exercices de calcul intégral t. I p. 279) l'équation suivante

$$\int_0^1 (1-x^{2n})^m x^{2p}\,dx = \frac{\Gamma(m+1)\,\Gamma\left(\frac{1+2p}{2n}\right)}{2n\,\Gamma\left(m+1+\frac{1+2p}{2n}\right)};$$

on a donc

$$\int_{+1}^{-1}(1-x^{2n})^m x^{2p}\,dx = -\frac{\Gamma(m+1)\,\Gamma\left(\frac{1+2p}{2n}\right)}{n\,\Gamma\left(m+1+\frac{1+2p}{2n}\right)}.$$

En substituant cette valeur, et écrivant ensuite $-m$ pour m, on obtient

$$(24)\quad \int\frac{dx}{(x-a)(1-x^{2n})^m} = \frac{\Gamma(-m+1)}{n(1-a^{2n})^m}\,\Sigma(2p+1-2mn)\,\frac{\Gamma\left(\frac{1+2p}{2n}\right)}{\Gamma\left(-m+1+\frac{1+2p}{2n}\right)}\int\frac{a^{2n-2p-2}\,da}{(1-a^{2n})^{1-m}}$$

$$(x=1,\ x=-1;\ a=1).$$

Si l'on fait $m=\frac{1}{2}$, on trouve

$$\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{1-x^{2n}}} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{n\sqrt{1-a^{2n}}}\,\Sigma(2p+1-n)\,\frac{\Gamma\left(\frac{1+2p}{2n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1+2p}{2n}\right)}\int\frac{a^{2n-2p-2}\,da}{\sqrt{1-a^{2n}}}$$

$$(x=1,\ x=-1;\ a=1,\ a=a).$$

Par exemple si $n=3$, on trouve

$$\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{1-x^6}}=-\tfrac{2}{3}\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\,\Gamma(\frac{1}{6})}{\Gamma(\frac{2}{3})\sqrt{1-a^6}}\int\frac{a^4\,da}{\sqrt{1-a^6}}+\tfrac{2}{3}\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\,\Gamma(\frac{5}{6})}{\Gamma(\frac{4}{3})\sqrt{1-a^6}}\int\frac{da}{\sqrt{1-a^6}}$$

$$(x=1,\ x=-1;\ a=1).$$

Or on a $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$, en substituant cette valeur on obtient

$$\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{1-x^6}}=-\tfrac{2}{3}\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{1-a^6}}\,\frac{\Gamma(\frac{1}{6})}{\Gamma(\frac{2}{3})}\int\frac{a^4\,da}{\sqrt{1-a^6}}+\tfrac{2}{3}\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{1-a^6}}\,\frac{\Gamma(\frac{5}{6})}{\Gamma(\frac{4}{3})}\int\frac{da}{\sqrt{1-a^6}}$$

$$(x=1,\ x=-1;\ a=1).$$

Dans ce qui précède nous avons supposé $e^{fx}\varphi x.\psi x=0$; supposons maintenant qu'on ait en même temps $\frac{e^{-fa}}{\varphi a}=0$, et désignons par a'' une valeur de a qui satisfait à cette condition. L'équation (4) devient dans ce cas:

(25) $$\Sigma\Sigma\,\varphi(p,p')\int\frac{e^{-fa}a^{p'}\,da}{\varphi a.\psi a}\cdot\int e^{fx}\varphi x.x^p\,dx=0$$

$$(x=x',\ x=x'';\ a=a',\ a=a'').$$

Si $fx=0$, on a

(26) $$\Sigma\Sigma\,\varphi(p,p')\int\frac{a^{p'}\,da}{\varphi a.\psi a}\cdot\int\varphi x.x^p\,dx=0$$

$$(x=x',\ x=x'';\ a=a',\ a=a'').$$

Supposons que $\beta,\ \beta',\ \beta''\ldots$ soient négatifs, mais que leurs valeurs absolues soient moindres que l'unité, nous aurons $\varphi x.\psi x=0$ pour $x=-\alpha^{(p)}$, et $\frac{1}{\varphi a}=0$ pour $a=-\alpha^{(q)}$. On obtient ainsi la formule suivante

(27) $$\Sigma\Sigma\,\varphi(p,p')\int\frac{a^{p'}\,da}{\psi a}\cdot\int\frac{x^p\,dx}{\varphi x}=0$$

$$(x=-\alpha^{(p)},\ x=-\alpha^{(p')};\ a=-\alpha^{(q)},\ a=-\alpha^{(q')}),$$

où l'on a fait

$$\varphi x=(x+\alpha)^{\beta}(x+\alpha')^{\beta'}(x+\alpha'')^{\beta''}\ldots.$$
$$\psi a=(a+\alpha)^{1-\beta}(a+\alpha')^{1-\beta'}(a+\alpha'')^{1-\beta''}\ldots.,$$

$\beta,\ \beta',\ \beta''\ldots$ étant positifs et moindres que l'unité.

En faisant $\beta=\beta'=\beta''=\cdots=\frac{1}{2}$, on obtient

$$(28)\quad \begin{gathered}\Sigma\Sigma(p-p')k^{(p+p'+2)}\int\frac{a^{p'}da}{\sqrt{\varphi a}}\cdot\int\frac{x^p dx}{\sqrt{\varphi x}}=0\\ (x=-\alpha^{(p)},\ x=-\alpha^{(p')};\ a=-\alpha^{(q)},\ a=-\alpha^{(q')}).\end{gathered}$$

Dans cette formule on a

$$\varphi x=(x+\alpha)(x+\alpha')(x+\alpha'')\cdots=k+k'x+k''x^2+\cdots$$

Par exemple si l'on pose $\varphi x=(1-x)(1+x)(1-cx)(1+cx)$, on a $\alpha=1$, $\alpha'=-1$, $\alpha''=\frac{1}{c}$, $\alpha'''=-\frac{1}{c}$, donc

$$\int\frac{da}{\sqrt{(1-a^2)(1-c^2a^2)}}\cdot\int\frac{x^2dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}}=\int\frac{a^2da}{\sqrt{(1-a^2)(1-c^2a^2)}}\cdot\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}}$$

$$\begin{array}{lr}
\left(x=1,\quad x=-1;\quad a=1,\quad a=-1\right) & (1)\\
\left(x=1,\quad x=-1;\quad a=1,\quad a=\frac{1}{c}\right) & (2)\\
\left(x=1,\quad x=-1;\quad a=1,\quad a=-\frac{1}{c}\right) & (3)\\
\left(x=1,\quad x=-1;\quad a=\frac{1}{c},\quad a=-\frac{1}{c}\right) & (4)\\
\left(x=1,\quad x=\frac{1}{c};\quad a=1,\quad a=\frac{1}{c}\right) & (5)\\
\left(x=1,\quad x=\frac{1}{c};\quad a=1,\quad a=-\frac{1}{c}\right) & (6)\\
\left(x=1,\quad x=\frac{1}{c};\quad a=\frac{1}{c},\quad a=-\frac{1}{c}\right) & (7)\\
\left(x=\frac{1}{c},\quad x=-\frac{1}{c};\quad a=\frac{1}{c},\quad a=-\frac{1}{c}\right) & (8)
\end{array}$$

Désignons par Fx la valeur de l'intégrale $\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}}$ prise depuis $x=0$, et par Ex celle de $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}}$ depuis $x=0$, nous aurons

$$\int_\alpha^{\alpha'}\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}}=F\alpha'-F\alpha,$$

$$\int_\alpha^{\alpha'}\frac{x^2dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}}=E\alpha'-E\alpha.$$

En substituant ces valeurs, on aura la formule suivante

$$F(1)\,E\left(\frac{1}{c}\right) = E(1)\,F\left(\frac{1}{c}\right).$$

On n'obtient pas d'autres relations quel que soit le système de limites qu'on emploie, excepté seulement les systèmes qui donnent des identités, savoir le 1er, le 5ième et le 8ième.

Si l'on désigne en général par $F(p, x)$ la valeur de l'intégrale $\int \frac{x^p\,dx}{\sqrt{\varphi x}}$ prise d'une limite inférieure arbitraire, on a

$$\int_{\alpha}^{\alpha'} \frac{x^p\,dx}{\sqrt{\varphi x}} = F(p, \alpha') - F(p, \alpha).$$

En substituant cette valeur dans la formule (28), on obtient la suivante:

$$(29)\quad \Sigma\Sigma(p-p')k^{(p+p'+2)}F(p,\alpha)F(p',\alpha') + \Sigma\Sigma(p-p')k^{(p+p'+2)}F(p,\alpha'')F(p',\alpha''')$$
$$= \Sigma\Sigma(p-p')k^{(p+p'+2)}F(p,\alpha)F(p',\alpha''') + \Sigma\Sigma(p-p')k^{(p+p'+2)}F(p,\alpha'')F(p',\alpha').$$

De cette formule on peut en déduire beaucoup d'autres plus spéciales en supposant φx paire ou impaire, mais pour ne pas m'étendre trop au long je les passe sous silence.

Il faut se rappeler que α, α', α'', α''' peuvent désigner des racines quelconques de l'équation $\varphi x = 0$. On peut aussi supposer $\alpha = \alpha'$, $\alpha'' = \alpha'''$.

VI.

RECHERCHE DES FONCTIONS DE DEUX QUANTITÉS VARIABLES INDÉPENDANTES x ET y, TELLES QUE $f(x, y)$, QUI ONT LA PROPRIÉTÉ QUE $f(z, f(x, y))$ EST UNE FONCTION SYMÉTRIQUE DE z, x ET y.

Journal für die reine und angewandte Mathematik, herausgegeben von *Crelle*, Bd. I, Berlin 1826.

Si l'on désigne p. ex. les fonctions $x+y$ et xy par $f(x, y)$, on a pour la première, $f(z, f(x, y)) = z + f(x, y) = z + x + y$, et pour la seconde, $f(z, f(x, y)) = zf(x, y) = zxy$. La fonction $f(x, y)$ a donc dans l'un et l'autre cas la propriété remarquable que $f(z, f(x, y))$ est une fonction symétrique des trois variables indépendantes z, x et y. Je vais chercher dans ce mémoire la forme générale des fonctions qui jouissent de cette propriété.

L'équation fondamentale est celle-ci:

(1) $\quad f(z, f(x, y)) =$ une fonction symétrique de x, y et z.

Une fonction symétrique reste la même lorsqu'on y échange entre elles d'une manière quelconque, les quantités variables dont elle dépend. On a donc les équations suivantes:

$$(2)\quad \begin{cases} f(z, f(x, y)) = f(z, f(y, x)), \\ f(z, f(x, y)) = f(x, f(z, y)), \\ f(z, f(x, y)) = f(x, f(y, z)), \\ f(z, f(x, y)) = f(y, f(x, z)), \\ f(z, f(x, y)) = f(y, f(z, x)). \end{cases}$$

La première équation ne peut avoir lieu à moins qu'on n'ait

$$f(x, y) = f(y, x),$$

c'est-à-dire que $f(x, y)$ doit être une fonction symétrique de x et y. Par cette raison les équations (2) se réduisent aux deux suivantes:

$$(3)\quad \begin{aligned} f(z, f(x, y)) &= f(x, f(y, z)), \\ f(z, f(x, y)) &= f(y, f(z, x)). \end{aligned}$$

Soit pour abréger $f(x, y) = r$, $f(y, z) = v$, $f(z, x) = s$, on aura

$$(4)\quad f(z, r) = f(x, v) = f(y, s).$$

En différentiant successivement par rapport à x, y, z, on aura

$$f'r\frac{dr}{dx} = f's\frac{ds}{dx},$$

$$f'v\frac{dv}{dy} = f'r\frac{dr}{dy},$$

$$f's\frac{ds}{dz} = f'v\frac{dv}{dz}.$$

Si l'on multiplie ces équations membre à membre et qu'on divise les produits par $f'r.f'v.f's$, on obtiendra cette équation

$$(5)\quad \frac{dr}{dx}\frac{dv}{dy}\frac{ds}{dz} = \frac{dr}{dy}\frac{dv}{dz}\frac{ds}{dx}$$

ou bien

$$\frac{dr}{dx}\frac{\frac{dv}{dy}}{\frac{dv}{dz}} = \frac{dr}{dy}\frac{\frac{ds}{dx}}{\frac{ds}{dz}}.$$

Si l'on fait z invariable, $\frac{dv}{dy}:\frac{dv}{dz}$ se réduira à une fonction de y seule. Soit φy cette fonction, on aura en même temps $\frac{ds}{dx}:\frac{ds}{dz} = \varphi x$; car s est la même fonction de z et x que v l'est de z et y. Donc

$$(6)\quad \frac{dr}{dx}\varphi y = \frac{dr}{dy}\varphi x.$$

On en tirera, en intégrant, la valeur générale de r,

$$r = \psi\left(\int \varphi x . dx + \int \varphi y . dy\right),$$

ψ étant une fonction arbitraire. En écrivant pour abréger φx pour $\int \varphi x dx$, et φy pour $\int \varphi y dy$, on aura

(7) $$r = \psi(\varphi x + \varphi y), \quad \text{ou} \quad f(x, y) = \psi(\varphi x + \varphi y).$$

Voilà donc la forme que doit avoir la fonction cherchée. Mais elle ne peut pas dans toute sa généralité satisfaire à l'équation (4). En effet l'équation (5), qui donne la forme de la fonction $f(x, y)$, est beaucoup plus générale que l'équation (4), à laquelle elle doit satisfaire. Il s'agit donc des restrictions auxquelles l'équation générale est assujettie. On a

$$f(z, r) = \psi(\varphi z + \varphi r).$$

Or $r = \psi(\varphi x + \varphi y)$, donc

$$f(z, r) = \psi(\varphi z + \varphi\psi(\varphi x + \varphi y)).$$

Cette expression doit être symétrique par rapport à x, y et z. Donc

$$\varphi z + \varphi\psi(\varphi x + \varphi y) = \varphi x + \varphi\psi(\varphi y + \varphi z).$$

Soit $\varphi z = 0$ et $\varphi y = 0$, on aura

$$\varphi\psi\varphi x = \varphi x + \varphi\psi(0) = \varphi x + c,$$

donc en faisant $\varphi x = p$,

$$\varphi\psi p = p + c.$$

En désignant donc par φ_1 la fonction inverse de celle qui est exprimée par φ, de sorte que

$$\varphi\varphi_1 x = x,$$

on trouvera

$$\psi p = \varphi_1(p + c).$$

La forme générale de la fonction cherchée $f(x, y)$ sera donc

$$f(x, y) = \varphi_1(c + \varphi x + \varphi y),$$

et cette fonction a en effet la propriété demandée. On tire de là

$$\varphi f(x, y) = c + \varphi x + \varphi y$$

ou, en mettant $\psi x - c$ à la place de φx, et par conséquent $\psi y - c$ à la place de φy et $\psi f(x, y) - c$ à la place de $\varphi f(x, y)$,

$$\psi f(x, y) = \psi x + \psi y.$$

Cela donne le théorème suivant:

Lorsqu'une fonction $f(x, y)$ de deux quantités variables indépendantes x et y a la propriété que $f(z, f(x, y))$ est une fonction symétrique de x, y et z, il y aura toujours une fonction ψ pour laquelle on a

$$\psi f(x, y) = \psi x + \psi y.$$

La fonction $f(x, y)$ étant donnée, on trouvera aisément la fonction ψx. En effet on aura en différentiant l'équation ci-dessus, par rapport à x et par rapport à y, et faisant pour abréger $f(x, y) = r$

$$\psi' r \frac{dr}{dx} = \psi' x,$$

$$\psi' r \frac{dr}{dy} = \psi' y,$$

donc en éliminant $\psi' r$,

$$\frac{dr}{dy} \psi' x = \frac{dr}{dx} \psi' y,$$

d'où

$$\psi' x = \psi' y \frac{\frac{dr}{dx}}{\frac{dr}{dy}}.$$

Multipliant donc par dx et intégrant, on aura

$$\psi x = \psi' y \int \frac{\frac{dr}{dx}}{\frac{dr}{dy}} dx.$$

Soit par exemple

$$r = f(x, y) = xy,$$

il se trouvera une fonction ψ pour laquelle

$$\psi(xy) = \psi x + \psi y.$$

Comme $r = xy$, on a $\frac{dr}{dx} = y$, $\frac{dr}{dy} = x$, donc

$$\psi x = \psi' y \int \frac{y}{x} dx = y\, \psi' y . \log cx,$$

ou, puisque la quantité y est supposée constante,

$$\psi x = a \log cx.$$

Cela donne $\psi y = a \log cy$, $\psi(xy) = a \log cxy$; on doit donc avoir:

$$a \log cxy = a \log cx + a \log cy,$$

ce qui a effectivement lieu pour $c = 1$.

Par un procédé semblable au précédent, on peut en général trouver des fonctions de deux quantités variables, qui satisfassent à des équations données à trois variables. En effet, par des différentiations successives par rapport aux différentes quantités variables, on trouvera des équations, desquelles on peut éliminer autant de fonctions inconnues qu'on voudra, jusqu'à ce qu'on soit parvenu à une équation qui ne contienne qu'une seule fonction inconnue. Cette équation sera une équation différentielle partielle à deux variables indépendantes. L'expression que donne cette équation contiendra donc un certain nombre de fonctions arbitraires d'une seule quantité variable. Lorsque les fonctions inconnues trouvées de cette manière seront substituées dans l'équation donnée, on trouvera une équation entre plusieurs fonctions d'une seule quantité variable. Pour trouver ces fonctions, on doit différentier de nouveau et l'on parviendra ainsi à des équations différentielles ordinaires, au moyen desquelles on trouvera les fonctions, qui ne sont plus arbitraires. De cette manière on trouvera la forme de toutes les fonctions inconnues, à moins qu'il ne soit impossible de satisfaire à l'équation donnée.

VII.

DÉMONSTRATION DE L'IMPOSSIBILITÉ DE LA RÉSOLUTION ALGÉBRIQUE DES ÉQUATIONS GÉNÉRALES QUI PASSENT LE QUATRIÈME DEGRÉ.

Journal für die reine und angewandte Mathematik, herausgegeben von *Crelle*, Bd. 1, Berlin 1826.

On peut, comme on sait, résoudre les équations générales jusqu'au quatrième degré, mais les équations d'un degré plus élevé, seulement dans des cas particuliers, et, si je ne me trompe, on n'a pas encore répondu d'une manière satisfaisante à la question: "Est-il possible de résoudre en général les équations qui passent le quatrième degré?" Ce mémoire a pour but de répondre à cette question.

Résoudre algébriquement une équation ne veut dire autre chose, que d'exprimer ses racines par des fonctions algébriques des coefficiens. Il faut donc considérer d'abord la forme générale des fonctions algébriques, et chercher ensuite s'il est possible de satisfaire à l'équation donnée, en mettant l'expression d'une fonction algébrique au lieu de l'inconnue.

§ I.

Sur la forme générale des fonctions algébriques.

Soient x', x'', x'''... un nombre fini de quantités quelconques. On dit que v est une fonction *algébrique* de ces quantités, s'il est possible d'exprimer v en x', x'', x'''... à l'aide des opérations suivantes: 1) par l'addition; 2) par la multiplication, soit de quantités dépendant de x', x'', x'''..., soit de quantités qui n'en dépendent pas; 3) par la division; 4) par l'extraction de racines d'indices premiers. Parmi ces opé-

rations nous n'avons pas compté la soustraction, l'élévation à des puissances entières et l'extraction de racines de degrés composés, car elles sont évidemment comprises dans les quatre opérations mentionnées.

Lorsque la fonction v peut se former par les trois premières des opérations ci-dessus, elle est dite *algébrique et rationnelle*, ou seulement *rationnelle:* et si les deux premières opérations sont seules nécessaires, elle est dite *algébrique, rationnelle et entière*, ou seulement *entière*.

Soit $f(x', x'', x''' \ldots)$ une fonction quelconque qui peut s'exprimer par la somme d'un nombre fini de termes de la forme

$$Ax'^{m_1} x''^{m_2} \ldots\ldots$$

où A est une quantité indépendante de x', x'' etc. et où m_1, m_2 etc. désignent des nombres entiers positifs; il est clair que les deux premières opérations ci-dessus sont des cas particuliers de l'opération désignée par $f(x', x'', x''' \ldots)$. On peut donc considérer les fonctions entières, suivant leur définition, comme résultant d'un nombre limité de répétitions de cette opération. En désignant par v', v'', v''' etc. plusieurs fonctions des quantités x', x'' $x''' \ldots.$ de la même forme que $f(x', x'' \ldots.)$, la fonction $f(v', v'' \ldots.)$ sera évidemment de la même forme que $f(x', x'' \ldots)$. Or $f(v', v'' \ldots)$ est l'expression générale des fonctions qui résultent de l'opération $f(x', x'' \ldots.)$ deux fois répétée. On trouvera donc toujours le même résultat en répétant cette opération autant de fois qu'on voudra. Il suit de là, que toute fonction entière de plusieurs quantités x', $x'' \ldots..$ peut être exprimée par une somme de plusieurs termes de la forme $Ax'^{m_1} x''^{m_2} \ldots..$

Considérons maintenant les fonctions rationnelles. Lorsque $f(x', x'' \ldots)$ et $\varphi(x', x'' \ldots)$ sont deux fonctions entières, il est évident, que les trois premières opérations sont des cas particuliers de l'opération désignée par

$$\frac{f(x', x'' \ldots)}{\varphi(x', x'' \ldots)}.$$

On peut donc considérer une fonction rationnelle comme le résultat de la répétition de cette opération. Si l'on désigne par v', v'', v''' etc. plusieurs fonctions de la forme $\frac{f(x', x'' \ldots)}{\varphi(x', x'' \ldots)}$, on voit aisément que la fonction $\frac{f(v', v'' \ldots)}{\varphi(v', v'' \ldots)}$ peut être réduite à la même forme. Il suit de là, que toute fonction rationnelle de plusieurs quantités x', $x'' \ldots..$ peut toujours être réduite à la forme

$$\frac{f(x', x'' \ldots.)}{\varphi(x', x'' \ldots.)},$$

où le numérateur et le dénominateur sont des fonctions entières.

Enfin nous allons chercher la forme générale des fonctions algébriques. Désignons par $f(x', x'' \ldots)$ une fonction rationnelle quelconque, il est clair que toute fonction algébrique peut être composée à l'aide de l'opération désignée par $f(x', x'' \ldots)$ combinée avec l'opération $\sqrt[m]{r}$, où m est un nombre premier. Donc, si $p', p'' \ldots$ sont des fonctions rationnelles de $x', x'' \ldots$,

$$p_1 = f(x', x'' \ldots \sqrt[n']{p'}, \sqrt[n'']{p''} \ldots)$$

sera la forme générale des fonctions algébriques de $x', x'' \ldots$, dans lesquelles l'opération exprimée par $\sqrt[m]{r}$ affecte seulement des fonctions rationnelles. Les fonctions de la forme p_1 seront dites fonctions algébriques *du premier ordre*. En désignant par $p_1', p_1'' \ldots$ plusieurs quantités de la forme p_1, l'expression

$$p_2 = f(x', x'' \ldots \sqrt[n']{p'}, \sqrt[n'']{p''} \ldots \sqrt[n_1']{p_1'}, \sqrt[n_1'']{p_1''} \ldots)$$

sera la forme générale des fonctions algébriques de $x', x'' \ldots$, dans lesquelles l'opération $\sqrt[m]{r}$ affecte seulement des fonctions rationnelles, et des fonctions algébriques du premier ordre. Les fonctions de la forme p_2 seront dites fonctions algébriques *du deuxième ordre*. De la même manière l'expression

$$p_3 = f(x', x'' \ldots \sqrt[n']{p'}, \sqrt[n'']{p''} \ldots \sqrt[n_1']{p_1'}, \sqrt[n_1'']{p_1''}, \ldots \sqrt[n_2']{p_2'}, \sqrt[n_2'']{p_2''} \ldots),$$

dans laquelle $p_2', p_2'' \ldots$ sont des fonctions du deuxième ordre, sera la forme générale des fonctions algébriques de $x', x'' \ldots$, dans lesquelles l'opération $\sqrt[m]{r}$ n'affecte que des fonctions rationnelles, et des fonctions algébriques du premier et du deuxième ordre.

En continuant de cette manière, on obtiendra des fonctions algébriques du troisième, du quatrième . . . du $\mu^{\text{ième}}$ ordre, et il est clair, que l'expression des fonctions du $\mu^{\text{ième}}$ ordre, sera l'expression *générale* des fonctions algébriques.

Donc en désignant par μ l'ordre d'une fonction algébrique quelconque et par v la fonction même, on aura

$$v = f(r', r'' \ldots \sqrt[n']{p'}, \sqrt[n'']{p''} \ldots),$$

où $p', p'' \ldots$ sont des fonctions de l'ordre $\mu - 1$; $r', r'' \ldots$ des fonctions de l'ordre $\mu - 1$ ou des ordres moins élevés, et $n', n'' \ldots$ des nombres premiers; f désigne toujours une fonction rationnelle des quantités comprises entre les parenthèses.

On peut évidemment supposer qu'il est impossible d'exprimer l'une des quantités $\sqrt[n']{p'}, \sqrt[n'']{p''} \ldots$ par une fonction rationnelle des autres et des quantités $r', r'' \ldots$; car dans le cas contraire, la fonction v aurait cette forme plus simple,

$$v = f(r', r'' \ldots \sqrt[n']{p'}, \sqrt[n'']{p''} \ldots),$$

où le nombre des quantités $\sqrt[n']{p'}, \sqrt[n'']{p''} \ldots$ serait diminué au moins d'une unité. En réduisant de cette manière l'expression de v autant que possible, on parviendrait, ou à une expression irréductible, ou à une expression de la forme

$$v = f(r', r'', r''' \ldots);$$

mais cette fonction serait seulement de l'ordre $\mu - 1$, tandis que v doit être du $\mu^{\text{ième}}$ ordre, ce qui est une contradiction.

Si dans l'expression de v le nombre des quantités $\sqrt[n']{p'}, \sqrt[n'']{p''} \ldots$ est égal à m, nous dirons que la fonction v est du $\mu^{\text{ième}}$ *ordre* et du $m^{\text{ième}}$ *degré*. On voit donc qu'une fonction de l'ordre μ et du degré 0 est la même chose qu'une fonction de l'ordre $\mu - 1$, et qu'une fonction de l'ordre 0 est la même chose qu'une fonction rationnelle.

Il suit de là, qu'on peut poser

$$v = f(r', r'' \ldots \sqrt[n]{p}),$$

où p est une fonction de l'ordre $\mu - 1$, mais $r', r'' \ldots$ des fonctions du $\mu^{\text{ième}}$ ordre et tout au plus du degré $m - 1$, et qu'on peut toujours supposer qu'il est impossible d'exprimer $\sqrt[n]{p}$ par une fonction rationnelle de ces quantités.

Dans ce qui précède nous avons vu qu'une fonction rationnelle de plusieurs quantités peut toujours être réduite à la forme

$$\frac{s}{t},$$

où s et t sont des fonctions entières des mêmes quantités variables. On

conclut de là que v peut toujours être exprimé comme il suit,

$$v = \frac{\varphi(v', v'' \dots \sqrt[n]{p})}{\tau(v', v'' \dots \sqrt[n]{p})},$$

où φ et τ désignent des fonctions entières des quantités $v', v'' \dots$ et $\sqrt[n]{p}$. En vertu de ce que nous avons trouvé plus haut, toute fonction entière de plusieurs quantités $s, v', v'' \dots$ peut s'exprimer par la forme

$$t_0 + t_1 s + t_2 s^2 + \dots + t_m s^m,$$

$t_0, t_1 \dots t_m$ étant des fonctions entières de $v', v'', v''' \dots$ sans s. On peut donc poser

$$v = \frac{t_0 + t_1 p^{\frac{1}{n}} + t_2 p^{\frac{2}{n}} + \dots + t_m p^{\frac{m}{n}}}{v_0 + v_1 p^{\frac{1}{n}} + v_2 p^{\frac{2}{n}} + \dots + v_{m'} p^{\frac{m'}{n}}} = \frac{T}{V},$$

où $t_0, t_1 \dots t_m$ et $v_0, v_1 \dots v_{m'}$ sont des fonctions entières de v', v'', v''' etc.

Soient $V_1, V_2 \dots V_{n-1}$ les $n-1$ valeurs de V qu'on trouve en mettant successivement $\alpha p^{\frac{1}{n}}, \alpha^2 p^{\frac{1}{n}}, \alpha^3 p^{\frac{1}{n}} \dots \alpha^{n-1} p^{\frac{1}{n}}$ au lieu de $p^{\frac{1}{n}}$, α étant une racine différente de l'unité de l'équation $\alpha^n - 1 = 0$; on trouvera en multipliant le numérateur et le dénominateur de $\frac{T}{V}$ par $V_1 V_2 V_3 \dots V_{n-1}$

$$v = \frac{T V_1 V_2 \dots V_{n-1}}{V V_1 V_2 \dots V_{n-1}}.$$

Le produit $V V_1 \dots V_{n-1}$ peut, comme on sait, s'exprimer par une fonction entière de p et des quantités $v', v'' \dots$, et le produit $T V_1 \dots V_{n-1}$ est, comme on le voit, une fonction entière de $\sqrt[n]{p}$ et de $v', v'' \dots$. En supposant ce produit égal à

$$s_0 + s_1 p^{\frac{1}{n}} + s_2 p^{\frac{2}{n}} + \dots + s_k p^{\frac{k}{n}},$$

on trouve

$$v = \frac{s_0 + s_1 p^{\frac{1}{n}} + s_2 p^{\frac{2}{n}} + \dots + s_k p^{\frac{k}{n}}}{m},$$

ou, en écrivant $q_0, q_1, q_2 \dots$ au lieu de $\frac{s_0}{m}, \frac{s_1}{m}, \frac{s_2}{m}$ etc.,

$$v = q_0 + q_1 p^{\frac{1}{n}} + q_2 p^{\frac{2}{n}} + \cdots + q_k p^{\frac{k}{n}},$$

où q_0, $q_1 \ldots q_k$ sont des fonctions rationnelles des quantités p, r', $r'' \ldots$ etc.

Soit μ un nombre entier quelconque, on peut toujours poser

$$\mu = an + \alpha,$$

a et α étant deux nombres entiers, et $\alpha < n$. Il suit de là, que

$$p^{\frac{\mu}{n}} = p^{\frac{an+\alpha}{n}} = p^a p^{\frac{\alpha}{n}}.$$

En mettant donc cette expression au lieu de $p^{\frac{\mu}{n}}$ dans l'expression de v, on obtiendra

$$v = q_0 + q_1 p^{\frac{1}{n}} + q_2 p^{\frac{2}{n}} + \cdots + q_{n-1} p^{\frac{n-1}{n}},$$

q_0, q_1, q_2 étant encore des fonctions rationnelles de p, r', $r'' \ldots$, et par conséquent des fonctions du $\mu^{\text{ième}}$ ordre et au plus du degré $m-1$, et telles qu'il soit impossible d'exprimer $p^{\frac{1}{n}}$ rationnellement par ces quantités.

Dans l'expression de v ci-dessus, on peut toujours faire $q_1 = 1$. Car si q_1 n'est pas nul, on obtiendra, en faisant $p_1 = p q_1^n$,

$$p = \frac{p_1}{q_1^n}, \quad p^{\frac{1}{n}} = \frac{p_1^{\frac{1}{n}}}{q_1},$$

donc

$$v = q_0 + p_1^{\frac{1}{n}} + \frac{q_2}{q_1^2} p_1^{\frac{2}{n}} + \cdots + \frac{q_{n-1}}{q_1^{n-1}} p_1^{\frac{n-1}{n}},$$

expression de la même forme que la précédente, sauf que $q_1 = 1$. Si $q_1 = 0$, soit q_μ une des quantités q_1, $q_2 \ldots q_{n-1}$, qui ne soit pas nulle, et soit $q_\mu^n p^\mu = p_1$. On déduit de là $q_\mu^\alpha p^{\frac{\alpha\mu}{n}} = p_1^{\frac{\alpha}{n}}$. Donc en prenant deux nombres entiers α et β, qui satisfassent à l'équation $\alpha\mu - \beta n = \mu'$, μ' étant un nombre entier, on aura

$$q_\mu^\alpha p^{\frac{\beta n + \mu'}{n}} = p_1^{\frac{\alpha}{n}} \quad \text{et} \quad p^{\frac{\mu'}{n}} = q_\mu^{-\alpha} p^{-\beta} p_1^{\frac{\alpha}{n}}.$$

En vertu de cela et en remarquant que $q_\mu p^{\frac{\mu}{n}} = p_1^{\frac{1}{n}}$, v aura la forme

$$v = q_0 + p_1^{\frac{1}{n}} + q_2 p_1^{\frac{2}{n}} + \cdots + q_{n-1} p_1^{\frac{n-1}{n}}.$$

De tout ce qui précède on conclut: Si v est une fonction algébrique de l'ordre μ et du degré m, on peut toujours poser:

$$v = q_0 + p^{\frac{1}{n}} + q_2 p^{\frac{2}{n}} + q_3 p^{\frac{3}{n}} + \cdots + q_{n-1} p^{\frac{n-1}{n}},$$

n étant un nombre premier, $q_0, q_2 \ldots q_{n-1}$ des fonctions algébriques de l'ordre μ et du degré $m-1$ au plus, p une fonction algébrique de l'ordre $\mu - 1$, et telle que $p^{\frac{1}{n}}$ ne puisse s'exprimer rationnellement en $q_0, q_1 \ldots q_{n-1}$.

§ II.

Propriétés des fonctions algébriques qui satisfont à une équation donnée.

Soit

(1) $$c_0 + c_1 y + c_2 y^2 + \cdots + c_{r-1} y^{r-1} + y^r = 0$$

une équation quelconque du degré r, où $c_0, c_1 \ldots$ sont des fonctions rationnelles de $x', x'' \ldots$, $x', x'' \ldots$ étant des quantités indépendantes quelconques. Supposons qu'on puisse satisfaire à cette équation, en mettant au lieu de y une fonction algébrique de $x', x'' \ldots$. Soit

(2) $$y = q_0 + p^{\frac{1}{n}} + q_2 p^{\frac{2}{n}} + \cdots + q_{n-1} p^{\frac{n-1}{n}}$$

cette fonction. En substituant cette expression de y, dans l'équation proposée, on obtiendra, en vertu de ce qui précède, une expression de la forme

(3) $$r_0 + r_1 p^{\frac{1}{n}} + r_2 p^{\frac{2}{n}} + \cdots + r_{n-1} p^{\frac{n-1}{n}} = 0,$$

où $r_0, r_1, r_2 \ldots r_{n-1}$ sont des fonctions rationnelles des quantités $p, q_0, q_1 \ldots q_{n-1}$.

Or je dis que l'équation (3) ne peut avoir lieu, à moins qu'on n'ait séparément

$$r_0 = 0, \quad r_1 = 0 \ldots\ldots r_{n-1} = 0.$$

En effet, dans le cas contraire, on aurait en posant $p^{\frac{1}{n}} = z$ les deux équations

$$z^n - p = 0$$

et

$$r_0 + r_1 z + r_2 z^2 + \cdots + r_{n-1} z^{n-1} = 0,$$

qui auraient une ou plusieurs *racines communes*. Soit k le nombre de ces racines, on peut, comme on sait, trouver une équation qui a pour racines les k racines mentionnées, et dont les coefficiens sont des fonctions rationnelles de p, r_0, $r_1 \ldots r_{n-1}$. Soit

$$s_0 + s_1 z + s_2 z^2 + \cdots + s_{k-1} z^{k-1} + z^k = 0$$

cette équation, et

$$t_0 + t_1 z + t_2 z^2 + \cdots + t_{\mu-1} z^{\mu-1} + z^\mu$$

un facteur de son premier membre, où t_0, t_1 etc. sont des fonctions rationnelles de p, r_0, $r_1 \ldots r_{n-1}$, on aura de même

$$t_0 + t_1 z + t_2 z^2 + \cdots + t_{\mu-1} z^{\mu-1} + z^\mu = 0,$$

et il est clair qu'on peut supposer qu'il est impossible de trouver une équation de la même forme d'un degré moins élevé. Cette équation a ses μ racines communes avec l'équation $z^n - p = 0$. Or toutes les racines de l'équation $z^n - p = 0$, sont de la forme αz, où α est une racine quelconque de l'unité. Donc en remarquant que μ ne peut être moindre que 2, parce qu'il est impossible d'exprimer z en fonction rationnelle des quantités p, r_0, $r_1 \ldots r_{n-1}$, il s'ensuit, que deux équations de la forme

$$t_0 + t_1 z + t_2 z^2 + \cdots + t_{\mu-1} z^{\mu-1} + z^\mu = 0,$$

et

$$t_0 + \alpha t_1 z + \alpha^2 t_2 z^2 + \cdots + \alpha^{\mu-1} t_{\mu-1} z^{\mu-1} + \alpha^\mu z^\mu = 0$$

doivent avoir lieu. De ces équations on tire, en éliminant z^μ,

$$t_0(1 - \alpha^\mu) + t_1(\alpha - \alpha^\mu) z + \cdots + t_{\mu-1}(\alpha^{\mu-1} - \alpha^\mu) z^{\mu-1} = 0.$$

Mais cette équation étant du degré $\mu - 1$, et l'équation

$$z^\mu + t_{\mu-1} z^{\mu-1} + \cdots = 0$$

étant irréductible, et par conséquent t_0 ne pouvant être égal à zéro, on doit avoir $\alpha^\mu - 1 = 0$, ce qui n'a pas lieu. On doit donc avoir

$$r_0 = 0, \quad r_1 = 0 \ldots r_{n-1} = 0.$$

Maintenant, ces équations ayant lieu, il est clair que l'équation proposée sera satisfaite par toutes les valeurs de y qu'on obtient en attribuant à $p^{\frac{1}{n}}$ toutes les valeurs $\alpha p^{\frac{1}{n}}$, $\alpha^2 p^{\frac{1}{n}} \ldots \alpha^{n-1} p^{\frac{1}{n}}$. On voit aisément que toutes

ces valeurs de y seront différentes entre elles; car dans le cas contraire on aurait une équation de la même forme que (3), mais une telle équation conduit, comme on vient de le voir, à des contradictions.

En désignant donc par $y_1, y_2 \dots y_n$ n racines différentes de l'équation (1), on aura

$$y_1 = q_0 + p^{\frac{1}{n}} + q_2 p^{\frac{2}{n}} + \dots + q_{n-1} p^{\frac{n-1}{n}},$$

$$y_2 = q_0 + \alpha p^{\frac{1}{n}} + \alpha^2 q_2 p^{\frac{2}{n}} + \dots + \alpha^{n-1} q_{n-1} p^{\frac{n-1}{n}},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$y_n = q_0 + \alpha^{n-1} p^{\frac{1}{n}} + \alpha^{n-2} q_2 p^{\frac{2}{n}} + \dots + \alpha q_{n-1} p^{\frac{n-1}{n}}.$$

De ces n équations on tirera sans peine

$$q_0 = \frac{1}{n}(y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_n),$$

$$p^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}(y_1 + \alpha^{n-1} y_2 + \alpha^{n-2} y_3 + \dots + \alpha y_n),$$

$$q_2 p^{\frac{2}{n}} = \frac{1}{n}(y_1 + \alpha^{n-2} y_2 + \alpha^{n-4} y_3 + \dots + \alpha^2 y_n),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$q_{n-1} p^{\frac{n-1}{n}} = \frac{1}{n}(y_1 + \alpha y_2 + \alpha^2 y_3 + \dots + \alpha^{n-1} y_n).$$

On voit par là que toutes les quantités $p^{\frac{1}{n}}$, q_0, $q_2 \dots q_{n-1}$ sont des fonctions rationnelles des racines de l'équation proposée. En effet on a

$$q_\mu = n^{\mu-1} \frac{y_1 + \alpha^{-\mu} y_2 + \alpha^{-2\mu} y_3 + \dots + \alpha^{-(n-1)\mu} y_n}{(y_1 + \alpha^{-1} y_2 + \alpha^{-2} y_3 + \dots + \alpha^{-(n-1)} y_n)^\mu}.$$

Considérons maintenant l'équation générale du degré m,

$$0 = a + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{m-1} x^{m-1} + x^m,$$

et supposons qu'elle soit résoluble algébriquement. Soit

$$x = s_0 + v^{\frac{1}{n}} + s_2 v^{\frac{2}{n}} + \dots + s_{n-1} v^{\frac{n-1}{n}};$$

en vertu de ce qui précède, les quantités v, s_0, s_2 etc. peuvent s'exprimer rationnellement en $x_1, x_2 \dots x_m$, en désignant par $x_1, x_2 \dots x_m$ les racines de l'équation proposée.

Considérons l'une quelconque des quantités v, s_0, s_2 etc. par exemple v. Si l'on désigne par v_1, $v_2 \ldots v_{n'}$ les valeurs différentes de v, qu'on trouve lorsqu'on échange entre elle les racines x_1, $x_2 \ldots x_m$ de toutes les manières possibles, on pourra former une équation du degré n' dont les coefficiens sont des fonctions rationnelles de a, $a_1 \ldots a_{m-1}$, et dont les racines sont les quantités v_1, $v_2 \ldots v_{n'}$, qui sont des fonctions rationnelles des quantités x_1, $x_2 \ldots x_m$.

Donc si l'on pose

$$v = t_0 + u^{\frac{1}{\nu}} + t_2 u^{\frac{2}{\nu}} + \cdots + t_{\nu-1} u^{\frac{\nu-1}{\nu}},$$

toutes les quantités $u^{\frac{1}{\nu}}$, t_0, $t_2 \ldots . t_{\nu-1}$ seront des fonctions rationnelles de v_1, $v_2 \ldots . v_{n'}$, et par conséquent de x_1, $x_2 \ldots . x_m$. En traitant les quantités u, t_0, t_2 etc. de la même manière, on en conclut que

> si une équation est résoluble algébriquement, on peut toujours donner à la racine une forme telle, que toutes les fonctions algébriques dont elle est composée puissent s'exprimer par des fonctions rationnelles des racines de l'équation proposée.

§ III.

Sur le nombre des valeurs différentes qu'une fonction de plusieurs quantités peut acquérir, lorsqu'on échange entre elles les quantités qu'elle renferme.

Soit v une fonction rationnelle de plusieurs quantités indépendantes x_1, $x_2 \ldots x_n$. Le nombre des valeurs différentes dont cette fonction est susceptible par l'échange des quantités dont elle dépend, ne peut surpasser le produit $1.2.3 \ldots n$. Soit μ ce produit.

Soit maintenant

$$v\begin{pmatrix}\alpha\beta\gamma\delta\ldots.\\ a\,b\,c\,d\ldots.\end{pmatrix}$$

la valeur qu'une fonction quelconque v reçoit, lorsqu'on y substitue x_a, x_b, x_c, x_d etc. au lieu de x_α, x_β, x_γ, x_δ etc., il est clair qu'en désignant par A_1, $A_2 \ldots A_\mu$ les diverses permutations en nombre de μ que l'on peut former avec les indices 1, 2, $3 \ldots n$, les valeurs différentes de v pourront être exprimées par

$$v\begin{pmatrix}A_1\\A_1\end{pmatrix},\quad v\begin{pmatrix}A_1\\A_2\end{pmatrix},\quad v\begin{pmatrix}A_1\\A_3\end{pmatrix}\ldots . v\begin{pmatrix}A_1\\A_\mu\end{pmatrix}.$$

Supposons que le nombre des valeurs différentes de v soit moindre que μ, il faudra que plusieurs valeurs de v soient égales entre elles, en sorte qu'on ait par exemple

$$v\begin{pmatrix}A_1\\A_1\end{pmatrix}=v\begin{pmatrix}A_1\\A_2\end{pmatrix}=\cdots=v\begin{pmatrix}A_1\\A_m\end{pmatrix}.$$

Si l'on fait subir à ces quantités la substitution désignée par $\begin{pmatrix}A_1\\A_{m+1}\end{pmatrix}$, on aura cette nouvelle série de valeurs égales

$$v\begin{pmatrix}A_1\\A_{m+1}\end{pmatrix}=v\begin{pmatrix}A_1\\A_{m+2}\end{pmatrix}=\cdots=v\begin{pmatrix}A_1\\A_{2m}\end{pmatrix},$$

valeurs qui sont différentes des premières, mais en même nombre. En changeant de nouveau ces quantités par la substitution désignée par $\begin{pmatrix}A_1\\A_{2m+1}\end{pmatrix}$, on aura un nouveau système de quantités égales, mais différentes des précédentes. En continuant ce procédé jusqu'à ce qu'on ait épuisé toutes les permutations possibles, les μ valeurs de v seront partagées en plusieurs systèmes, dont chacun contiendra un nombre de m valeurs égales. Il suit de là que si l'on représente le nombre des valeurs différentes de v par ϱ, nombre égal à celui des systèmes, on aura

$$\varrho m=1.2.3\ldots n,$$

c'est-à-dire:

Le nombre des valeurs différentes qu'une fonction de n quantités peut acquérir par toutes les substitutions possibles entre ces quantités, est nécessairement un diviseur du produit $1.2.3\ldots n$. Cela est connu.

Soit maintenant $\begin{pmatrix}A_1\\A_m\end{pmatrix}$ une substitution quelconque. Supposons qu'en appliquant celle-ci plusieurs fois de suite à la fonction v on obtienne la suite des valeurs

$$v,\ v_1,\ v_2\ldots v_{p-1},\ v_p,$$

il est clair que v sera nécessairement répété plusieurs fois. Lorsque v revient après un nombre p de substitutions, nous disons que $\begin{pmatrix}A_1\\A_m\end{pmatrix}$ est une *substitution récurrente de l'ordre p*. On a donc cette série périodique

$$v,\ v_1,\ v_2\ldots v_{p-1},\ v,\ v_1,\ v_2\ldots$$

ou bien, si l'on représente par $v\begin{pmatrix}A_1\\A_m\end{pmatrix}^r$ la valeur de v qu'on obtient après



avoir répété r fois de suite la substitution désignée par $\begin{pmatrix}A_1\\A_m\end{pmatrix}$, on a la série

$$v\begin{pmatrix}A_1\\A_m\end{pmatrix}^0,\ v\begin{pmatrix}A_1\\A_m\end{pmatrix}^1,\ v\begin{pmatrix}A_1\\A_m\end{pmatrix}^2 \dots v\begin{pmatrix}A_1\\A_m\end{pmatrix}^{p-1},\ v\begin{pmatrix}A_1\\A_m\end{pmatrix}^0 \dots$$

Il suit de là que

$$v\begin{pmatrix}A_1\\A_m\end{pmatrix}^{ap+r} = v\begin{pmatrix}A_1\\A_m\end{pmatrix}^r$$

$$v\begin{pmatrix}A_1\\A_m\end{pmatrix}^{ap} = v\begin{pmatrix}A_1\\A_m\end{pmatrix}^0 = v.$$

Or soit p le plus grand nombre premier contenu dans n, si le nombre des valeurs différentes de v est moindre que p, il faut qu'entre p valeurs quelconques, deux soient égales entre elles.

Il faut donc que des p valeurs,

$$v\begin{pmatrix}A_1\\A_m\end{pmatrix}^0,\ v\begin{pmatrix}A_1\\A_m\end{pmatrix}^1,\ v\begin{pmatrix}A_1\\A_m\end{pmatrix}^2 \dots v\begin{pmatrix}A_1\\A_m\end{pmatrix}^{p-1},$$

deux soient égales entre elles. Soit par exemple

$$v\begin{pmatrix}A_1\\A_m\end{pmatrix}^r = v\begin{pmatrix}A_1\\A_m\end{pmatrix}^{r'},$$

on en conclut que

$$v\begin{pmatrix}A_1\\A_m\end{pmatrix}^{r+p-r} = v\begin{pmatrix}A_1\\A_m\end{pmatrix}^{r'+p-r}.$$

Écrivant r au lieu de $r'+p-r$ et remarquant que $v\begin{pmatrix}A_1\\A_m\end{pmatrix}^p = v$, on en tire

$$v = v\begin{pmatrix}A_1\\A_m\end{pmatrix}^r,$$

où r évidemment n'est pas multiple de p. La valeur de v n'est donc pas changée par la substitution $\begin{pmatrix}A_1\\A_m\end{pmatrix}^r$, ni par conséquent non plus par la répétition de la même substitution. On a donc

$$v = v\begin{pmatrix}A_1\\A_m\end{pmatrix}^{r\alpha},$$

α étant un nombre entier. Maintenant si p est un nombre premier, on pourra évidemment toujours trouver deux nombres entiers α et β tels que

$$r\alpha = p\beta + 1,$$

donc

$$v = v\begin{pmatrix} A_1 \\ A_m \end{pmatrix}^{p\beta+1},$$

et puisque

$$v = v\begin{pmatrix} A_1 \\ A_m \end{pmatrix}^{p\beta},$$

on aura

$$v = v\begin{pmatrix} A_1 \\ A_m \end{pmatrix}.$$

La valeur de v ne sera donc pas changée par la substitution récurrente $\begin{pmatrix} A_1 \\ A_m \end{pmatrix}$ de l'ordre p.

Or il est clair que

$$\begin{pmatrix} \alpha\beta\gamma\delta\ldots\zeta\eta \\ \beta\gamma\delta\varepsilon\ldots\eta\alpha \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} \beta\gamma\delta\varepsilon\ldots\eta\alpha \\ \gamma\alpha\beta\delta\ldots\zeta\eta \end{pmatrix}$$

sont des substitutions récurrentes de l'ordre p, lorsque p est le nombre des indices $\alpha, \beta, \gamma \ldots \eta$. La valeur de v ne sera donc pas changée non plus par la combinaison de ces deux substitutions. Ces deux substitutions sont évidemment équivalentes à cette unique

$$\begin{pmatrix} \alpha\beta\gamma \\ \gamma\alpha\beta \end{pmatrix},$$

et celle-ci aux deux suivantes, appliquées successivement,

$$\begin{pmatrix} \alpha\beta \\ \beta\alpha \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} \beta\gamma \\ \gamma\beta \end{pmatrix}.$$

La valeur de v ne sera donc pas changée par la combinaison de ces deux substitutions. Donc

$$v = v\begin{pmatrix} \alpha\beta \\ \beta\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta\gamma \\ \gamma\beta \end{pmatrix};$$

de même

$$v = v\begin{pmatrix} \beta\gamma \\ \gamma\beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma\delta \\ \delta\gamma \end{pmatrix},$$

d'où l'on tire

$$v = v\begin{pmatrix} \alpha\beta \\ \beta\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma\delta \\ \delta\gamma \end{pmatrix}.$$

On voit par là que la fonction v n'est pas changée par deux substitutions successives de la forme $\begin{pmatrix} \alpha\beta \\ \beta\alpha \end{pmatrix}$, α et β étant deux indices quelcon-

ques. Si l'on désigne une telle substitution par le nom de *transposition*, on peut conclure qu'une valeur quelconque de v ne sera pas changée par un nombre pair de transpositions, et que par conséquent toutes les valeurs de v qui résultent d'un nombre impair de transpositions sont égales. Tout échange des élémens d'une fonction peut s'opérer à l'aide d'un certain nombre de transpositions; donc la fonction v ne peut avoir plus de deux valeurs différentes. De là on tire le théorème suivant:

> Le nombre des valeurs différentes que peut obtenir une fonction de n quantités, ne peut être abaissé au dessous du plus grand nombre premier qui ne surpasse pas n, à moins qu'il ne se réduise à 2 ou à 1.

Il est donc impossible de trouver une fonction de 5 quantités qui ait 3 ou 4 valeurs différentes.

La démonstration de ce théorème est prise d'un mémoire de M. *Cauchy* inséré dans le 17ième cahier du Journal de l'école polytechnique p. 1.

Soient v et v' deux fonctions dont chacune ait deux valeurs différentes, il suit de ce qui précède qu'en désignant par v_1, v_2 et v_1', v_2' ces doubles valeurs, les deux expressions

$$v_1 + v_2 \quad \text{et} \quad v_1 v_1' + v_2 v_2'$$

seront des fonctions symétriques. Soit

$$v_1 + v_2 = t \quad \text{et} \quad v_1 v_1' + v_2 v_2' = t_1,$$

on en tire

$$v_1 = \frac{t v_2' - t_1}{v_2' - v_1'}.$$

Soit maintenant le nombre des quantités $x_1, x_2 \ldots x_m$ égal à cinq, le produit

$$\varrho = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)(x_1 - x_5)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)(x_2 - x_5)(x_3 - x_4)(x_3 - x_5)(x_4 - x_5)$$

sera évidemment une fonction qui a deux valeurs différentes; la seconde valeur étant la même fonction avec le signe opposé. Donc en posant $v_1' = \varrho$, on aura $v_2' = -\varrho$. L'expression de v_1 sera donc

$$v_1 = \frac{t_1 + \varrho t}{2\varrho},$$

ou bien

$$v_1 = \tfrac{1}{2} t + \frac{t_1}{2\varrho^2}\varrho,$$

où $\frac{1}{2}t$ est une fonction symétrique; ϱ a deux valeurs qui ne diffèrent que par le signe, de sorte que $\frac{t_1}{2\varrho^2}$ est également une fonction symétrique.

Donc, en posant $\frac{1}{2}t = p$ et $\frac{t_1}{2\varrho^2} = q$, il s'ensuit que

toute fonction de cinq quantités qui a deux valeurs différentes pourra être mise sous la forme $p + q\varrho$, où p et q sont deux fonctions symétriques et $\varrho = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \ldots (x_4 - x_5)$.

Pour atteindre notre but nous avons encore besoin de la forme générale des fonctions de cinq quantités qui ont cinq valeurs différentes. On peut la trouver comme il suit:

Soit v une fonction rationnelle des quantités x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, qui ait la propriété d'être invariable lorsqu'on échange entre elles quatre des cinq quantités, par exemple x_2, x_3, x_4, x_5. Dans cette condition v sera évidemment symétrique par rapport à x_2, x_3, x_4, x_5. On peut donc exprimer v par une fonction rationnelle de x_1 et par des fonctions symétriques de x_2, x_3, x_4, x_5. Mais toute fonction symétrique de ces quantités peut s'exprimer par une fonction rationnelle des coefficiens d'une équation du quatrième degré, dont les racines sont x_2, x_3, x_4, x_5. Donc en posant

$$(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)(x - x_5) = x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s,$$

la fonction v peut s'exprimer rationnellement en x_1, p, q, r, s. Mais si l'on pose

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)(x - x_5) = x^5 - ax^4 + bx^3 - cx^2 + dx - e,$$

on aura

$$\begin{aligned}(x - x_1)(x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s) &= x^5 - ax^4 + bx^3 - cx^2 + dx - e \\ &= x^5 - (p + x_1)x^4 + (q + px_1)x^3 - (r + qx_1)x^2 + (s + rx_1)x - sx_1,\end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned} p &= a - x_1, \\ q &= b - ax_1 + x_1^2, \\ r &= c - bx_1 + ax_1^2 - x_1^3, \\ s &= d - cx_1 + bx_1^2 - ax_1^3 + x_1^4; \end{aligned}$$

la fonction v peut donc s'exprimer rationnellement en x_1, a, b, c, d.

Il suit de là que la fonction v peut être mise sous la forme

$$v = \frac{t}{\varphi x_1},$$

où t et φx_1 sont deux fonctions entières de x_1, a, b, c, d. En multipliant



le numérateur et le dénominateur de cette fonction par $\varphi x_2 . \varphi x_3 . \varphi x_4 . \varphi x_5$, on aura

$$v = \frac{t . \varphi x_2 . \varphi x_3 . \varphi x_4 . \varphi x_5}{\varphi x_1 . \varphi x_2 . \varphi x_3 . \varphi x_4 . \varphi x_5}.$$

Or $\varphi x_2 . \varphi x_3 . \varphi x_4 . \varphi x_5$ est, comme on le voit, une fonction entière et symétrique de x_2, x_3, x_4, x_5. On peut donc exprimer ce produit en fonction entière de p, q, r, s et par suite en fonction entière de x_1, a, b, c, d. Le numérateur de la fraction ci-dessus est donc une fonction entière des mêmes quantités; le dénominateur est une fonction symétrique de x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 et par conséquent il peut s'exprimer en fonction rationnelle de a, b, c, d, e. On peut donc poser

$$v = r_0 + r_1 x_1 + r_2 x_1^2 + \cdots + r_m x_1^m.$$

En multipliant l'équation

$$x_1^5 = a x_1^4 - b x_1^3 + c x_1^2 - d x_1 + e$$

successivement par x_1, $x_1^2 \ldots x_1^{m-5}$, il est clair qu'on obtiendra $m-4$ équations, desquelles on tirera pour x_1^5, $x_1^6 \ldots x_1^m$ des expressions de la forme

$$\alpha + \beta x_1 + \gamma x_1^2 + \delta x_1^3 + \varepsilon x_1^4,$$

où α, β, γ, δ, ε sont des fonctions rationnelles de a, b, c, d, e.

On peut donc réduire v à la forme

(a) $$v = r_0 + r_1 x_1 + r_2 x_1^2 + r_3 x_1^3 + r_4 x_1^4,$$

où r_0, r_1, r_2 etc. sont des fonctions rationnelles de a, b, c, d, e, c'est-à-dire des fonctions symétriques de x_1, x_2, x_3, x_4, x_5.

Voilà la forme générale des fonctions qui ne sont pas altérées lorsqu'on y échange entre elles les quantités x_2, x_3, x_4, x_5. Ou elles ont cinq valeurs différentes, ou elles sont symétriques.

Soit maintenant v une fonction rationnelle de x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, qui ait les cinq valeurs suivantes v_1, v_2, v_3, v_4, v_5. Considérons la fonction $x_1^m v$. En y échangeant entre elles de toutes les manières possibles les quatre quantités x_2, x_3, x_4, x_5, la fonction $x_1^m v$ aura toujours une des valeurs suivantes

$$x_1^m v_1,\ x_1^m v_2,\ x_1^m v_3,\ x_1^m v_4,\ x_1^m v_5.$$

Or je dis, que le nombre des valeurs distinctes de $x_1^m v$ résultant de ces changements sera moindre que cinq. En effet, si toutes les cinq valeurs



avaient lieu, on tirerait de ces valeurs en échangeant x_1 successivement avec x_2, x_3, x_4, x_5, 20 valeurs nouvelles, qui seraient nécessairement différentes entre elles et des précédentes. La fonction aurait donc en tout 25 valeurs différentes, ce qui est impossible, car 25 n'est pas diviseur du produit 1.2.3.4.5. En désignant donc par μ le nombre des valeurs que peut prendre v lorsqu'on y échange entre elles les quantités x_2, x_3, x_4, x_5 de toutes les manières possibles, μ doit avoir l'une des quatre valeurs suivantes 1, 2, 3, 4.

1. Soit $\mu = 1$, d'après ce qui précède v sera de la forme (a).

2. Soit $\mu = 4$, la somme $v_1 + v_2 + v_3 + v_4$ sera une fonction de la forme (a). Or on a $v_5 = (v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5) - (v_1 + v_2 + v_3 + v_4) =$ une fonction symétrique moins $(v_1 + v_2 + v_3 + v_4)$; donc v_5 est de la forme (a).

3. Soit $\mu = 2$, $v_1 + v_2$ sera une fonction de la forme (a). Soit donc

$$v_1 + v_2 = r_0 + r_1 x_1 + r_2 x_1^2 + r_3 x_1^3 + r_4 x_1^4 = \varphi x_1 .$$

En échangeant successivement x_1 avec x_2, x_3, x_4, x_5, on aura

$$\begin{aligned} v_1 \quad &+ v_2 = \varphi x_1 , \\ v_2 \quad &+ v_3 = \varphi x_2 , \\ &\cdots\cdots \\ v_{m-1} &+ v_m = \varphi x_{m-1} , \\ v_m \quad &+ v_1 = \varphi x_m , \end{aligned}$$

où m est un des nombres 2, 3, 4, 5. Pour $m = 2$, on aura $\varphi x_1 = \varphi x_2$, ce qui est impossible, car le nombre des valeurs de φx_1 doit être cinq. Pour $m = 3$ on aura

$$v_1 + v_2 = \varphi x_1 , \quad v_2 + v_3 = \varphi x_2 , \quad v_3 + v_1 = \varphi x_3 ,$$

d'où l'on tire

$$2 v_1 = \varphi x_1 - \varphi x_2 + \varphi x_3 .$$

Mais le second membre de cette équation a plus de 5 valeurs, car il en a 30. On prouvera de la même manière que m ne peut être égal à 4 ni à 5. Il suit de là que μ n'est pas égal à 2.

4. Soit $\mu = 3$. Dans ce cas $v_1 + v_2 + v_3$ et par conséquent $v_4 + v_5 = (v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5) - (v_1 + v_2 + v_3)$ aura cinq valeurs. Mais on vient de voir que cette supposition est inadmissible. Donc μ ne peut non plus être égal à 3.



De tout cela on déduit ce théorème:

Toute fonction rationnelle de cinq quantités, qui a cinq valeurs différentes, aura nécessairement la forme

$$r_0+r_1x+r_2x^2+r_3x^3+r_4x^4,$$

où r_0, r_1, r_2 etc. sont des fonctions symétriques, et x l'une quelconque des cinq quantités.

De l'équation

$$r_0+r_1x+r_2x^2+r_3x^3+r_4x^4=v$$

on déduira aisément, en faisant usage de l'équation proposée, pour la valeur de x, une expression de la forme suivante

$$x=s_0+s_1v+s_2v^2+s_3v^3+s_4v^4,$$

où s_0, s_1, s_2 etc., de même que r_0, r_1, r_2 etc., sont des fonctions symétriques.

Soit v une fonction rationnelle qui ait m valeurs différentes v_1, v_2, $v_3 \ldots v_m$. En posant

$$(v-v_1)(v-v_2)(v-v_3)\ldots(v-v_m)$$
$$=q_0+q_1v+q_2v^2+\cdots+q_{m-1}v^{m-1}+v^m=0,$$

on sait que q_0, q_1, $q_2 \ldots$ sont des fonctions symétriques, et que les m racines de l'équation sont v_1, v_2, $v_3 \ldots v_m$. Or je dis, qu'il est impossible d'exprimer la valeur de v comme racine d'une équation de la même forme, mais d'un degré moins élevé. En effet soit

$$t_0+t_1v+t_2v^2+\cdots+t_{\mu-1}v^{\mu-1}+v^{\mu}=0$$

une telle équation, t_0, t_1 etc. étant des fonctions symétriques, et soit v_1 une valeur de v qui satisfasse à cette équation, on aura

$$v^{\mu}+t_{\mu-1}v^{\mu-1}+\cdots=(v-v_1)P_1.$$

En échangeant entre eux les élémens de la fonction, on trouvera la série suivante d'équations:

$$v^{\mu}+t_{\mu-1}v^{\mu-1}+\cdots=(v-v_2)P_2,$$
$$v^{\mu}+t_{\mu-1}v^{\mu-1}+\cdots=(v-v_3)P_3,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$v^{\mu}+t_{\mu-1}v^{\mu-1}+\cdots=(v-v_m)P_m.$$



On en conclut que $v - v_1$, $v - v_2$, $v - v_3 \ldots v - v_m$ seront des facteurs de $v^\mu + t_{\mu-1} v^{\mu-1} + \cdots$ et que par conséquent μ doit nécessairement être égal à m. On en tire le théorème suivant:

Lorsqu'une fonction de plusieurs quantités a m valeurs différentes, on peut toujours trouver une équation du degré m, dont les coefficiens soient des fonctions symétriques, et qui ait ces valeurs pour racines; mais il est impossible de trouver une équation de la même forme d'un degré moins élevé qui ait une ou plusieurs de ces valeurs pour racines.

§ IV.

Démonstration de l'impossibilité de la résolution générale de l'équation du cinquième degré.

En vertu des propositions trouvées plus haut on peut énoncer ce théorème:

"Il est impossible de résoudre en général les équations du cinquième "degré."

D'après le § II, toutes les fonctions algébriques dont une expression algébrique des racines est composée, peuvent s'exprimer par des fonctions rationnelles des racines de l'équation proposée.

Comme il est impossible d'exprimer d'une manière générale la racine d'une équation par une fonction rationnelle des coefficiens, on doit avoir

$$R^{\frac{1}{m}} = v,$$

où m est un nombre premier et R une fonction rationnelle des coefficiens de l'équation proposée, c'est-à-dire une fonction symétrique des racines; v est une fonction rationnelle des racines. On en conclut

$$v^m - R = 0.$$

En vertu du § II, il est impossible d'abaisser le degré de cette équation; la fonction v doit donc, d'après le dernier théorème du paragraphe précédent, avoir m valeurs différentes. Le nombre m devant être diviseur du produit $1.2.3.4.5$, ce nombre peut être égal à 2 ou à 3 ou à 5. Or (§ III) il n'existe pas de fonction de cinq variables qui ait 3 valeurs: il faut donc qu'on ait $m = 5$, ou $m = 2$. Soit $m = 5$, on aura, ainsi qu'il résulte du paragraphe précédent



$$\sqrt[5]{R} = r_0 + r_1 x + r_2 x^2 + r_3 x^3 + r_4 x^4,$$

d'où

$$x = s_0 + s_1 R^{\frac{1}{5}} + s_2 R^{\frac{2}{5}} + s_3 R^{\frac{3}{5}} + s_4 R^{\frac{4}{5}}.$$

On en tire (§ II)

$$s_1 R^{\frac{1}{5}} = \tfrac{1}{5}(x_1 + \alpha^4 x_2 + \alpha^3 x_3 + \alpha^2 x_4 + \alpha x_5)$$

où $\alpha^5 = 1$. Cette équation est impossible, attendu que le second membre a 120 valeurs et que pourtant il doit être racine d'une équation du cinquième degré $z^5 - s_1^5 R = 0$. On doit donc avoir $m = 2$.

On aura donc (§ II)

$$\sqrt{R} = p + qs,$$

où p et q sont des fonctions symétriques, et

$$s = (x_1 - x_2) \ldots (x_4 - x_5).$$

On en tire, en échangeant x_1 et x_2 entre eux,

$$-\sqrt{R} = p - qs,$$

d'où l'on déduit $p = 0$ et $\sqrt{R} = qs$. On voit par là, que toute fonction algébrique du premier ordre qui se trouve dans l'expression de la racine, doit nécessairement avoir la forme $\alpha + \beta\sqrt{s^2} = \alpha + \beta s$, où α et β sont des fonctions symétriques. Or il est impossible d'exprimer les racines par une fonction de la forme $\alpha + \beta\sqrt{R}$; il doit donc y avoir une équation de la forme

$$\sqrt[m]{\alpha + \beta\sqrt{s^2}} = v,$$

où α et β ne sont pas nuls, m est un nombre premier, α et β sont des fonctions symétriques, et v est une fonction rationnelle des racines. Cela donne

$$\sqrt[m]{\alpha + \beta s} = v_1, \quad \sqrt[m]{\alpha - \beta s} = v_2,$$

où v_1 et v_2 sont des fonctions rationnelles. On aura en multipliant v_1 par v_2,

$$v_1 v_2 = \sqrt[m]{\alpha^2 - \beta^2 s^2}.$$

Or $\alpha^2 - \beta^2 s^2$ est une fonction symétrique. Si maintenant $\sqrt[m]{\alpha^2 - \beta^2 s^2}$

n'est pas une fonction symétrique, le nombre m, d'après ce qui précède, doit être égal à deux. Mais dans ce cas v sera égal à $\sqrt{\alpha+\beta\sqrt{s^2}}$; v aura donc quatre valeurs différentes, ce qui est impossible.

Il faut donc que $\sqrt[m]{\alpha^2-\beta^2 s^2}$ soit une fonction symétrique. Soit γ cette fonction, on aura

$$v_2 v_1=\gamma, \quad \text{et} \quad v_2=\frac{\gamma}{v_1}.$$

Soit

$$v_1+v_2=\sqrt[m]{\alpha+\beta\sqrt{s^2}}+\frac{\gamma}{\sqrt[m]{\alpha+\beta\sqrt{s^2}}}=p=\sqrt[m]{R}+\frac{\gamma}{\sqrt[m]{R}}=R^{\frac{1}{m}}+\frac{\gamma}{R}R^{\frac{m-1}{m}}.$$

Désignons par $p_1, p_2, p_3 \ldots p_m$ les valeurs différentes de p qui résultent de la substitution successive de $\alpha R^{\frac{1}{m}}$, $\alpha^2 R^{\frac{1}{m}}$, $\alpha^3 R^{\frac{1}{m}} \ldots \alpha^{m-1} R^{\frac{1}{m}}$ à la place de $R^{\frac{1}{m}}$, α satisfaisant à l'équation

$$\alpha^{m-1}+\alpha^{m-2}+\cdots+\alpha+1=0,$$

et faisons le produit

$$(p-p_1)(p-p_2)\ldots(p-p_m)=p^m-Ap^{m-1}+A_1p^{m-2}-\cdots=0.$$

On voit sans peine que A, A_1 etc. sont des fonctions rationnelles des coefficiens de l'équation proposée et par conséquent des fonctions symétriques des racines. Cette équation est évidemment irréductible. Il faut donc d'après le dernier théorème du paragraphe précédent que p, consideré comme fonction des racines, ait m valeurs différentes. On en conclut que $m=5$. Mais dans ce cas p sera de la forme (a) du paragraphe précédent. Donc on aura

$$\sqrt[5]{R}+\frac{\gamma}{\sqrt[5]{R}}=r_0+r_1x+r_2x^2+r_3x^3+r_4x^4=p,$$

d'où

$$x=s_0+s_1p+s_2p^2+s_3p^3+s_4p^4,$$

c'est-à-dire, en mettant $R^{\frac{1}{5}}+\frac{\gamma}{R}R^{\frac{4}{5}}$ à la place de p,

$$x=t_0+t_1R^{\frac{1}{5}}+t_2R^{\frac{2}{5}}+t_3R^{\frac{3}{5}}+t_4R^{\frac{4}{5}}$$



où t_0, t_1, t_2 etc. sont des fonctions rationnelles de R et des coefficiens de l'équation proposée. On en tire (§ II)

$$t_1 R^{\frac{1}{5}} = \tfrac{1}{5}(x_1 + \alpha^4 x_2 + \alpha^3 x_3 + \alpha^2 x_4 + \alpha x_5) = p',$$

où

$$\alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1 = 0.$$

De l'équation $p' = t_1 R^{\frac{1}{5}}$ on tire $p'^5 = t_1^5 R$. Or $t_1^5 R$ étant de la forme $u + u'\sqrt{s^2}$ on aura $p'^5 = u + u'\sqrt{s^2}$, ce qui donne

$$(p'^5 - u)^2 = u'^2 s^2.$$

Cette équation donne p' par une équation du dixième degré, dont tous les coefficiens sont des fonctions symétriques; mais d'après le dernier théorème du paragraphe précédent cela est impossible; car puisque

$$p' = \tfrac{1}{5}(x_1 + \alpha^4 x_2 + \alpha^3 x_3 + \alpha^2 x_4 + \alpha x_5),$$

p' aurait 120 valeurs différentes, ce qui est une contradiction.

Nous concluons donc qu'il est impossible de résoudre algébriquement l'équation générale du cinquième degré.

Il suit immédiatement de ce théorème, qu'il est de même impossible de résoudre algébriquement les équations générales des degrés supérieurs au cinquième. Donc les équations des quatre premiers degrés sont les seules qui puissent être résolues algébriquement d'une manière générale.

APPENDICE.

ANALYSE DU MÉMOIRE PRÉCÉDENT.

Bulletin des sciences math., astr., phys. et chim. publié par le B[on] *de Férussac*, t. 6, p. 347; Paris 1826.

L'auteur démontre, dans ce mémoire, qu'il est impossible de résoudre algébriquement l'équation générale du cinquième degré; car toute fonction



algébrique des coefficiens de la proposée, étant substituée à la place de l'inconnue, conduit à une absurdité. Dans un premier paragraphe, l'auteur cherche l'expression générale des fonctions algébriques de plusieurs quantités, d'après la définition qu'une fonction algébrique résulte, 1° d'additions, 2° de multiplications, 3° de divisions, et 4° d'extractions de racines dont les exposans sont des nombres *premiers*. Les soustractions, les élévations aux puissances et l'extraction des racines avec des exposans *composés* rentrent dans les opérations précédentes. D'où il résulte, 1° que toute fonction *rationnelle et entière* des quantités x_1, x_2, x_3 etc. c'est-à-dire, toute fonction qui peut être formée au moyen des *deux* premières opérations mentionnées, peut s'exprimer par une somme d'un nombre *fini* de termes de la forme $Ax_1^{m_1}x_2^{m_2}\ldots$, A étant une constante et m_1, m_2, ... des nombres entiers; 2° que toute fonction *rationnelle* des mêmes quantités, c'est-à-dire, toute fonction qui peut être formée au moyen des *trois* premières opérations, peut s'exprimer par un quotient de deux fonctions *entières:* 3° que toute fonction algébrique peut être formée par des répétitions des opérations indiquées par

$$(1) \qquad p' = f(x_1, x_2, x_3 \ldots . p_1^{\frac{1}{n_1}}, p_2^{\frac{1}{n_2}}, \ldots .),$$

où f désigne une fonction rationnelle des quantités entre les parenthèses; p_1, p_2, ... des fonctions rationnelles de x_1, x_2 ..., et n_1, n_2 ... des nombres premiers. On nommera, pour abréger, *fonction algébrique du premier ordre*, une fonction telle que p'. Si maintenant on formait une nouvelle fonction dans laquelle des fonctions du premier ordre entrassent de la même manière que p_1, p_2 ... entrent dans p', on aurait une *fonction algébrique du second ordre;* et, en général, une fonction de l'ordre μ serait celle qui pourrait contenir des fonctions de tous les ordres, jusqu'à l'ordre $\mu - 1$, combinées entre elles *algébriquement*. Bien entendu que cette fonction de l'ordre μ ne peut pas s'abaisser à un ordre inférieur, par des réductions des fonctions qui la composent. En outre, si cette même fonction de l'ordre μ contient m quantités de cet ordre, on dira qu'elle est du $m^{ième}$ *degré:* et en la désignant par v, on pourra poser

$$(2) \qquad v = q_0 + p^{\frac{1}{n}} + q_2 p^{\frac{2}{n}} + \ldots . + q_{n-1} p^{\frac{n-1}{n}}$$

c'est-à-dire que l'on a ce premier *théorème: Toute fonction algébrique v de l'ordre μ et du degré m, peut être représentée par la formule* (2), *où n est un nombre premier, q_0, q_2, ... q_{n-1} des fonctions algébriques de l'ordre μ et du degré $m - 1$ tout au plus, et p une fonction algébrique de l'ordre $\mu - 1$,*



telle qu'il est impossible d'exprimer $p^{\frac{1}{n}}$ *par une fonction rationnelle de* p, q_0, $q_2 \ldots q_{n-1}$.

Après avoir ainsi trouvé l'expression générale des fonctions algébriques, l'auteur considère, dans un deuxième paragraphe, une équation quelconque dont les coefficiens sont des fonctions rationnelles des quantités $x_1, x_2 \ldots$ et qu'on suppose résoluble algébriquement. En désignant donc par y l'inconnue, et par

(3) $$\varphi(x_1, x_2, x_3 \ldots y) = 0$$

l'équation même, il faut que le premier membre se réduise à zéro, en mettant pour y une certaine fonction de la forme (2). Par cette substitution l'équation (3) se changera en une autre de la forme

(4) $$r_0 + r_1 p^{\frac{1}{n}} + r_2 p^{\frac{2}{n}} + \cdots + r_{n-1} p^{\frac{n-1}{n}} = 0,$$

où $r_0, r_1, r_2, r_3 \ldots$ sont des fonctions rationnelles de $x_1, x_2, x_3 \ldots$ et de q_0, $q_2, q_3 \ldots$ Cette équation entraine les suivantes:

(5) $$r_0 = 0,\ r_1 = 0,\ r_2 = 0,\ \ldots\ r_{n-1} = 0;$$

car dans le cas contraire, l'équation (4) pourrait donner la valeur de $p^{\frac{1}{n}}$ en fonction *rationnelle* de $p, r_0, r_1 \ldots r_{n-1}$, ce qui est contre l'énoncé du théorème précédent. Si les équations (5) ont lieu, l'équation (4) et par suite l'équation (3), seront de même satisfaites par toutes les valeurs de y qu'on obtiendra en mettant, au lieu de $p^{\frac{1}{n}}$ les $n-1$ valeurs $\alpha p^{\frac{1}{n}}, \alpha^2 p^{\frac{1}{n}}, \ldots \alpha^{n-1} p^{\frac{1}{n}}$, où α est une racine imaginaire de l'unité. Par là on aura les valeurs de n racines de l'équation (3), savoir

$$y_1 = q_0 + p^{\frac{1}{n}} + q_2 p^{\frac{2}{n}} + \cdots + q_{n-1} p^{\frac{n-1}{n}},$$
$$y_2 = q_0 + \alpha p^{\frac{1}{n}} + \alpha^2 q_2 p^{\frac{2}{n}} + \cdots + \alpha^{n-1} q_{n-1} p^{\frac{n-1}{n}},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y_n = q_0 + \alpha^{n-1} p^{\frac{1}{n}} + \alpha^{n-2} q_2 p^{\frac{2}{n}} + \cdots + \alpha q_{n-1} p^{\frac{n-1}{n}};$$

ces équations donnent les n quantités $p^{\frac{1}{n}}, q_0, q_2 \ldots q_{n-1}$ en fonctions *rationnelles* des racines $y_1, y_2 \ldots y_n$.

Si maintenant $fx = 0$ est une équation algébrique générale, résoluble *algébriquement*, et $x_1, x_2 \ldots$ les racines de cette équation, on doit avoir

$$x = s_0 + v^{\frac{1}{n}} + s_2 v^{\frac{2}{n}} + \cdots + s_{n-1} v^{\frac{n-1}{n}},$$

cette formule étant analogue à la formule (2). D'après ce qu'on vient de voir $v^{\frac{1}{n}}$, s_0, $s_2 \ldots s_{n-1}$ seront des fonctions rationnelles des racines de l'équation proposée. Cela posé, considérons l'une quelconque des quantités v, s_0, $s_2 \ldots s_{n-1}$, par exemple v; en désignant par n' le nombre de toutes les valeurs *différentes* de v, qu'on obtiendra en échangeant entre elles de toutes les manières possibles les racines de l'équation proposée, on peut former une équation du degré n' qui ait toutes ces valeurs pour racines, et dont les coefficiens soient des fonctions rationnelles et symétriques des valeurs de v, et par suite des fonctions rationnelles de x_1, $x_2 \ldots$ En faisant donc

$$v = t_0 + u^{\frac{1}{\nu}} + t_2 u^{\frac{2}{\nu}} + \cdots + t_{\nu-1} u^{\frac{\nu-1}{\nu}},$$

toutes les quantités u, t_0, $t_2 \ldots t_{\nu-1}$ seront des fonctions rationnelles des valeurs de v, et par suite de x_1, $x_2 \ldots$ En poursuivant ce raisonnement, on établira le théorème suivant:

Deuxième théorème: Si une équation algébrique est résoluble algébriquement, on peut toujours donner à la racine une forme telle, que toutes les expressions algébriques dont elle est composée pourront s'exprimer par des fonctions rationnelles des racines de l'équation proposée.

Dans le troisième paragraphe on démontre, d'après un mémoire de M. *Cauchy*, inséré dans le cahier XVIIe du *Journal de l'École Polytechnique*, que, 1° le nombre des valeurs d'une fonction rationnelle de n quantités, ne peut s'abaisser au-dessous du plus grand nombre premier contenu dans n, sans devenir égal à 2 ou à 1; 2° que toute fonction rationnelle qui a deux valeurs différentes aura la forme

$$p + q(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \cdots (x_2 - x_3) \cdots (x_3 - x_4) \cdots$$

et que, si elle contient 5 quantités, elle deviendra

$$p + q(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)(x_1 - x_5)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)$$
$$(x_2 - x_5)(x_3 - x_4)(x_3 - x_5)(x_4 - x_5),$$

où p et q sont des fonctions invariables.

On démontre ensuite que toute fonction rationnelle de cinq quantités qui a cinq valeurs différentes peut être mise sous la forme



$$v = r_0 + r_1 x + r_2 x^2 + r_3 x^3 + r_4 x^4,$$

où r_0, $r_1 \dots r_4$ sont des fonctions invariables, et x une des cinq quantités en question.

En combinant cette équation avec l'équation

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)(x - x_5)$$
$$= x^5 - ax^4 + bx^3 - cx^2 + dx - e = 0,$$

on en peut tirer les valeurs de x sous la forme

$$x = s_0 + s_1 v + s_2 v^2 + s_3 v^3 + s_4 v^4,$$

s_0, $s_1 \dots$ étant des fonctions invariables de x_1, $x_2 \dots$ Finalement on arrive à ce théorème connu: *Troisième théorème: Si une fonction rationnelle de plusieurs quantités x_1, $x_2 \dots$ a m valeurs différentes, on pourra toujours trouver une équation du degré m dont tous les coefficiens sont des fonctions invariables de x_1, $x_2 \dots$ et qui ont les m valeurs de la fonction pour racines; mais il est impossible de trouver une équation de la même forme d'un degré moins élevé, qui aura une ou plusieurs de ces valeurs pour racines.*

Au moyen des théorèmes établis dans les trois premiers paragraphes, l'auteur démontre ensuite, dans le quatrième, qu'il est impossible de résoudre algébriquement l'équation générale du cinquième degré.

En effet, en supposant que l'équation générale du cinquième degré soit résoluble algébriquement, on pourra, en vertu du théorème (1), exprimer toutes les fonctions algébriques dont une racine est composée, par des fonctions rationnelles des racines; donc, puisqu'il est impossible d'exprimer une racine d'une équation générale par une fonction rationnelle des coefficiens, il faut qu'on ait

$$R^{\frac{1}{m}} = v,$$

où $R^{\frac{1}{m}}$ est une des fonctions du premier ordre qui se trouvent dans l'expression de la racine, R étant une fonction rationnelle des coefficiens de l'équation proposée, c'est-à-dire, une fonction invariable des racines, et v une fonction rationnelle des mêmes racines. Cette équation donne $v^m - R = 0$; et pour v, m valeurs différentes, résultant du changement des racines entre elles. Maintenant le nombre des valeurs d'une fonction rationnelle de cinq variables, doit être diviseur du produit 2. 3. 4. 5; il faut donc que m, qui est un nombre premier, soit un des trois nombres 2, 3, 5; mais selon le



théorème cité de M. *Cauchy*, le nombre 3 sera exclu, et par conséquent il ne restera pour m que les deux valeurs 5 et 2.

1. Soit d'abord $m = 5$; on aura, d'après ce qu'on a vu précédemment,

$$v = R^{\frac{1}{5}} = r_0 + r_1 x + r_2 x^2 + r_3 x^3 + r_4 x^4,$$

et de là

$$x = s_0 + s_1 R^{\frac{1}{5}} + s_2 R^{\frac{2}{5}} + s_3 R^{\frac{3}{5}} + s_4 R^{\frac{4}{5}},$$

$s_0, s_1, \ldots$ étant, de même que R, des fonctions invariables des racines. Cette valeur donne, selon ce qui a été établi dans le deuxième paragraphe, pour $s_1 R^{\frac{1}{5}}$, une fonction rationnelle des racines, savoir:

$$s_1 R^{\frac{1}{5}} = \tfrac{1}{5}(x_1 + \alpha^4 x_2 + \alpha^3 x_3 + \alpha^2 x_4 + \alpha x_5) = z,$$

α étant une racine imaginaire de l'équation $\alpha^5 - 1 = 0$; mais cela est impossible, car le second membre a 120 valeurs différentes, tandis qu'il doit être racine de l'équation $z^5 - s_1^5 R = 0$, qui n'est que du cinquième degré. Le nombre m ne peut donc être égal à 5.

2. Soit $m = 2$. Alors v aura deux valeurs qui, selon ce que M. *Cauchy* a démontré, doivent avoir la forme

$$v = p + qs = \sqrt{R},$$

où

$$s = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \cdots (x_4 - x_5),$$

et p et q sont des fonctions invariables.

En échangeant entre elles les deux racines x_1 et x_2, on aura $p - qs = -\sqrt{R}$, et par conséquent $p = 0$, et par suite

$$\sqrt{R} = q s.$$

De là il suit que toutes les fonctions algébriques du premier ordre qui se trouvent dans l'expression de la racine, doivent être de la forme $\alpha + \beta \sqrt{s^2}$, où α et β sont des fonctions invariables. Maintenant il est impossible d'exprimer une racine de l'équation générale du cinquième degré, par une fonction de cette forme; par conséquent il faut qu'il y ait, dans l'expression de la racine, des fonctions du deuxième ordre, et qui doivent contenir un radical de la forme



$$\sqrt[m]{\alpha + \beta\sqrt{s^2}} = v,$$

où β n'est pas égal à zéro; m est un nombre premier et v une fonction rationnelle des racines. En changeant x_1 en x_2 on aura

$$\sqrt[m]{\alpha - \beta\sqrt{s^2}} = v_1,$$

ce qui donne $vv_1 = \sqrt[m]{\alpha^2 - \beta^2 s^2}$. Maintenant $\alpha^2 - \beta^2 s^2$ est une fonction invariable; si donc vv_1 n'est pas de même une fonction invariable, il faut que m soit égal à 2; mais alors on aura $v = \sqrt{\alpha + \beta\sqrt{s^2}}$, ce qui donne pour v quatre valeurs différentes; or cela est impossible: donc il faut que vv_1 soit une fonction invariable. Soit cette fonction représentée par γ, on aura $v_1 = \frac{\gamma}{v}$. Cela posé, considérons l'expression

$$v + v_1 = \sqrt[m]{\alpha + \beta\sqrt{s^2}} + \frac{\gamma}{\sqrt[m]{\alpha + \beta\sqrt{s^2}}} = p = \sqrt[m]{R} + \frac{\gamma}{\sqrt[m]{R}}.$$

Cette valeur de p peut être racine d'une équation du $m^{ième}$ degré, et, comme cette équation sera nécessairement irréductible, p aura m valeurs différentes; donc m sera égal à 5.

Alors on aura

$$R^{\frac{1}{5}} + \gamma R^{-\frac{1}{5}} = r_0 + r_1 x + r_2 x^2 + r_3 x^3 + r_4 x^4 = p,$$

d'où

$$x = s_0 + s_1 p + \cdots + s_4 p^4 = t_0 + t_1 R^{\frac{1}{5}} + t_2 R^{\frac{2}{5}} + t_3 R^{\frac{3}{5}} + t_4 R^{\frac{4}{5}},$$

$t_0, t_1 \ldots t_4$ étant des fonctions invariables. De là on tire, comme auparavant,

$$t_1 R^{\frac{1}{5}} = \tfrac{1}{5}(x_1 + \alpha^4 x_2 + \alpha^3 x_3 + \alpha^2 x_4 + \alpha x_5) = y,$$

$$y^5 = t_1^5 R = t_1^5(\alpha + \beta\sqrt{s^2}),$$

et

$$(y^5 - \alpha t_1^5)^2 - t_1^{10}\beta^2 s^2 = 0.$$

Cette équation, dont les coefficiens sont des fonctions invariables, est du dixième degré par rapport à y; mais cela est contraire au théorème (3), parce que y a 120 valeurs différentes.

Nous concluons donc en dernier lieu, qu'il est impossible de résoudre algébriquement l'équation *générale* du cinquième degré. De là il suit immédiatement qu'il est, en général, impossible de résoudre algébriquement les équations générales d'un degré supérieur au quatrième.

VIII.

REMARQUE SUR LE MÉMOIRE N° 4 DU PREMIER CAHIER DU JOURNAL DE M. CRELLE.

Journal für die reine und angewandte Mathematik, herausgegeben von *Crelle*, Bd. I, Berlin 1826.

L'objet du mémoire est de trouver l'effet d'une force sur trois points donnés. Les résultats de l'auteur sont très justes, quand les trois points ne sont pas placés sur une même ligne droite; mais dans ce cas ils ne le sont pas. Les trois équations, par lesquelles les trois inconnues Q, Q', Q'' se déterminent, sont les suivantes

(1)
$$\begin{cases} P = Q + Q' + Q'', \\ Q'b \sin\alpha = Q''c\sin\beta, \\ Qa\sin\alpha = -Q''c\sin(\alpha+\beta). \end{cases}$$

Celles-ci ont lieu pour des valeurs quelconques de P, a, b, c, α et β. Elles donnent en général, comme l'auteur l'a trouvé,

(2)
$$\begin{cases} Q = -\dfrac{bc\sin(\alpha+\beta)}{r}P, \\ Q' = \dfrac{ac\sin\beta}{r}P, \\ Q'' = \dfrac{ab\sin\alpha}{r}P, \end{cases}$$

où

$$r = ab\sin\alpha + ac\sin\beta - bc\sin(\alpha+\beta).$$

Or les équations (2) cessent d'être déterminées lorsque l'une ou l'autre des

quantités Q, Q', Q'' prend la forme $\frac{0}{0}$, ce qui a lieu, comme on le voit aisément pour

$$\alpha = \beta = 180^\circ.$$

Dans ce cas il faut recourir aux équations fondamentales (1), qui donnent alors

$$P = Q + Q' + Q'',$$
$$Q'b \sin 180^\circ = Q''c \sin 180^\circ,$$
$$Qa \sin 180^\circ = -Q''c \sin 360^\circ.$$

Or les deux dernières équations sont identiques puisque

$$\sin 180^\circ = \sin 360^\circ = 0.$$

Donc dans le cas où

$$\alpha = \beta = 180^\circ,$$

il n'existe qu'une seule équation, savoir

$$P = Q + Q' + Q'',$$

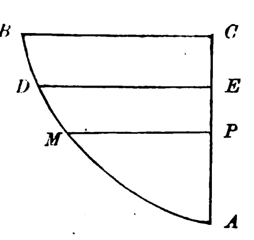
et, par suite, les valeurs de Q, Q', Q'' ne peuvent alors se tirer des équations établies par l'auteur.



IX.

RÉSOLUTION D'UN PROBLÈME DE MECANIQUE.

Journal für die reine und angewandte Mathematik, herausgegeben von *Crelle*, Bd. I, Berlin 1826.



Soit $BDMA$ une courbe quelconque. Soit BC une droite horizontale et CA une droite verticale. Supposons qu'un point sollicité par la pesanteur se meuve sur la courbe, un point quelconque D étant son point de départ. Soit τ le temps qui s'est écoulé quand le mobile est parvenu à un point donné A, et soit a la hauteur EA. La quantité τ sera une certaine fonction de a, qui dépendra de la forme de la courbe. Réciproquement la forme de la courbe dépendra de cette fonction. Nous allons examiner comment, à l'aide d'une intégrale définie, on peut trouver l'équation de la courbe pour laquelle τ est une fonction continue donnée de a.

Soit $AM = s$, $AP = x$, et soit t le temps que le mobile emploie à parcourir l'arc DM. D'après les règles de la mécanique on a $-\frac{ds}{dt} = \sqrt{a-x}$, donc $dt = -\frac{ds}{\sqrt{a-x}}$. Il s'ensuit, lorsqu'on prend l'intégrale depuis $x = a$ jusqu'à $x = 0$,

$$\tau = -\int_a^0 \frac{ds}{\sqrt{a-x}} = \int_0^a \frac{ds}{\sqrt{a-x}},$$

$\int_\alpha^\beta$ désignant que les limites de l'intégrale sont $x = \alpha$ et $x = \beta$. Soit maintenant

$$\tau = \varphi a$$

la fonction donnée, on aura

$$\varphi a = \int_0^a \frac{ds}{\sqrt{a-x}},$$

équation de laquelle on doit tirer s en fonction de x. Au lieu de cette équation, nous allons considérer cette autre plus générale

$$\varphi a = \int_0^a \frac{ds}{(a-x)^n},$$

de laquelle nous chercherons à déduire l'expression de s en x.

Désignons par $\Gamma\alpha$ la fonction

$$\Gamma\alpha = \int_0^1 dx \left(\log\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1},$$

on a comme on sait

$$\int_0^1 y^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-1}dy = \frac{\Gamma\alpha \,.\, \Gamma\beta}{\Gamma(\alpha+\beta)},$$

où α et β doivent être supérieurs à zéro. Soit $\beta = 1-n$, on trouvera

$$\int_0^1 \frac{y^{\alpha-1}dy}{(1-y)^n} = \frac{\Gamma\alpha \,.\, \Gamma(1-n)}{\Gamma(\alpha+1-n)},$$

d'où l'on tire, en faisant $z = ay$,

$$\int_0^a \frac{z^{\alpha-1}dz}{(a-z)^n} = \frac{\Gamma\alpha \,.\, \Gamma(1-n)}{\Gamma(\alpha+1-n)} a^{\alpha-n}.$$

En multipliant par $\frac{da}{(x-a)^{1-n}}$ et prenant l'intégrale depuis $a=0$ jusqu'à $a=x$, on trouve

$$\int_0^x \frac{da}{(x-a)^{1-n}} \int_0^a \frac{z^{\alpha-1}dz}{(a-z)^n} = \frac{\Gamma\alpha \,.\, \Gamma(1-n)}{\Gamma(\alpha+1-n)} \int_0^x \frac{a^{\alpha-n}da}{(x-a)^{1-n}}.$$

En faisant $a = xy$, on aura

$$\int_0^x \frac{a^{\alpha-n}da}{(x-a)^{1-n}} = x^\alpha \int_0^1 \frac{y^{\alpha-n}dy}{(1-y)^{1-n}} = x^\alpha \frac{\Gamma(\alpha-n+1)\,\Gamma n}{\Gamma(\alpha+1)},$$

donc

$$\int_0^x \frac{da}{(x-a)^{1-n}} \int_0^a \frac{z^{\alpha-1}dz}{(a-z)^n} = \Gamma n \,.\, \Gamma(1-n) \frac{\Gamma\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} x^\alpha.$$

Or d'après une propriété connue de la fonction Γ, on a

$$\Gamma(\alpha+1)=\alpha\,\Gamma\alpha;$$

on aura donc en substituant:

$$\int_0^x \frac{da}{(x-a)^{1-n}}\int_0^a \frac{z^{\alpha-1}\,dz}{(a-z)^n}=\frac{x^\alpha}{\alpha}\,\Gamma n\,.\,\Gamma(1-n).$$

En multipliant par $\alpha\varphi\alpha\,.\,d\alpha$, et intégrant par rapport à α, on trouve

$$\int_0^x \frac{da}{(x-a)^{1-n}}\int_0^a \frac{(\int\varphi\alpha\,.\,\alpha z^{\alpha-1}\,d\alpha)dz}{(a-z)^n}=\Gamma n\,.\,\Gamma(1-n)\int\varphi\alpha\,.\,x^\alpha\,d\alpha.$$

Soit

$$\int\varphi\alpha\,.\,x^\alpha d\alpha=fx,$$

on en tire en différentiant,

$$\int\varphi\alpha\,.\,\alpha x^{\alpha-1}d\alpha=f'x,$$

donc

$$\int\varphi\alpha\,.\,\alpha z^{\alpha-1}d\alpha=f'z;$$

par conséquent

$$\int_0^x \frac{da}{(x-a)^{1-n}}\int_0^a \frac{f'z\,.\,dz}{(a-z)^n}=\Gamma n\,.\,\Gamma(1-n)\,fx,$$

ou, puisque $\Gamma n\,.\,\Gamma(1-n)=\frac{\pi}{\sin n\pi}$,

(1) $$fx=\frac{\sin n\pi}{\pi}\int_0^x \frac{da}{(x-a)^{1-n}}\int_0^a \frac{f'z\,.\,dz}{(a-z)^n}.$$

A l'aide de cette équation, il sera facile de tirer la valeur de s de l'équation

$$\varphi a=\int_0^a \frac{ds}{(a-x)^n}.$$

Qu'on multiplie cette équation par $\frac{\sin n\pi}{\pi}\,\frac{da}{(x-a)^{1-n}}$, et qu'on prenne l'intégrale depuis $a=0$ jusqu'à $a=x$, on aura

$$\frac{\sin n\pi}{\pi}\int_0^x \frac{\varphi a\,.\,da}{(x-a)^{1-n}}=\frac{\sin n\pi}{\pi}\int_0^x \frac{da}{(x-a)^{1-n}}\int_0^a \frac{ds}{(a-x)^n},$$

donc en vertu de l'équation (1)

$$s = \frac{\sin n\pi}{\pi} \int_0^x \frac{\varphi\alpha \, . \, d\alpha}{(x-\alpha)^{1-n}}.$$

Soit maintenant $n = \frac{1}{2}$, on obtient

$$\varphi a = \int_0^a \frac{ds}{\sqrt{a-x}}$$

et

$$s = \frac{1}{\pi} \int_0^x \frac{\varphi a \, . \, da}{\sqrt{x-a}}.$$

Cette équation donne l'arc s par l'abscisse x, et par suite la courbe est entièrement déterminée.

Nous allons appliquer l'expression trouvée à quelques exemples.

I. Soit

$$\varphi a = \alpha_0 a^{\mu_0} + \alpha_1 a^{\mu_1} + \cdots + \alpha_m a^{\mu_m} = \Sigma \alpha a^{\mu},$$

la valeur de s sera

$$s = \frac{1}{\pi} \int_0^x \frac{da}{\sqrt{x-a}} \Sigma \alpha a^{\mu} = \frac{1}{\pi} \Sigma \left(\alpha \int_0^x \frac{a^{\mu} da}{\sqrt{x-a}} \right).$$

Si l'on fait $a = xy$, on aura

$$\int_0^x \frac{a^{\mu} da}{\sqrt{x-a}} = x^{\mu+\frac{1}{2}} \int_0^1 \frac{y^{\mu} dy}{\sqrt{1-y}} = x^{\mu+\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(\mu+1)\,\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\mu+\frac{3}{2})},$$

donc

$$s = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\pi} \Sigma \frac{\alpha \Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\frac{3}{2})} x^{\mu+\frac{1}{2}},$$

ou, puisque $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$,

$$s = \sqrt{\frac{x}{\pi}} \left[\alpha_0 \frac{\Gamma(\mu_0+1)}{\Gamma(\mu_0+\frac{3}{2})} x^{\mu_0} + \alpha_1 \frac{\Gamma(\mu_1+1)}{\Gamma(\mu_1+\frac{3}{2})} x^{\mu_1} + \cdots + \alpha_m \frac{\Gamma(\mu_m+1)}{\Gamma(\mu_m+\frac{3}{2})} x^{\mu_m} \right].$$

Si l'on suppose p. ex. que $m = 0$, $\mu_0 = 0$, c'est-à-dire que la courbe cherchée soit isochrone, on trouve

$$s = \sqrt{\frac{x}{\pi}}\, \alpha_0 \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(\frac{3}{2})} = \frac{\alpha_0}{\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})} \sqrt{\frac{x}{\pi}} = \frac{2\alpha_0}{\pi} \sqrt{x},$$

or $s = \frac{2\alpha_0}{\pi}\sqrt{x}$ est l'équation connue de la cycloide.

II. Soit

φa depuis $a=0$ jusqu'à $a=a_0$, égal à $\varphi_0 a$

φa depuis $a=a_0$ jusqu'à $a=a_1$, égal à $\varphi_1 a$

φa depuis $a=a_1$ jusqu'à $a=a_2$, égal à $\varphi_2 a$

. . . .

φa depuis $a=a_{m-1}$ jusqu'à $a=a_m$, égal à $\varphi_m a$,

on aura

$$\pi s=\int_0^x \frac{\varphi_0 a.da}{\sqrt{a-x}}, \text{ depuis } x=0 \text{ jusqu'à } x=a_0,$$

$$\pi s=\int_0^{a_0} \frac{\varphi_0 a.da}{\sqrt{a-x}}+\int_{a_0}^x \frac{\varphi_1 a.da}{\sqrt{a-x}}, \text{ depuis } x=a_0 \text{ jusqu'à } x=a_1,$$

$$\pi s=\int_0^{a_0} \frac{\varphi_0 a.da}{\sqrt{a-x}}+\int_{a_0}^{a_1} \frac{\varphi_1 a.da}{\sqrt{a-x}}+\int_{a_1}^x \frac{\varphi_2 a.da}{\sqrt{a-x}}, \text{ depuis } x=a_1 \text{ jusqu'à } x=a_2,$$

. . . .

$$\pi s=\int_0^{a_0} \frac{\varphi_0 a.da}{\sqrt{a-x}}+\int_{a_0}^{a_1} \frac{\varphi_1 a.da}{\sqrt{a-x}}+\cdots+\int_{a_{m-2}}^{a_{m-1}} \frac{\varphi_{m-1} a.da}{\sqrt{a-x}}+\int_{a_{m-1}}^x \frac{\varphi_m a.da}{\sqrt{a-x}},$$

depuis $x=a_{m-1}$ jusqu'à $x=a_m$,

où il faut remarquer que les fonctions $\varphi_0 a$, $\varphi_1 a$, $\varphi_2 a \dots \varphi_m a$ doivent être telles que

$$\varphi_0 a_0=\varphi_1 a_0,\ \varphi_1 a_1=\varphi_2 a_1,\ \varphi_2 a_2=\varphi_3 a_2, \text{ etc.},$$

car la fonction φa doit nécessairement être continue.

X.

DÉMONSTRATION D'UNE EXPRESSION DE LAQUELLE LA FORMULE BINOME EST UN CAS PARTICULIER.

Journal für die reine und angewandte Mathematik, herausgegeben von *Crelle*, Bd. 1, Berlin 1826.

Cette expression est la suivante:

$$(x+\alpha)^n = x^n + \frac{n}{1}\alpha(x+\beta)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}\alpha(\alpha-2\beta)(x+2\beta)^{n-2} + \cdots$$
$$+ \frac{n(n-1)\ldots(n-\mu+1)}{1.2\ldots\mu}\alpha(\alpha-\mu\beta)^{\mu-1}(x+\mu\beta)^{n-\mu} + \cdots$$
$$+ \frac{n}{1}\alpha(\alpha-(n-1)\beta)^{n-2}(x+(n-1)\beta) + \alpha(\alpha-n\beta)^{n-1};$$

x, α et β sont des quantités quelconques, n est un nombre entier positif.

Lorsque $n=0$, l'expression donne

$$(x+\alpha)^0 = x^0,$$

qu'il fallait. Or on peut, comme il suit, démontrer que si l'expression subsiste pour $n=m$, elle doit aussi subsister pour $n=m+1$, c'est-à-dire qu'elle est vraie en général.

Soit

$$(x+\alpha)^m = x^m + \frac{m}{1}\alpha(x+\beta)^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2}\alpha(\alpha-2\beta)(x+2\beta)^{m-2} + \cdots$$
$$+ \frac{m}{1}\alpha(\alpha-(m-1)\beta)^{m-2}(x+(m-1)\beta) + \alpha(\alpha-m\beta)^{m-1}.$$

En multipliant par $(m+1)dx$ et intégrant, on trouve

$$(x+\alpha)^{m+1}=x^{m+1}+\frac{m+1}{1}\alpha(x+\beta)^m+\frac{(m+1)m}{1.2}\alpha(\alpha-2\beta)(x+2\beta)^{m-1}+\cdots$$
$$+\frac{m+1}{1}\alpha(\alpha-m\beta)^{m-1}(x+m\beta)+C,$$

C étant la constante arbitraire. Pour trouver sa valeur posons $x=-(m+1)\beta$, les deux dernières équations donneront

$$(\alpha-(m+1)\beta)^m=(-1)^m\Big[(m+1)^m\beta^m-m^m\alpha\beta^{m-1}$$
$$+\frac{m}{2}(m-1)^{m-1}\alpha(\alpha-2\beta)\beta^{m-2}-\frac{m(m-1)}{2.3}(m-2)^{m-2}\alpha(\alpha-3\beta)^2\beta^{m-3}+\cdots\Big],$$
$$(\alpha-(m+1)\beta)^{m+1}=(-1)^{m+1}\Big[(m+1)^{m+1}\beta^{m+1}-(m+1)m^m\alpha\beta^m$$
$$+\frac{(m+1)m}{2}(m-1)^{m-1}\alpha(\alpha-2\beta)\beta^{m-1}-\cdots\Big]+C.$$

Multipliant la première de ces équations par $(m+1)\beta$ et ajoutant le produit à la seconde, on trouve

$$C=(\alpha-(m+1)\beta)^{m+1}+(m+1)\beta(\alpha-(m+1)\beta)^m,$$

ou bien

$$C=\alpha(\alpha-(m+1)\beta)^m.$$

Il s'ensuit que l'équation proposée subsiste de même pour $n=m+1$. Or elle a lieu pour $n=0$; donc elle aura lieu pour $n=0, 1, 2, 3$ etc. c'est-à-dire pour toute valeur entière et positive de n.

Si l'on fait $\beta=0$, on obtient la formule binome. Si l'on fait $\alpha=-x$, on trouve

$$0=x^n-\frac{n}{1}x(x+\beta)^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1.2}x(x+2\beta)^{n-1}$$
$$-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x(x+3\beta)^{n-1}+\cdots$$

ou en divisant par x,

$$0=x^{n-1}-\frac{n}{1}(x+\beta)^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1.2}(x+2\beta)^{n-1}$$
$$-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}(x+3\beta)^{n-1}+\cdots$$

ce qui est d'ailleurs connu; car le second membre de cette équation n'est autre chose que

$$(-1)^n\Delta^n(x^{n-1}),$$

en faisant la différence constante égale à β.



XI.

SUR L'INTÉGRATION DE LA FORMULE DIFFÉRENTIELLE $\frac{\varrho\,dx}{\sqrt{R}}$, R ET ϱ ÉTANT DES FONCTIONS ENTIÈRES.

Journal für die reine und angewandte Mathematik, herausgegeben von *Crelle*, Bd. 1, Berlin 1826.

1.

Si l'on différentie par rapport à x l'expression

(1) $$z = \log \frac{p + q\sqrt{R}}{p - q\sqrt{R}},$$

où p, q et R sont des fonctions entières d'une quantité variable x, on obtiendra

$$dz = \frac{dp + d(q\sqrt{R})}{p + q\sqrt{R}} - \frac{dp - d(q\sqrt{R})}{p - q\sqrt{R}},$$

ou

$$dz = \frac{(p - q\sqrt{R})\,[dp + d(q\sqrt{R})] - (p + q\sqrt{R})\,[dp - d(q\sqrt{R})]}{p^2 - q^2R},$$

c'est-à-dire,

$$dz = \frac{2p\,d(q\sqrt{R}) - 2dp\,.\,q\sqrt{R}}{p^2 - q^2R}.$$

Or

$$d(q\sqrt{R}) = dq\sqrt{R} + \tfrac{1}{2}q\frac{dR}{\sqrt{R}},$$

donc par substitution

$$dz = \frac{pq\,dR + 2(p\,dq - q\,dp)R}{(p^2 - q^2R)\sqrt{R}},$$

par conséquent, en faisant

$$(2)\qquad pq\frac{dR}{dx}+2\left(p\frac{dq}{dx}-q\frac{dp}{dx}\right)R=M,$$
$$p^2-q^2R=N,$$

on aura

$$(3)\qquad dz=\frac{Mdx}{N\sqrt{R}},$$

où, comme on le voit aisément, M et N sont des fonctions entières de x.

Or, z étant égal à $\log\frac{p+q\sqrt{R}}{p-q\sqrt{R}}$, on aura en intégrant

$$(4)\qquad \int\frac{Mdx}{N\sqrt{R}}=\log\frac{p+q\sqrt{R}}{p-q\sqrt{R}}.$$

Il s'ensuit que dans la différentielle $\frac{\varrho dx}{\sqrt{R}}$ on peut trouver une infinité de formes différentes pour la fonction rationnelle ϱ, qui rendent cette différentielle intégrable par des logarithmes, savoir par une expression de la forme $\log\frac{p+q\sqrt{R}}{p-q\sqrt{R}}$. La fonction ϱ contient, comme on le voit par les équations (2), outre R, encore deux fonctions indéterminées p et q; c'est par ces fonctions qu'elle sera déterminée.

On peut renverser la question et demander s'il est possible de supposer les fonctions p et q telles, que ϱ ou $\frac{M}{N}$ prenne une forme déterminée donnée. La solution de ce problème conduit à une foule de résultats intéressants, que l'on doit considérer comme autant de propriétés des fonctions de la forme $\int\frac{\varrho dx}{\sqrt{R}}$. Dans ce mémoire je me bornerai au cas où $\frac{M}{N}$ est une fonction entière de x, en essayant de résoudre ce problème général:

„Trouver toutes les différentielles de la forme $\frac{\varrho dx}{\sqrt{R}}$, où ϱ et R sont „des fonctions entières de x, dont les intégrales puissent s'exprimer „par une fonction de la forme $\log\frac{p+q\sqrt{R}}{p-q\sqrt{R}}$.

2.

En différentiant l'équation

$$N = p^2 - q^2 R,$$

on obtient

$$dN = 2p\,dp - 2q\,dq\,.\,R - q^2 dR;$$

donc en multipliant par p,

$$p\,dN = 2p^2 dp - 2pq\,dq\,.\,R - pq^2 dR,$$

c'est-à-dire, lorsqu'on remet à la place de p^2 sa valeur $N + q^2 R$,

$$p\,dN = 2N dp + 2q^2 dp\,.\,R - 2pq\,dq\,.\,R - pq^2 dR,$$

ou

$$p\,dN = 2N dp - q\,[2(p\,dq - q\,dp)R + pq\,dR],$$

donc, puisque (2)

$$2(p\,dq - q\,dp)R + pq\,dR = M dx,$$

on a

$$p\,dN = 2N\,dp - qM dx,$$

ou bien

$$qM = 2N\frac{dp}{dx} - p\frac{dN}{dx},$$

donc

(5) $$\frac{M}{N} = \left(2\frac{dp}{dx} - p\frac{dN}{N dx}\right) : q.$$

Maintenant $\frac{M}{N}$ doit être une fonction entière de x; en désignant cette fonction par ϱ, on aura

$$q\varrho = 2\frac{dp}{dx} - p\frac{dN}{N dx}.$$

Il s'ensuit que $p\frac{dN}{N dx}$ doit être une fonction entière de x. En faisant

$$N = (x + a)^m (x + a_1)^{m_1} \ldots (x + a_n)^{m_n},$$

on aura

$$\frac{dN}{N dx} = \frac{m}{x + a} + \frac{m_1}{x + a_1} + \ldots + \frac{m_n}{x + a_n};$$

donc l'expression

$$p\left(\frac{m}{x+a}+\frac{m_1}{x+a_1}+\cdots+\frac{m_n}{x+a_n}\right)$$

doit de même être une fonction entière, ce qui ne peut avoir lieu à moins que le produit $(x+a)\cdots(x+a_n)$ ne soit facteur de p. Il faut donc que

$$p=(x+a)\cdots(x+a_n)\,p_1,$$

p_1 étant une fonction entière. Or

$$N=p^2-q^2R,$$

donc

$$(x+a)^m\cdots(x+a_n)^{m_n}=p_1^2(x+a)^2(x+a_1)^2\cdots(x+a_n)^2-q^2R.$$

Comme R n'a pas de facteur de la forme $(x+a)^2$, et comme on peut toujours supposer que p et q n'ont pas de facteur commun, il est clair que

$$m=m_1=\cdots=m_n=1,$$

et que

$$R=(x+a)(x+a_1)\cdots(x+a_n)R_1,$$

R_1 étant une fonction entière. On a donc

$$N=(x+a)(x+a_1)\cdots(x+a_n),\quad R=NR_1,$$

c'est-à-dire que N doit être facteur de R. On a de même $p=Np_1$. En substituant ces valeurs de R et de p dans les équations (2), on trouvera les deux équations suivantes

$$(6)\qquad \begin{gathered} p_1^2N-q^2R_1=1,\\ \frac{M}{N}=p_1q\frac{dR}{dx}+2\left(p\frac{dq}{dx}-q\frac{dp}{dx}\right)R_1=\varrho. \end{gathered}$$

La première de ces équations détermine la forme des fonctions p_1, q, N et R_1; celles-ci étant déterminées, la seconde équation donnera ensuite la fonction ϱ. On peut aussi trouver cette dernière fonction par l'équation (5).

3.

Maintenant tout dépend de l'équation

$$(7)\qquad p_1^2N-q^2R_1=1.$$

Cette équation peut bien être résolue par la méthode ordinaire des coeffi-

ciens indéterminés, mais l'application de cette méthode serait ici extrêmement prolixe, et ne conduirait guère à un résultat général. Je vais donc prendre une autre route, semblable à celle qu'on emploie pour la résolution des équations indéterminées du second degré à deux inconnues. La seule différence est, qu'au lieu de nombres entiers, on aura à traiter des fonctions entières. Comme dans la suite nous aurons souvent besoin de parler du degré d'une fonction, je me servirai de la lettre δ pour désigner ce degré, en sorte que δP désignera le degré de la fonction P, par exemple,

$$\delta(x^m + ax^{m-1} + \cdots) = m,$$

$$\delta\left(\frac{x^5 + cx}{x^3 + e}\right) = 2,$$

$$\delta\left(\frac{x + e}{x^2 + k}\right) = -1, \text{ etc.}$$

D'ailleurs, il est clair que les équations suivantes auront lieu:

$$\delta(PQ) = \delta P + \delta Q,$$

$$\delta\left(\frac{P}{Q}\right) = \delta P - \delta Q,$$

$$\delta(P^m) = m\delta P;$$

de plus

$$\delta(P + P') = \delta P,$$

si $\delta P'$ est moindre que δP. De même je désignerai, pour abréger, la partie entière d'une fonction rationnelle u par Eu, en sorte que

$$u = Eu + u',$$

où $\delta u'$ est négatif. Il est clair que

$$E(s + s') = Es + Es',$$

donc, lorsque $\delta s'$ est négatif,

$$E(s + s') = Es.$$

Relativement à ce signe, on aura le théorème suivant:

„Lorsque les trois fonctions rationnelles u, v et z ont la propriété que

$$u^2 = v^2 + z,$$

„on aura, si $\delta z < \delta v$,

$$Eu = \pm Ev.$$

En effet, on a par définition

$$u = Eu + u',$$
$$v = Ev + v',$$

$\delta u'$ et $\delta v'$ étant négatifs; donc en substituant ces valeurs dans l'équation $u^2 = v^2 + z$,

$$(Eu)^2 + 2u'Eu + u'^2 = (Ev)^2 + 2v'Ev + v'^2 + z.$$

Il s'ensuit

$$(Eu)^2 - (Ev)^2 = z + v'^2 - u'^2 + 2v'Ev - 2u'Eu = t,$$

ou bien,

$$(Eu + Ev)(Eu - Ev) = t.$$

On voit aisément que $\delta t < \delta v$; au contraire $\delta(Eu + Ev)(Eu - Ev)$ est au moins égal à δv, si $(Eu + Ev)(Eu - Ev)$ n'est pas égal à zéro. Il faut donc nécessairement que $(Eu + Ev)(Eu - Ev)$ soit nul, ce qui donne

$$Eu = \pm Ev \quad \text{c. q. f. d.}$$

Il est clair que l'équation (7) ne saurait subsister à moins qu'on n'ait

$$\delta(Np_1^2) = \delta(R_1 q^2),$$

c'est-à-dire,

$$\delta N + 2\delta p_1 = \delta R_1 + 2\delta q,$$

d'où

$$\delta(NR_1) = 2(\delta q - \delta p_1 + \delta R_1).$$

Le plus grand exposant de la fonction R doit donc être un nombre pair. Soit $\delta N = n - m$, $\delta R_1 = n + m$.

4.

Cela posé, au lieu de l'équation

$$p_1^2 N - q^2 R_1 = 1,$$

je vais proposer la suivante

(8) $$p_1^2 N - q^2 R_1 = v,$$

où v est une fonction entière dont le degré est moindre que $\frac{\delta N+\delta R_1}{2}$. Cette équation, comme on le voit, est plus générale; elle peut être résolue par le même procédé.

Soit t la partie entière de la fonction fractionnaire $\frac{R_1}{N}$, et soit t' le reste; cela posé, on aura

(9) $$R_1 = Nt + t',$$

et il est clair que t doit être du degré $2m$, lorsque $\delta N = n - m$ et $\delta R_1 = n + m$. En substituant cette expression de R_1 dans l'équation (8), on en tirera

(10) $$(p_1^2 - q^2 t)\, N - q^2 t' = v.$$

Soit maintenant

(11) $$t = t_1^2 + t_1',$$

on peut toujours déterminer t_1 de manière que le degré de t_1' soit moindre que m. A cet effet, faisons

$$\begin{aligned} t\ &= \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_{2m} x^{2m}, \\ t_1 &= \beta_0 + \beta_1 x + \cdots + \beta_m x^m, \\ t_1' &= \gamma_0 + \gamma_1 x + \cdots + \gamma_{m-1} x^{m-1}; \end{aligned}$$

cela posé, l'équation (11) donnera

$$\begin{aligned} &\alpha_{2m} x^{2m} + \alpha_{2m-1} x^{2m-1} + \alpha_{2m-2} x^{2m-2} + \cdots + \alpha_{m-1} x^{m-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0 \\ &= \beta_m^2 x^{2m} + 2\beta_m \beta_{m-1} x^{2m-1} + (\beta_{m-1}^2 + 2\beta_m \beta_{m-2}) x^{2m-2} + \cdots \\ &\quad + \gamma_{m-1} x^{m-1} + \gamma_{m-2} x^{m-2} + \cdots + \gamma_1 x + \gamma_0. \end{aligned}$$

De cette équation on déduira, en comparant les coefficiens entre eux,

$$\begin{aligned} \alpha_{2m} &= \beta_m^2, \\ \alpha_{2m-1} &= 2\beta_m \beta_{m-1}, \\ \alpha_{2m-2} &= 2\beta_m \beta_{m-2} + \beta_{m-1}^2, \\ \alpha_{2m-3} &= 2\beta_m \beta_{m-3} + 2\beta_{m-1} \beta_{m-2}, \\ \alpha_{2m-4} &= 2\beta_m \beta_{m-4} + 2\beta_{m-1} \beta_{m-3} + \beta_{m-2}^2, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_m &= 2\beta_m \beta_0 + 2\beta_{m-1} \beta_1 + 2\beta_{m-2} \beta_2 + \cdots, \\ \gamma_{m-1} &= \alpha_{m-1} - 2\beta_{m-1} \beta_0 - 2\beta_{m-2} \beta_1 - \cdots\cdots \end{aligned}$$

$$\gamma_{m-2}=\alpha_{m-2}-2\beta_{m-2}\beta_0-2\beta_{m-3}\beta_1-\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\gamma_2=\alpha_2-2\beta_2\beta_0-\beta_1^2,$$
$$\gamma_1=\alpha_1-2\beta_1\beta_0,$$
$$\gamma_0=\alpha_0-\beta_0^2.$$

Les $m+1$ premières équations donnent toujours, comme il est aisé de le voir, les valeurs des $m+1$ quantités β_m, $\beta_{m-1}\cdots\beta_0$, et les m dernières équations donnent les valeurs de $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2 \cdots \gamma_{m-1}$. L'équation supposée (11) est donc toujours possible.

Substituant dans l'équation (10), au lieu de t, sa valeur tirée de l'équation (11), on aura

(12) $$(p_1^2-q^2t_1^2)N-q^2(Nt_1'+t')=v;$$

d'où l'on tire

$$\left(\frac{p_1}{q}\right)^2=t_1^2+t_1'+\frac{t'}{N}+\frac{v}{q^2N}.$$

En remarquant que

$$\delta\left(t_1'+\frac{t'}{N}+\frac{v}{q^2N}\right)<\delta t_1,$$

on aura, par ce qui précède,

$$E\left(\frac{p_1}{q}\right)=\pm Et_1=\pm t_1,$$

donc

$$p_1=\pm t_1q+\beta, \quad \text{où} \quad \delta\beta<\delta q,$$

ou bien, comme on peut prendre t_1 avec le signe qu'on voudra,

$$p_1=t_1q+\beta.$$

En substituant cette expression, au lieu de p_1 dans l'équation (12), elle se changera en

(13) $$(\beta^2+2\beta t_1q)N-q^2s=v,$$

où, pour abréger, on a fait

$$Nt_1'+t'=s.$$

De cette équation il est facile de tirer

$$\left(\frac{q}{\beta}-\frac{t_1 N}{s}\right)^2=\frac{N(t_1^2 N+s)}{s^2}-\frac{v}{s\beta^2},$$

ou, puisque $t_1^2 N+s=R_1$ (car $R_1=tN+t'$, $s=Nt_1'+t'$, et $t=t_1^2+t_1'$),

$$\left(\frac{q}{\beta}-\frac{t_1 N}{s}\right)^2=\frac{R_1 N}{s^2}-\frac{v}{s\beta^2}.$$

Soit maintenant

$$R_1 N=r^2+r', \text{ où } \delta r'<\delta r,$$

on aura

$$\left(\frac{q}{\beta}-\frac{t_1 N}{s}\right)^2=\left(\frac{r}{s}\right)^2+\frac{r'}{s^2}-\frac{v}{s\beta^2}.$$

Or, on voit aisément que

$$\delta\left(\frac{r'}{s^2}-\frac{v}{s\beta^2}\right)<\delta\left(\frac{r}{s}\right),$$

donc

$$E\left(\frac{q}{\beta}-\frac{t_1 N}{s}\right)=E\left(\frac{r}{s}\right).$$

et par suite

$$E\left(\frac{q}{\beta}\right)=E\left(\frac{r+t_1 N}{s}\right);$$

donc en faisant

$$E\left(\frac{r+t_1 N}{s}\right)=2\mu,$$

on aura

$$q=2\mu\beta+\beta_1, \text{ où } \delta\beta_1<\delta\beta.$$

En substituant cette expression de q dans l'équation (13), on aura

$$\beta^2 N+2\beta t_1 N(2\mu\beta+\beta_1)-s(4\mu^2\beta^2+4\mu\beta_1\beta+\beta_1^2)=v,$$

c'est-à-dire,

$$\beta^2(N+4\mu t_1 N-4s\mu^2)+2(t_1 N-2\mu s)\beta\beta_1-s\beta_1^2=v.$$

Faisant pour abréger

(14) $$s_1=N+4\mu t_1 N-4s\mu^2, \quad t_1 N-2\mu s=-r_1,$$

on obtient

(15) $$s_1\beta^2-2r_1\beta\beta_1-s\beta_1^2=v.$$

Puisque $E\left(\frac{r+t_1 N}{s}\right)=2\mu$, on a

$$r + t_1 N = 2s\mu + \varepsilon, \text{ où } \delta\varepsilon < \delta s,$$

par suite la dernière des équations (14) donnera

$$r_1 = r - \varepsilon.$$

En multipliant l'expression de s_1 par s, on obtient

$$ss_1 = Ns + 4\mu t_1 Ns - 4s^2\mu^2 = Ns + t_1^2 N^2 - (2s\mu - t_1 N)^2.$$

Or $2s\mu - t_1 N = r_1$, donc

$$ss_1 = Ns + t_1^2 N^2 - r_1^2, \quad \text{et} \quad r_1^2 + ss_1 = N(s + t_1^2 N);$$

de plus on a

$$s + t_1^2 N = R_1,$$

donc

(16) $$r_1^2 + ss_1 = NR_1 = R.$$

D'après ce qui précède on a $R = r^2 + r'$, donc

$$r^2 - r_1^2 = ss_1 - r', \quad (r + r_1)(r - r_1) = ss_1 - r'.$$

Or puisque $\delta r' < \delta r$, il suit de cette équation que

$$\delta(ss_1) = \delta(r + r_1)(r - r_1),$$

c'est-à-dire, puisque $r - r_1 = \varepsilon$, où $\delta\varepsilon < \delta r$,

$$\delta s + \delta s_1 = \delta r + \delta\varepsilon.$$

Or $\delta s > \delta\varepsilon$, donc

$$\delta s_1 < \delta r.$$

On a de plus $s = Nt_1' + t'$, où $\delta t' < \delta N$ et $\delta t_1' < \delta t_1$, donc

$$\delta s < \delta N + \delta t_1.$$

Mais $R = N(s + t_1^2 N)$, par conséquent,

$$\delta R = 2\delta t_1 + 2\delta N,$$

et puisque $\delta R = 2\delta r = 2\delta r_1$, on aura

$$\delta t_1 + \delta N = \delta r_1.$$

On en conclut

$$\delta s < \delta r_1.$$

L'équation $p_1^2 N - q^2 R_1 = v$ est donc transformée en celle-ci:

$$s_1 \beta^2 - 2 r_1 \beta \beta_1 - s \beta_1^2 = v,$$

où

$$\delta r_1 = \tfrac{1}{2} \delta R = n, \quad \delta \beta_1 < \delta \beta, \quad \delta s < n, \quad \delta s_1 < n.$$

On obtient cette équation, comme on vient de le voir, en faisant

(17)
$$p_1 = t_1 q + \beta,$$
$$q = 2\mu\beta + \beta_1,$$

t_1 étant déterminé par l'équation

$$t = t_1^2 + t_1', \text{ où } \delta t_1' < \delta t_1, \quad t = E\left(\frac{R_1}{N}\right),$$

et μ par l'équation,

$$2\mu = E\left(\frac{r + t_1 N}{s}\right),$$

où

$$r^2 + r' = R_1 N, \quad s = N t_1' + R_1 - N t.$$

De plus on a

(18)
$$\begin{cases} r_1 = 2\mu s - t_1 N, \\ s_1 = N + 4\mu t_1 N - 4 s \mu^2, \\ r_1^2 + s s_1 = R_1 N = R. \end{cases}$$

Il s'agit maintenant de l'équation (15).

5.

Résolution de l'équation: $s_1\beta^2 - 2r_1\beta\beta_1 - s\beta_1^2 = v$, *où* $\delta s < \delta r_1$, $\delta s_1 < \delta r_1$, $\delta v < \delta r_1$, $\delta \beta_1 < \delta \beta$.

En divisant l'équation

(19)
$$s_1 \beta^2 - 2 r_1 \beta \beta_1 - s \beta_1^2 = v,$$

par $s_1 \beta_1^2$, on obtient

$$\frac{\beta^2}{\beta_1^2} - 2 \frac{r_1}{s_1} \frac{\beta}{\beta_1} - \frac{s}{s_1} = \frac{v}{s_1 \beta_1^2},$$

donc

$$\left(\frac{\beta}{\beta_1} - \frac{r_1}{s_1}\right)^2 = \left(\frac{r_1}{s_1}\right)^2 + \frac{s}{s_1} + \frac{v}{s_1 \beta_1^2}.$$

On tire de là, en remarquant que $\delta\left(\frac{s}{s_1}+\frac{v}{s_1\beta_1^2}\right)<\delta\left(\frac{r_1}{s_1}\right)$,

$$E\left(\frac{\beta}{\beta_1}-\frac{r_1}{s_1}\right)=\pm E\left(\frac{r_1}{s_1}\right),$$

donc

$$E\left(\frac{\beta}{\beta_1}\right)=E\left(\frac{r_1}{s_1}\right)\cdot(1\pm 1),$$

où l'on doit prendre le signe $+$, car l'autre signe donnerait $E\left(\frac{\beta}{\beta_1}\right)=0$; donc

$$E\left(\frac{\beta}{\beta_1}\right)=2\,E\left(\frac{r_1}{s_1}\right),$$

par conséquent, en faisant

$$E\left(\frac{r_1}{s_1}\right)=\mu_1,$$

on aura

$$\beta=2\beta_1\mu_1+\beta_2,\quad \text{où}\quad \delta\beta_2<\delta\beta_1.$$

Substituant cette valeur de β dans l'équation proposée, on a

$$s_1(\beta_2^2+4\beta_1\beta_2\mu_1+4\mu_1^2\beta_1^2)-2r_1\beta_1(\beta_2+2\mu_1\beta_1)-s\beta_1^2=v,$$

ou bien

(20) $$s_2\beta_1^2-2r_2\beta_1\beta_2-s_1\beta_2^2=-v,$$

où

$$r_2=2\mu_1 s_1-r_1,\quad s_2=s+4r_1\mu_1-4s_1\mu_1^2.$$

L'équation $E\left(\frac{r_1}{s_1}\right)=\mu_1$ donne

$$r_1=\mu_1 s_1+\varepsilon_1,\quad \text{où}\quad \delta\varepsilon_1<\delta s_1.$$

On obtient par là,

$$r_2=r_1-2\varepsilon_1,$$
$$s_2=s+4\varepsilon_1\mu_1,$$

donc, comme il est facile de le voir,

$$\delta r_2=\delta r_1,\quad \delta s_2<\delta r_2.$$

L'équation (19) a par conséquent la même forme que l'équation (20); on peut donc appliquer à celle-ci la même opération, c'est-à-dire en faisant

$$\mu_2 = E\left(\frac{r_2}{s_2}\right), \quad r_2 = s_2\mu_2 + \varepsilon_2, \quad \beta_1 = 2\mu_2\beta_2 + \beta_3,$$

on aura

$$s_3\beta_2^2 - 2r_3\beta_2\beta_3 - s_2\beta_3^2 = v,$$

où

$$r_3 = 2\mu_2 s_2 - r_2 = r_2 - 2\varepsilon_2,$$
$$s_3 = s_1 + 4r_2\mu_2 - 4s_2\mu_2^2 = s_1 + 4\varepsilon_2\mu_2,$$
$$\delta\beta_3 < \delta\beta_2.$$

En continuant ce procédé, on obtiendra, après $n-1$ transformations, cette équation:

(21) $$s_n\beta_{n-1}^2 - 2r_n\beta_{n-1}\beta_n - s_{n-1}\beta_n^2 = (-1)^{n-1}v,$$

où $\delta\beta_n < \delta\beta_{n-1}$.

Les quantités s_n, r_n, β_n, sont déterminées par les équations suivantes:

$$\beta_{n-1} = 2\mu_n\beta_n + \beta_{n+1},$$
$$\mu_n = E\left(\frac{r_n}{s_n}\right),$$
$$r_n = 2\mu_{n-1}s_{n-1} - r_{n-1},$$
$$s_n = s_{n-2} + 4r_{n-1}\mu_{n-1} - 4s_{n-1}\mu_{n-1}^2.$$

A ces équations on peut ajouter celles-ci:

$$r_n = \mu_n s_n + \varepsilon_n,$$
$$r_n = r_{n-1} - 2\varepsilon_{n-1},$$
$$s_n = s_{n-2} + 4\varepsilon_{n-1}\mu_{n-1}.$$

Or, les nombres $\delta\beta$, $\delta\beta_1$, $\delta\beta_2 \ldots \delta\beta_n$, etc. formant une série décroissante, on doit nécessairement, après un certain nombre de transformations, trouver un β_n égal à zéro. Soit donc

$$\beta_m = 0,$$

l'équation (21) donnera, en posant $n = m$,

(22) $$s_m\beta_{m-1}^2 = (-1)^{m-1}v.$$

Voilà l'équation générale de condition pour la résolubilité de l'équation (19); s_m dépend des fonctions s, s_1, r_1, et β_{m-1} doit être pris de manière à satisfaire à la condition

$$\delta s_m + 2\delta\beta_{m-1} < \delta r.$$

L'équation (22) fait voir, que pour tous les s, s_1 et r_1, on peut trouver une infinité de valeurs de v, qui satisfont à l'équation (19).

En substituant dans l'équation proposée, au lieu de v, sa valeur $(-1)^{m-1} s_m \beta_{m-1}^2$, on obtiendra

$$s_1\beta^2 - 2r_1\beta\beta_1 - s\beta_1^2 = (-1)^{m-1} s_m \beta_{m-1}^2,$$

équation toujours résoluble. On voit aisément que β et β_1 ont le facteur commun β_{m-1}. Donc, si l'on suppose que β et β_1 n'ont pas de facteur commun, β_{m-1} sera indépendant de x. On peut donc faire $\beta_{m-1} = 1$, d'où résulte cette équation,

$$s_1\beta^2 - 2r_1\beta\beta_1 - s\beta_1^2 = (-1)^{m-1} s_m.$$

Les fonctions β, β_1, β_2 ... sont déterminées par l'équation

$$\beta_{n-1} = 2\mu_n\beta_n + \beta_{n+1},$$

en posant successivement $n = 1, 2, 3 \ldots m-1$ et en remarquant que $\beta_m = 0$. On obtient par là

$$\beta_{m-2} = 2\mu_{m-1}\beta_{m-1},$$
$$\beta_{m-3} = 2\mu_{m-2}\beta_{m-2} + \beta_{m-1},$$
$$\beta_{m-4} = 2\mu_{m-3}\beta_{m-3} + \beta_{m-2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\beta_3 = 2\mu_4\beta_4 + \beta_5,$$
$$\beta_2 = 2\mu_3\beta_3 + \beta_4,$$
$$\beta_1 = 2\mu_2\beta_2 + \beta_3,$$
$$\beta = 2\mu_1\beta_1 + \beta_2.$$

Ces équations donnent

$$\frac{\beta}{\beta_1} = 2\mu_1 + \frac{1}{\frac{\beta_1}{\beta_2}},$$

$$\frac{\beta_1}{\beta_2} = 2\mu_2 + \frac{1}{\frac{\beta_2}{\beta_3}},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$



$$\frac{\beta_{m-3}}{\beta_{m-2}} = 2\mu_{m-2} + \frac{1}{\frac{\beta_{m-2}}{\beta_{m-1}}},$$

$$\frac{\beta_{m-2}}{\beta_{m-1}} = 2\mu_{m-1}.$$

On en tire par des substitutions successives:

$$\frac{\beta}{\beta_1} = 2\mu_1 + \cfrac{1}{2\mu_2 + \cfrac{1}{2\mu_3 + \cdots + \cfrac{1}{2\mu_{m-2} + \cfrac{1}{2\mu_{m-1}}}}}.$$

On aura donc les valeurs de β et de β_1 en transformant cette fraction continue en fraction ordinaire.

6.

En substituant dans l'équation

$$p_1^2 N - q^2 R_1 = v$$

pour v sa valeur $(-1)^{m-1} s_m$, on aura

$$p_1^2 N - q^2 R_1 = (-1)^{m-1} s_m,$$

où

$$q = 2\mu\beta + \beta_1,$$
$$p_1 = t_1 q + \beta,$$

donc

$$\frac{p_1}{q} = t_1 + \frac{\beta}{q} = t_1 + \frac{1}{\frac{q}{\beta}};$$

or

$$\frac{q}{\beta} = 2\mu + \frac{\beta_1}{\beta};$$

par conséquent,

$$\frac{p_1}{q} = t_1 + \cfrac{1}{2\mu + \cfrac{1}{2\mu_1 + \cfrac{1}{2\mu_2 + \cdots + \cfrac{1}{2\mu_{m-1}}}}}.$$

L'équation

$$p_1^2 N - q^2 R_1 = v$$

donne

$$\left(\frac{p_1}{q}\right)^2 = \frac{R_1}{N} + \frac{r}{q^2 N},$$

$$\frac{p_1}{q} = \sqrt{\frac{R_1}{N} + \frac{r}{q^2 N}};$$

donc en supposant m infini

$$\frac{p_1}{q} = \sqrt{\frac{R_1}{N}};$$

donc

$$\sqrt{\frac{R_1}{N}} = t_1 + \cfrac{1}{2\mu + \cfrac{1}{2\mu_1 + \cfrac{1}{2\mu_2 + \cfrac{1}{2\mu_3 + \text{etc.}}}}}$$

On trouve donc les valeurs de p_1 et de q par la transformation de la fonction $\sqrt{\frac{R_1}{N}}$ en fraction continue.*)

7

Soit maintenant $v = a$, l'on aura

$$s_m = (-1)^{m-1} a.$$

Donc si l'équation

$$p_1^2 N - q^2 R_1 = a,$$

est résoluble, il faut qu'au moins une des quantités,

$$s, \; s_1, \; s_2 \; \ldots \; s_m, \text{ etc.},$$

soit indépendante de x.

D'autre part, lorsqu'une de ces quantités est indépendante de x, il est toujours possible de trouver deux fonctions entières p_1 et q qui satisfassent à cette équation. En effet, lorsque $s_m = a$, on aura les valeurs de p_1 et de q en transformant la fraction continue

*) L'équation ci-dessus n'exprime pas une égalité absolue. Elle indique seulement d'une manière abrégée, comment on peut trouver les quantités t_1, μ, μ_1, $\mu_2 \ldots$ Si toutefois la fraction continue a une valeur, celle-ci sera toujours égale à $\sqrt{\frac{R_1}{N}}$.

$$\frac{p_1}{q} = t_1 + \frac{1}{2\mu + \frac{1}{2\mu_1 + \frac{1}{2\mu_2 + \cdots + \frac{1}{2\mu_{m-1}}}}}$$

en fraction ordinaire. Les fonctions s, s_1, s_2, etc., sont en général, comme il est aisé de le voir, du degré $n-1$, lorsque NR_1 est du degré $2n$. L'équation de condition

$$s_m = a,$$

donnera donc $n-1$ équations entre les coefficiens des fonctions N et R_1; il n'y a donc que $n+1$ de ces coefficiens qu'on puisse prendre arbitrairement, les autres sont déterminés par les équations de condition.

8.

De ce qui précède, il s'ensuit qu'on trouve toutes les valeurs de R_1 et de N, qui rendent la différentielle $\frac{\varrho dx}{\sqrt{R_1 N}}$ intégrable par une expression de la forme

$$\log \frac{p + q\sqrt{R_1 N}}{p - q\sqrt{R_1 N}},$$

en faisant successivement les quantités s, s_1, $s_2 \ldots s_m$, indépendantes de x.

Puisque $p = p_1 N$, on a de même,

$$\int \frac{\varrho dx}{\sqrt{R_1 N}} = \log \frac{p_1\sqrt{N} + q\sqrt{R_1}}{p_1\sqrt{N} - q\sqrt{R_1}};$$

ou bien

(23) $$\left\{ \begin{array}{l} \int \frac{\varrho dx}{\sqrt{R_1 N}} = \log \frac{y\sqrt{N} + \sqrt{R_1}}{y\sqrt{N} - \sqrt{R_1}}, \\ \text{où} \\ y = t_1 + \frac{1}{2\mu + \frac{1}{2\mu_1 + \frac{1}{2\mu_2 + \cdots + \frac{1}{2\mu_{m-1}}}}}, \end{array} \right.$$

en supposant s_m égal à une constante.

Les quantités R_1, N, p_1 et q étant ainsi déterminées, on trouve ϱ

par l'équation (5). Cette équation donne, en mettant $p_1 N$ au lieu de p, et ϱ au lieu de $\frac{M}{N}$,

$$\varrho = \left(p_1 \frac{dN}{dx} + 2N\frac{dp_1}{dx}\right) : q.$$

Il s'ensuit que

$$\delta\varrho = \delta p_1 + \delta N - 1 - \delta q = \delta p - \delta q - 1.$$

Or on a vu que $\delta p - \delta q = n$, donc

$$\delta\varrho = n - 1.$$

Donc si la fonction R ou $R_1 N$ est du degré $2n$, la fonction ϱ sera nécessairement du degré $n - 1$.

9.

Nous avons vu plus haut que

$$R = R_1 N;$$

mais on peut toujours supposer que la fonction N est constante. En effet on a

$$\int \frac{\varrho dx}{\sqrt{R_1 N}} = \log \frac{p_1\sqrt{N} + q\sqrt{R_1}}{p_1\sqrt{N} - q\sqrt{R_1}},$$

et par conséquent,

$$\int \frac{\varrho dx}{\sqrt{R_1 N}} = \tfrac{1}{2}\log\left(\frac{p_1\sqrt{N} + q\sqrt{R_1}}{p_1\sqrt{N} - q\sqrt{R_1}}\right)^2 = \tfrac{1}{2}\log\frac{p_1^2 N + q^2 R_1 + 2p_1 q\sqrt{R_1 N}}{p_1^2 N + q^2 R_1 - 2p_1 q\sqrt{R_1 N}};$$

ou, en faisant $p_1^2 N + q^2 R_1 = p'$ et $2p_1 q = q'$,

$$\int \frac{2\varrho dx}{\sqrt{R}} = \log\frac{p' + q'\sqrt{R}}{p' - q'\sqrt{R}}.$$

Il est clair que p' et q' n'ont pas de facteur commun; on peut donc toujours poser

$$N = 1.$$

Au lieu de l'équation $p_1^2 N - q_2 R_1 = 1$, on a alors celle-ci,

$$p'^2 - q'^2 R = 1,$$

dont on obtient la solution en faisant $N=1$ et mettant R au lieu de R_1.

Ayant $N=1$, on voit aisément que

$$t=R;\quad t_1=r;\quad R=r^2+s;$$

donc

(24)
$$\left\{\begin{array}{l}
\frac{p'}{q'}=r+\frac{1}{2\mu}+\frac{1}{2\mu_1}+\frac{1}{2\mu_2}+\cdots+\frac{1}{2\mu_{m-1}},\\
R=r^2+s,\\
\mu=E\left(\frac{r}{s}\right),\qquad r=s\mu+\varepsilon,\\
r_1=r-2\varepsilon,\qquad s_1=1+4\varepsilon\mu,\\
\mu_1=E\left(\frac{r_1}{s_1}\right),\qquad r_1=s_1\mu_1+\varepsilon_1,\\
r_2=r_1-2\varepsilon_1,\quad s_2=s+4\varepsilon_1\mu_1,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\mu_n=E\left(\frac{r_n}{s_n}\right),\qquad r_n=\mu_n s_n+\varepsilon_n,\\
r_{n+1}=r_n-2\varepsilon_n,\quad s_{n+1}=s_{n-1}+4\varepsilon_n\mu_n,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\mu_{m-1}=E\left(\frac{r_{m-1}}{s_{m-1}}\right),\quad r_{m-1}=\mu_{m-1}s_{m-1}+\varepsilon_{m-1},\\
r_m=r_{m-1}-2\varepsilon_{m-1},\quad s_m=s_{m-2}+4\varepsilon_{m-1}\mu_{m-1}=a.
\end{array}\right.$$

Ayant déterminé les quantités $R, r, \mu, \mu_1 \dots \mu_{m-1}$ par ces équations, on aura

(25)
$$\left\{\begin{array}{l}
\int\frac{\varrho dx}{\sqrt{R}}=\log\frac{p'+q'\sqrt{R}}{p'-q'\sqrt{R}},\\
\text{où}\qquad \varrho=\frac{2}{q'}\frac{dp'}{dx},
\end{array}\right.$$

ce qui résulte de l'équation (5) en y posant $N=1$.

10.

On peut donner à l'expression $\log \frac{p_1\sqrt{N}+q\sqrt{R_1}}{p_1\sqrt{N}-q\sqrt{R_1}}$ une forme plus simple, savoir,

$$\log \frac{p_1\sqrt{N}+q\sqrt{R_1}}{p_1\sqrt{N}-q\sqrt{R_1}} = \log \frac{t_1\sqrt{N}+\sqrt{R_1}}{t_1\sqrt{N}-\sqrt{R_1}}$$
$$+\log \frac{r_1+\sqrt{R}}{r_1-\sqrt{R}} + \log \frac{r_2+\sqrt{R}}{r_2-\sqrt{R}} + \cdots + \log \frac{r_m+\sqrt{R}}{r_m-\sqrt{R}},$$

ce qu'on peut démontrer comme il suit. Soit

$$\frac{\alpha_m}{\beta_m} = t_1 + \cfrac{1}{2\mu + \cfrac{1}{2\mu_1 + \cdots + \cfrac{1}{2\mu_{m-1}}}},$$

on a par la théorie des fractions continues,

(a) $$\alpha_m = \alpha_{m-2} + 2\mu_{m-1}\alpha_{m-1},$$

(b) $$\beta_m = \beta_{m-2} + 2\mu_{m-1}\beta_{m-1}.$$

De ces équations on tire, en éliminant μ_{m-1},

$$\alpha_m\beta_{m-1} - \beta_m\alpha_{m-1} = -(\alpha_{m-1}\beta_{m-2} - \beta_{m-1}\alpha_{m-2}),$$

donc

$$\alpha_m\beta_{m-1} - \beta_m\alpha_{m-1} = (-1)^{m-1},$$

ce qui est connu.

Les deux équations (a) et (b) donnent encore

$$\alpha_m^2 = \alpha_{m-2}^2 + 4\alpha_{m-1}\alpha_{m-2}\mu_{m-1} + 4\mu_{m-1}^2\alpha_{m-1}^2,$$
$$\beta_m^2 = \beta_{m-2}^2 + 4\beta_{m-1}\beta_{m-2}\mu_{m-1} + 4\mu_{m-1}^2\beta_{m-1}^2.$$

Il s'ensuit que

$$\alpha_m^2 N - \beta_m^2 R_1 = \alpha_{m-2}^2 N - \beta_{m-2}^2 R_1$$
$$+ 4\mu_{m-1}(\alpha_{m-1}\alpha_{m-2}N - \beta_{m-1}\beta_{m-2}R_1) + 4\mu_{m-1}^2(\alpha_{m-1}^2 N - \beta_{m-1}^2 R_1).$$

Or on a

$$\alpha_m^2 N - \beta_m^2 R_1 = (-1)^{m-1}s_m,$$
$$\alpha_{m-1}^2 N - \beta_{m-1}^2 R_1 = (-1)^{m-2}s_{m-1},$$
$$\alpha_{m-2}^2 N - \beta_{m-2}^2 R_1 = (-1)^{m-3}s_{m-2},$$

donc, en substituant,

$$s_m = s_{m-2} + 4(-1)^{m-1}\mu_{m-1}(\alpha_{m-1}\alpha_{m-2}N - \beta_{m-1}\beta_{m-2}R_1) - 4\mu^2_{m-1}s_{m-1}.$$

Mais, d'après ce qui précède, on a

$$s_m = s_{m-2} + 4\mu_{m-1}r_{m-1} - 4s_{m-1}\mu^2_{m-1},$$

donc

$$r_{m-1} = (-1)^{m-1}(\alpha_{m-1}\alpha_{m-2}N - \beta_{m-1}\beta_{m-2}R_1).$$

Soit

$$z_m = \alpha_m\sqrt{N} + \beta_m\sqrt{R_1}, \quad \text{et} \quad z_m' = \alpha_m\sqrt{N} - \beta_m\sqrt{R_1},$$

on aura en multipliant,

$$z_m z'_{m-1} = \alpha_m\alpha_{m-1}N - \beta_m\beta_{m-1}R_1 - (\alpha_m\beta_{m-1} - \alpha_{m-1}\beta_m)\sqrt{NR_1};$$

mais on vient de voir qu'on a

$$\alpha_m\beta_{m-1} - \alpha_{m-1}\beta_m = (-1)^{m-1}, \quad \alpha_m\alpha_{m-1}N - \beta_m\beta_{m-1}R_1 = (-1)^m r_m;$$

on tire de là

$$z_m z'_{m-1} = (-1)^m(r_m + \sqrt{R}),$$

et de la même manière,

$$z_m' z_{m-1} = (-1)^m(r_m - \sqrt{R});$$

on en tire en divisant,

$$\frac{z_m}{z_m'}\cdot\frac{z'_{m-1}}{z_{m-1}} = \frac{r_m + \sqrt{R}}{r_m - \sqrt{R}};$$

ou, en multipliant par $\frac{z_{m-1}}{z'_{m-1}}$,

$$\frac{z_m}{z_m'} = \frac{r_m + \sqrt{R}}{r_m - \sqrt{R}}\cdot\frac{z_{m-1}}{z'_{m-1}},$$

En faisant successivement $m = 1, 2, 3 \ldots m$, on aura,

$$\frac{z_1}{z_1'} = \frac{r_1 + \sqrt{R}}{r_1 - \sqrt{R}}\cdot\frac{z_0}{z_0'}$$

$$\frac{z_2}{z_2'} = \frac{r_2 + \sqrt{R}}{r_2 - \sqrt{R}}\cdot\frac{z_1}{z_1'}$$

. . . .

$$\frac{z_m}{z_m'} = \frac{r_m + \sqrt{R}}{r_m - \sqrt{R}} \frac{z_{m-1}}{z'_{m-1}},$$

d'où l'on tire,

$$\frac{z_m}{z_m'} = \frac{z_0}{z_0'} \frac{r_1 + \sqrt{R}}{r_1 - \sqrt{R}} \frac{r_2 + \sqrt{R}}{r_2 - \sqrt{R}} \frac{r_3 + \sqrt{R}}{r_3 - \sqrt{R}} \cdots \frac{r_m + \sqrt{R}}{r_m - \sqrt{R}}.$$

Or on a

$$z_0 = \alpha_0 \sqrt{N} + \beta_0 \sqrt{R_1} = t_1 \sqrt{N} + \sqrt{R_1},$$

$$z_0' = \alpha_0 \sqrt{N} - \beta_0 \sqrt{R_1} = t_1 \sqrt{N} - \sqrt{R_1},$$

et

$$\frac{z_m}{z_m'} = \frac{\alpha_m \sqrt{N} + \beta_m \sqrt{R_1}}{\alpha_m \sqrt{N} - \beta_m \sqrt{R_1}},$$

donc

$$\frac{\alpha_m \sqrt{N} + \beta_m \sqrt{R_1}}{\alpha_m \sqrt{N} - \beta_m \sqrt{R_1}} = \frac{t_1 \sqrt{N} + \sqrt{R_1}}{t_1 \sqrt{N} - \sqrt{R_1}} \cdot \frac{r_1 + \sqrt{R}}{r_1 - \sqrt{R}} \cdot \frac{r_2 + \sqrt{R}}{r_2 - \sqrt{R}} \cdots \frac{r_m + \sqrt{R}}{r_m - \sqrt{R}},$$

et en prenant les logarithmes

(26)
$$\log \frac{\alpha_m \sqrt{N} + \beta_m \sqrt{R_1}}{\alpha_m \sqrt{N} - \beta_m \sqrt{R_1}}$$
$$= \log \frac{t_1 \sqrt{N} + \sqrt{R_1}}{t_1 \sqrt{N} - \sqrt{R_1}} + \log \frac{r_1 + \sqrt{R}}{r_1 - \sqrt{R}} + \log \frac{r_2 + \sqrt{R}}{r_2 - \sqrt{R}} + \cdots + \log \frac{r_m + \sqrt{R}}{r_m - \sqrt{R}},$$

ce qu'il fallait démontrer.

11.

En différentiant l'expression $z = \log \frac{\alpha_m \sqrt{N} + \beta_m \sqrt{R_1}}{\alpha_m \sqrt{N} - \beta_m \sqrt{R_1}}$, on aura, après les réductions convenables,

$$dz = \frac{2(\alpha_m\, d\beta_m - \beta_m\, d\alpha_m)\, NR_1 - \alpha_m \beta_m (R_1\, dN - N\, dR_1)}{(\alpha_m^2 N - \beta_m^2 R_1) \sqrt{NR_1}}.$$

Or on a

$$\alpha_m^2 N - \beta_m^2 R_1 = (-1)^{m-1} s_m,$$

donc en faisant

(27)
$$(-1)^{m-1} \varrho_m = 2\left(\alpha_m \frac{d\beta_m}{dx} - \beta_m \frac{d\alpha_m}{dx}\right) NR_1 - \alpha_m \beta_m \left(\frac{R_1\, dN - N\, dR_1}{dx}\right),$$

on aura

$$dz = \frac{\varrho_m}{s_m} \frac{dx}{\sqrt{NR_1}},$$

et

$$z = \int \frac{\varrho_m}{s_m} \frac{dx}{\sqrt{NR_1}}.$$

donc

$$\int \frac{\varrho_m}{s_m} \frac{dx}{\sqrt{NR_1}} = \log \frac{\alpha_m \sqrt{N} + \beta_m \sqrt{R_1}}{\alpha_m \sqrt{N} - \beta_m \sqrt{R_1}},$$

ou bien

$$(28) \quad \int \frac{\varrho_m}{s_m} \frac{dx}{\sqrt{R}} = \log \frac{t_1 \sqrt{N} + \sqrt{R_1}}{t_1 \sqrt{N} - \sqrt{R_1}} + \log \frac{r_1 + \sqrt{R}}{r_1 - \sqrt{R}} + \cdots + \log \frac{r_m + \sqrt{R}}{r_m - \sqrt{R}}.$$

Dans cette expression s_m est tout au plus du degré $(n-1)$ et ϱ_m est nécessairement du degré $(n-1+\delta s_m)$, ce dont on peut se convaincre de la manière suivante. En différentiant l'équation

$$(29) \quad \alpha_m^2 N - \beta_m^2 R_1 = (-1)^{m-1} s_m,$$

on trouvera la suivante

$$2\alpha_m d\alpha_m N + \alpha_m^2 dN - 2\beta_m d\beta_m . R_1 - \beta_m^2 dR_1 = (-1)^{m-1} ds_m,$$

ou, en multipliant par $\alpha_m N$,

$$\alpha_m^2 N(2N d\alpha_m + \alpha_m dN) - 2\alpha_m \beta_m d\beta_m NR_1 - \beta_m^2 \alpha_m N dR_1 = (-1)^{m-1} \alpha_m N ds_m.$$

Mettant ici à la place de $\alpha_m^2 N$, sa valeur tirée de l'équation (29), on aura

$$(-1)^{m-1} s_m (2N d\alpha_m + \alpha_m dN) + \beta_m [2NR_1 \beta_m d\alpha_m + \alpha_m \beta_m R_1 dN - 2\alpha_m d\beta_m NR_1 \\ - \beta_m \alpha_m N dR_1] = (-1)^{m-1} \alpha_m N ds_m,$$

c'est-à-dire,

$$\beta_m [2(\alpha_m d\beta_m - \beta_m d\alpha_m) NR_1 - \alpha_m \beta_m (R_1 dN - N dR_1)] \\ = (-1)^{m-1} [s_m (2N d\alpha_m + \alpha_m dN) - \alpha_m N ds_m].$$

En vertu de l'équation (27) le premier membre de cette équation est égal à $\beta_m (-1)^{m-1} \varrho_m dx$; donc on aura

$$(30) \quad \beta_m \varrho_m = s_m \left(\frac{2N d\alpha_m}{dx} + \frac{\alpha_m dN}{dx} \right) - \alpha_m \frac{N ds_m}{dx}.$$

Puisque $\delta s_m < n$, le second membre de cette équation sera nécessairement du degré $(\delta s_m + \delta N + \delta \alpha_m - 1)$, comme il est facile de le voir; donc

$$\delta \varrho_m = \delta s_m + \delta N + \delta \alpha_m - \delta \beta_m - 1.$$

Or de l'équation (29) il suit que

$$2\delta \alpha_m + \delta N = 2\delta \beta_m + \delta R_1,$$

donc

$$\delta \varrho_m = \delta s_m + \frac{\delta N + \delta R_1}{2} - 1;$$

ou, puisque $\delta N + \delta R_1 = 2n$,

$$\delta \varrho_m = \delta s_m + n - 1,$$

c'est-à-dire que ϱ_m est nécessairement du degré $(\delta s_m + n - 1)$. Il suit de là que la fonction $\frac{\varrho_m}{s_m}$ est du degré $(n-1)$.

Faisant dans la formule (28) $N = 1$, on aura $t_1 = r$, et par conséquent

$$(31) \qquad \int \frac{\varrho_m dx}{s_m \sqrt{R}} = \log \frac{r + \sqrt{R}}{r - \sqrt{R}} + \log \frac{r_1 + \sqrt{R}}{r_1 - \sqrt{R}} + \cdots + \log \frac{r_m + \sqrt{R}}{r_m - \sqrt{R}},$$

où, suivant l'équation (30),

$$\beta_m \varrho_m = 2 s_m \frac{d\alpha_m}{dx} - \alpha_m \frac{ds_m}{dx}.$$

L'équation (28) donne, en faisant $s_m = a$,

$$(32) \quad \int \frac{\varrho_m dx}{a\sqrt{R}} = \log \frac{t_1 \sqrt{N} + \sqrt{R_1}}{t_1 \sqrt{N} - \sqrt{R_1}} + \log \frac{r_1 + \sqrt{R}}{r_1 - \sqrt{R}} + \cdots + \log \frac{r_m + \sqrt{R}}{r_m - \sqrt{R}}$$

$$\text{où} \quad \beta_m \varrho_m = a\left(2N \frac{d\alpha_m}{dx} + \alpha_m \frac{dN}{dx}\right),$$

et lorsque $N = 1$,

$$(33) \qquad \int \frac{\varrho_m dx}{\sqrt{R}} = \log \frac{r + \sqrt{R}}{r - \sqrt{R}} + \log \frac{r_1 + \sqrt{R}}{r_1 - \sqrt{R}} + \cdots + \log \frac{r_m + \sqrt{R}}{r_m - \sqrt{R}},$$

$$\text{où} \quad \varrho_m = \frac{2}{\beta_m} \frac{d\alpha_m}{dx}.$$

D'après ce qui précède, cette formule a la même généralité que la for-

mule (32), et donne toutes les intégrales de la forme $\int \frac{\varrho dx}{\sqrt{R}}$, où ϱ et R sont des fonctions entières, qui sont exprimables par une fonction logarithmique de la forme $\log \frac{p+q\sqrt{R}}{p-q\sqrt{R}}$.

12.

Dans l'équation (28) la fonction $\frac{\varrho_m}{s_m}$ est donnée par l'équation (30). Mais on peut exprimer cette fonction d'une manière plus commode à l'aide des quantités t_1, r_1, r_2, etc. μ, μ_1, μ_2, etc. En effet, soit

$$z_m = \log \frac{r_m + \sqrt{R}}{r_m - \sqrt{R}},$$

on aura en différentiant,

$$dz_m = \frac{dr_m + \frac{1}{2}\frac{dR}{\sqrt{R}}}{r_m + \sqrt{R}} - \frac{dr_m - \frac{1}{2}\frac{dR}{\sqrt{R}}}{r_m - \sqrt{R}},$$

ou en réduisant,

(33′) $$dz_m = \frac{r_m dR - 2R\,dr_m}{r_m^2 - R}\frac{1}{\sqrt{R}}.$$

Or nous avons trouvé plus haut

$$s_m = s_{m-2} + 4\mu_{m-1} r_{m-1} - 4 s_{m-1}\mu_{m-1}^2,$$

donc en multipliant par s_{m-1},

$$s_m s_{m-1} = s_{m-1}s_{m-2} + 4\mu_{m-1}s_{m-1}r_{m-1} - 4 s_{m-1}^2\mu_{m-1}^2,$$

c'est-à-dire,

$$s_m s_{m-1} = s_{m-1}s_{m-2} + r_{m-1}^2 - (2s_{m-1}\mu_{m-1} - r_{m-1})^2.$$

Mais on a

$$r_m = 2s_{m-1}\mu_{m-1} - r_{m-1},$$

donc en substituant cette quantité,

$$s_m s_{m-1} = s_{m-1}s_{m-2} + r_{m-1}^2 - r_m^2,$$

d'où l'on déduit par transposition,

$$r_m^2 + s_m s_{m-1} = r_{m-1}^2 + s_{m-1}s_{m-2}.$$

Il suit de cette équation que $r_m^2 + s_m s_{m-1}$ a la même valeur pour tous les m et par conséquent que

$$r_m^2 + s_m s_{m-1} = r_1^2 + s s_1;$$

or nous avons vu plus haut que $r_1^2 + s s_1 = R$, et par suite,

$$R = r_m^2 + s_m s_{m-1}. \tag{34}$$

Substituant cette expression pour R dans l'équation (33'), on aura après les réductions convenables

$$dz_m = \frac{2dr_m}{\sqrt{R}} - \frac{ds_m}{s_m}\frac{r_m}{\sqrt{R}} - \frac{ds_{m-1}}{s_{m-1}}\frac{r_m}{\sqrt{R}};$$

mais puisque $r_m = 2s_{m-1}\mu_{m-1} - r_{m-1}$, le terme $-\frac{ds_{m-1}}{s_{m-1}}\frac{r_m}{\sqrt{R}}$ se transforme en $-2\mu_{m-1}\frac{ds_{m-1}}{\sqrt{R}} + \frac{ds_{m-1}}{s_{m-1}}\frac{r_{m-1}}{\sqrt{R}}$. On obtient donc

$$dz_m = (2dr_m - 2\mu_{m-1}ds_{m-1})\frac{1}{\sqrt{R}} - \frac{ds_m}{s_m}\frac{r_m}{\sqrt{R}} + \frac{ds_{m-1}}{s_{m-1}}\frac{r_{m-1}}{\sqrt{R}},$$

et en intégrant

$$\int \frac{ds_m}{s_m}\frac{r_m}{\sqrt{R}} = -z_m + \int (2dr_m - 2\mu_{m-1}ds_{m-1})\frac{1}{\sqrt{R}} + \int \frac{ds_{m-1}}{s_{m-1}}\frac{r_{m-1}}{\sqrt{R}}. \tag{35}$$

Cette expression est, comme on le voit, une formule de réduction pour les intégrales de la forme $\int \frac{ds_m}{s_m}\frac{r_m}{\sqrt{R}}$. Car elle donne l'intégrale $\int \frac{ds_m}{s_m}\frac{r_m}{\sqrt{R}}$ par une autre intégrale de la même forme et par une intégrale de la forme $\int \frac{tdx}{\sqrt{R}}$ où t est une fonction entière. Mettant dans cette formule à la place de m successivement $m, m-1, m-2 \ldots 3, 2, 1$, on obtiendra m équations semblables, dont la somme donnera la formule suivante (en remarquant que $r_0 = 2s\mu - r_1 = t_1 N$ en vertu de l'équation $r_1 + t_1 N = 2s\mu$)

$$\int \frac{ds_m}{s_m}\frac{r_m}{\sqrt{R}} = -(z_1 + z_2 + z_3 + \cdots + z_m) + \int \frac{ds}{s}\frac{t_1 N}{\sqrt{R}}$$
$$+ \int 2(dr_1 + dr_2 + \cdots + dr_m - \mu ds - \mu_1 ds_1 - \cdots - \mu_{m-1}ds_{m-1})\frac{1}{\sqrt{R}}.$$

On peut encore réduire l'intégrale $\int \frac{ds}{s}\frac{t_1 N}{\sqrt{R}}$. En différentiant l'expression

$$z = \log \frac{t_1\sqrt{N}+\sqrt{R_1}}{t_1\sqrt{N}-\sqrt{R_1}},$$

on aura après quelques réductions,

$$dz = \frac{-2dt_1 NR_1 - t_1(R_1 dN - NdR_1)}{(t_1^2 N - R_1)\sqrt{R}}.$$

Or on a

$$R_1 = t_1^2 N + s;$$

substituant donc cette valeur de R_1 dans l'équation ci-dessus, on trouve

$$dz = (2Ndt_1 + t_1 dN)\frac{1}{\sqrt{R}} - \frac{ds}{s}\frac{t_1 N}{\sqrt{R}}.$$

donc en intégrant

$$\int \frac{ds}{s}\frac{t_1 N}{\sqrt{R}} = -z + \int (2Ndt_1 + t_1 dN)\frac{1}{\sqrt{R}}.$$

L'expression de $\int \frac{ds_m}{s_m}\frac{r_m}{\sqrt{R}}$ se transforme par là en celle-ci,

$$\int \frac{ds_m}{s_m}\frac{r_m}{\sqrt{R}} = -(z+z_1+z_2+\cdots+z_m)$$

$$+\int \frac{2}{\sqrt{R}}(Ndt_1 + \tfrac{1}{2}t_1 dN + dr_1 + \cdots + dr_m - \mu ds - \mu_1 ds_1 - \cdots - \mu_{m-1}ds_{m-1}),$$

ou, en mettant à la place des quantités z, z_1, $z_2 \ldots$ leurs valeurs,

(36) $$\int \frac{ds_m}{s_m}\frac{r_m}{\sqrt{R}}$$

$$= \int \frac{2}{\sqrt{R}}(Ndt_1 + \tfrac{1}{2}t_1 dN + dr_1 + \cdots + dr_m - \mu ds - \mu_1 ds_1 - \cdots - \mu_{m-1}ds_{m-1})$$

$$-\log\frac{t_1\sqrt{N}+\sqrt{R_1}}{t_1\sqrt{N}-\sqrt{R_1}} - \log\frac{r_1+\sqrt{R}}{r_1-\sqrt{R}} - \log\frac{r_2+\sqrt{R}}{r_2-\sqrt{R}} - \cdots - \log\frac{r_m+\sqrt{R}}{r_m-\sqrt{R}}.$$

Cette formule est entièrement la même que la formule (28); elle donne

(37) $$\frac{\varrho_m}{s_m}dx = -\frac{r_m ds_m}{s_m}$$

$$+2(Ndt_1 + \tfrac{1}{2}t_1 dN + dr_1 + \cdots + dr_m - \mu ds - \cdots - \mu_{m-1}ds_{m-1}).$$

Mais l'expression ci-dessus dispense du calcul des fonctions α_m et β_m.

Si maintenant s_m est indépendant de x, l'intégrale $\int \frac{ds_m}{s_m} \frac{r_m}{\sqrt{R}}$ disparaît et l'on obtient la formule suivante:

$$(38)\quad \int \frac{2}{\sqrt{R}} \left(\tfrac{1}{2} t_1 \, dN + N \, dt_1 + dr_1 + \cdots + dr_m - \mu \, ds - \cdots - \mu_{m-1} \, ds_{m-1}\right)$$
$$= \log \frac{t_1 \sqrt{N} + \sqrt{R_1}}{t_1 \sqrt{N} - \sqrt{R_1}} + \log \frac{r_1 + \sqrt{R}}{r_1 - \sqrt{R}} + \log \frac{r_2 + \sqrt{R}}{r_2 - \sqrt{R}} + \cdots + \log \frac{r_m + \sqrt{R}}{r_m - \sqrt{R}}.$$

Si dans l'expression (36) on fait $N = 1$, on a $t_1 = r$, et par suite

$$(39)\quad \int \frac{ds_m}{s_m} \frac{r_m}{\sqrt{R}} = \int \frac{2}{\sqrt{R}} \left(dr + dr_1 + \cdots + dr_m - \mu \, ds - \cdots - \mu_{m-1} \, ds_{m-1}\right)$$
$$- \log \frac{r + \sqrt{R}}{r - \sqrt{R}} - \log \frac{r_1 + \sqrt{R}}{r_1 - \sqrt{R}} - \cdots - \log \frac{r_m + \sqrt{R}}{r_m - \sqrt{R}},$$

et si l'on fait $s_m = a$:

$$(40)\quad \int \frac{2}{\sqrt{R}} \left(dr + dr_1 + \cdots + dr_m - \mu \, ds - \mu_1 \, ds_1 - \cdots - \mu_{m-1} \, ds_{m-1}\right)$$
$$= \log \frac{r + \sqrt{R}}{r - \sqrt{R}} + \log \frac{r_1 + \sqrt{R}}{r_1 - \sqrt{R}} + \cdots + \log \frac{r_m + \sqrt{R}}{r_m - \sqrt{R}}.$$

En vertu de ce qui précède, cette formule a la même généralité que (38); elle donne par conséquent toutes les intégrales de la forme $\int \frac{t \, dx}{\sqrt{R}}$, où t est une fonction entière, qui peuvent être exprimées par une fonction de la forme $\log \frac{p + q\sqrt{R}}{p - q\sqrt{R}}$.

13.

Nous avons vu ci-dessus que

$$\sqrt{\frac{R_1}{N}} = t_1 + \cfrac{1}{2\mu + \cfrac{1}{2\mu_1 + \cfrac{1}{2\mu_2 + \cfrac{1}{2\mu_3 + \cdots}}}}$$

donc, lorsque $N = 1$,

$$\sqrt{R} = r + \cfrac{1}{2\mu + \cfrac{1}{2\mu_1 + \cfrac{1}{2\mu_2 + \cfrac{1}{2\mu_3 + \cdots}}}}$$

En général les quantités $\mu, \mu_1, \mu_2, \mu_3 \ldots$ sont différentes entre elles. Mais lorsqu'une des quantités $s, s_1, s_2 \ldots$ est indépendante de x, la fraction continue devient *périodique*. On peut le démontrer comme il suit.

On a

$$r_{m+1}^2 + s_m s_{m+1} = R = r^2 + s,$$

donc, lorsque $s_m = a$,

$$r_{m+1}^2 - r^2 = s - a s_{m+1} = (r_{m+1} + r)(r_{m+1} - r).$$

Or $\delta r_{m+1} = \delta r$, $\delta s < \delta r$, $\delta s_{m+1} < \delta r$, donc cette équation ne peut subsister à moins qu'on n'ait en même temps,

$$r_{m+1} = r, \quad s_{m+1} = \frac{s}{a}.$$

Or, puisque $\mu_{m+1} = E\left(\frac{r_{m+1}}{s_{m+1}}\right)$ on a de même

$$\mu_{m+1} = a\, E\left(\frac{r}{s}\right);$$

mais $E\left(\frac{r}{s}\right) = \mu$, donc

$$\mu_{m+1} = a\mu.$$

On a de plus

$$s_{m+2} = s_m + 4\mu_{m+1} r_{m+1} - 4\mu_{m+1}^2 s_{m+1},$$

donc ayant $s_m = a$, $r_{m+1} = r$, $\mu_{m+1} = a\mu$, on en conclut

$$s_{m+2} = a(1 + 4\mu r - 4\mu^2 s);$$

or $s_1 = 1 + 4\mu r - 4\mu^2 s$, donc

$$s_{m+2} = a s_1.$$

On a de même

$$r_{m+2} = 2\mu_{m+1} s_{m+1} - r_{m+1} = 2\mu s - r,$$

donc, puisque $r_1 = 2\mu s - r$,

$$r_{m+2} = r_1,$$

d'où l'on tire

$$\mu_{m+2} = E\left(\frac{r_{m+2}}{s_{m+2}}\right) = \frac{1}{a} E\left(\frac{r_1}{s_1}\right),$$

donc

$$\mu_{m+2} = \frac{\mu_1}{a}.$$

En continuant ce procédé on voit sans peine qu'on aura en général

(41) $$\begin{cases} r_{m+n} = r_{n-1}, \quad s_{m+n} = a^{\pm 1} s_{n-1}, \\ \mu_{m+n} = a^{\mp 1} \mu_{n-1}. \end{cases}$$

Le signe supérieur doit être pris lorsque n est pair et le signe inférieur dans le cas contraire.

Mettant dans l'équation

$$r_m^2 + s_{m-1} s_m = r^2 + s$$

a à la place de s_m, on aura

$$(r_m - r)(r_m + r) = s - a s_{m-1}.$$

Il s'ensuit que

$$r_m = r, \quad s_{m-1} = \frac{s}{a}.$$

Or on a $\mu_m = E\left(\frac{r_m}{s_m}\right)$, donc

$$\mu_m = \frac{1}{a} E r;$$

c'est-à-dire

$$\mu_m = \frac{1}{a} r.$$

On a de plus

$$r_m + r_{m-1} = 2 s_{m-1} \mu_{m-1},$$

c'est-à-dire, puisque $r_m = r$, $s_{m-1} = \frac{s}{a}$,

$$r + r_{m-1} = \frac{2s}{a} \mu_{m-1}.$$

Mais $r + r_1 = 2s\mu$, donc

$$r_{m-1} - r_1 = \frac{2s}{a}(\mu_{m-1} - a\mu).$$

On a

$$r_{m-1}^2 + s_{m-1} s_{m-2} = r_1^2 + s s_1,$$

c'est-à-dire, puisque $s_{m-1} = \frac{s}{a}$,

$$(r_{m-1} + r_1)(r_{m-1} - r_1) = \frac{s}{a}(a s_1 - s_{m-2}).$$

Or nous avons vu que

$$r_{m-1} - r_1 = \frac{2s}{a}(\mu_{m-1} - a\mu),$$

donc en substituant,

$$2(r_{m-1} + r_1)(\mu_{m-1} - a\mu) = a s_1 - s_{m-2}.$$

Cette équation donne, en remarquant que $\delta(r_{m-1} + r_1) > \delta(a s_1 - s_{m-2})$,

$$\mu_{m-1} = a\mu, \quad s_{m-2} = a s_1,$$

et par conséquent

$$r_{m-1} = r_1.$$

Par un procédé semblable on trouvera aisément,

$$r_{m-2} = r_2, \quad s_{m-3} = \frac{1}{a} s_2, \quad \mu_{m-2} = \frac{\mu_1}{a},$$

et en général

(42) $$\begin{cases} r_{m-n} = r_n, \quad s_{m-n} = a^{\pm 1} s_{n-1}, \\ \mu_{m-n} = a^{\mp 1} \mu_{n-1}. \end{cases}$$

14.

A. Soit m un nombre pair, $2k$.

Dans ce cas on voit aisément, en vertu des équations (41) et (42), que les quantités $r, r_1, r_2 \ldots s, s_1, s_2 \ldots \mu, \mu_1, \mu_2 \ldots$ forment les séries suivantes:

0	1	..	$2k-2$	$2k-1$	$2k$	$2k+1$	$2k+2$	..	$4k-1$	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$	etc.
r	r_1	..	r_2	r_1	r	r	r_1	..	r_2	r_1	r	r	r_1	etc.
s	s_1	..	as_1	$\frac{s}{a}$	a	$\frac{s}{a}$	as_1	..	s_1	s	1	s	s_1	etc.
μ	μ_1	..	$\frac{\mu_1}{a}$	$a\mu$	$\frac{r}{a}$	$a\mu$	$\frac{\mu_1}{a}$	..	μ_1	μ	r	μ	μ_1	etc.

B. Soit m un nombre impair, $2k-1$.

Dans ce cas l'équation

$$s_{m-n} = a^{\pm 1} s_{n-1} \quad \text{ou} \quad s_{2k-n-1} = a^{\mp 1} s_{n-1}$$

donne, pour $n = k$,

$$s_{k-1} = a^{\pm 1} s_{k-1}, \quad \text{donc} \quad a = 1.$$

Les quantités r, r_1 etc. s, s_1 etc. μ, μ_1 etc. forment les séries suivantes:

0	1	..	$k-2$	$k-1$	k	$k+1$	..	$2k-2$	$2k-1$	$2k$	$2k+1$	etc.
r	r_1	..	r_{k-2}	r_{k-1}	r_{k-1}	r_{k-2}	..	r_1	r	r	r_1	etc.
s	s_1	..	s_{k-2}	s_{k-1}	s_{k-2}	s_{k-3}	..	s	1	s	s_1	etc.
μ	μ_1	..	μ_{k-2}	μ_{k-1}	μ_{k-2}	μ_{k-3}	..	μ	r	μ	μ_1	etc.

On voit par là que, lorsqu'une des quantités s, s_1, s_2 ... est indépendante de x, la fraction continue résultant de $\sqrt{R}$ est toujours périodique et de la forme suivante, lorsque $s_m = a$:

$$\sqrt{R} = r + \cfrac{1}{2\mu + \cfrac{1}{2\mu_1 + \cdots + \cfrac{1}{\frac{2\mu_1}{a} + \cfrac{1}{2a\mu + \cfrac{1}{\frac{2r}{a} + \cfrac{1}{2a\mu + \cfrac{1}{\frac{2\mu_1}{a} + \cdots + \cfrac{1}{2\mu + \cfrac{1}{2r + \cfrac{1}{2\mu + \cdots}}}}}}}}}}$$

Lorsque m est impair, on a de plus $a = 1$, et par suite

$$\sqrt{R} = r + \cfrac{1}{2\mu + \cfrac{1}{2\mu_1 + \cdots + \cfrac{1}{2\mu_1 + \cfrac{1}{2\mu + \cfrac{1}{2r + \cfrac{1}{2\mu + \cfrac{1}{2\mu_1 + \cdots}}}}}}}$$

La réciproque a également lieu; c'est-à-dire que, lorsque la fraction continue résultant de $\sqrt{R}$ a la forme ci-dessus, s_m sera indépendant de x. En effet, soit

$$\mu_m = \frac{r}{a};$$

on tire de l'équation $r_m = s_m \mu_m + \varepsilon_m$,

$$r_m = \frac{r}{a} s_m + \varepsilon_m.$$

Or, puisque $r_m = r_{m-1} - 2\varepsilon_{m-1}$, où $\delta\varepsilon_{m-1} < \delta r$, il est clair que

$$r_m = r + \gamma_m, \quad \text{où} \quad \delta\gamma_m < \delta r.$$

On en tire

$$r\left(1 - \frac{s_m}{a}\right) = \varepsilon_m - \gamma_m,$$

et par conséquent $s_m = a$, ce qu'il fallait démontrer. En combinant cela avec ce qui précède, on trouve la proposition suivante:

"Lorsqu'il est possible de trouver pour ϱ une fonction entière telle, que

$$\int \frac{\varrho dx}{\sqrt{R}} = \log \frac{y + \sqrt{R}}{y - \sqrt{R}},$$

"la fraction continue résultant de $\sqrt{R}$ est périodique, et a la forme suivante:

$$\sqrt{R} = r + \cfrac{1}{2\mu + \cfrac{1}{2\mu_1 + \cdots + \cfrac{1}{2\mu_1 + \cfrac{1}{2\mu + \cfrac{1}{2r + \cfrac{1}{2\mu + \cfrac{1}{2\mu_1 + \text{etc.}}}}}}}}$$

"et réciproquement, lorsque la fraction continue résultant de $\sqrt{R}$ a cette "forme, il est toujours possible de trouver pour ϱ une fonction entière qui "satisfasse à l'équation,

$$\int \frac{\varrho dx}{\sqrt{R}} = \log \frac{y + \sqrt{R}}{y - \sqrt{R}}.$$

"La fonction y est donnée par l'expression suivante:

$$y = r + \cfrac{1}{2\mu + \cfrac{1}{2\mu_1 + \cfrac{1}{2\mu_2 + \cdots + \cfrac{1}{2\mu + \cfrac{1}{2r}}}}}.$$

Dans cette proposition est contenue la solution complète du problème proposé au commencement de ce mémoire.

15.

Nous venons de voir que, lorsque s_{2k-1} est indépendant de x, on aura toujours $s_k = s_{k-2}$, et lorsque s_{2k} est indépendant de x, on aura $s_k = cs_{k-1}$, où c est constant. La réciproque a également lieu, ce qu'on peut démontrer comme il suit.

I. Soit d'abord $s_k = s_{k-2}$, on a

$$r_{k-1}^2 + s_{k-1}s_{k-2} = r_k^2 + s_k s_{k-1};$$

or $s_k = s_{k-2}$, donc

$$r_k = r_{k-1}.$$

De plus

$$r_k = \mu_k s_k + \varepsilon_k,$$

$$r_{k-2} = \mu_{k-2}s_{k-2} + \varepsilon_{k-2},$$

donc

$$r_k - r_{k-2} = s_k(\mu_k - \mu_{k-2}) + \varepsilon_k - \varepsilon_{k-2}.$$

Mais

$$r_k = r_{k-1}, \quad r_{k-2} = r_{k-1} + 2\varepsilon_{k-2},$$

donc, en substituant, on trouve

$$0 = s_k(\mu_k - \mu_{k-2}) + \varepsilon_k + \varepsilon_{k-2}.$$

Cette équation donne, en remarquant que $\delta\varepsilon_k < \delta s_k$, $\delta\varepsilon_{k-2} < \delta s_{k-2}$,

$$\mu_k = \mu_{k-2}, \quad \varepsilon_k = -\varepsilon_{k-2}.$$

Or $r_{k+1} = r_k - 2\varepsilon_k$, donc, en vertu de la dernière équation,

$$r_{k+1} = r_{k-1} + 2\varepsilon_{k-2},$$

et, puisque $r_{k-1} = r_{k-2} - 2\varepsilon_{k-2}$, on en conclut

$$r_{k+1} = r_{k-2}.$$

On a

$$r_{k+1}^2 + s_k s_{k+1} = r_{k-2}^2 + s_{k-2} s_{k-3},$$

donc, puisque $r_{k+1} = r_{k-2}$, $s_k = s_{k-2}$, on a aussi

$$s_{k+1} = s_{k-3}.$$

En combinant cette équation avec celles-ci,

$$r_{k+1} = \mu_{k+1} s_{k+1} + \varepsilon_{k+1}, \quad r_{k-3} = \mu_{k-3} s_{k-3} + \varepsilon_{k-3},$$

on obtiendra

$$r_{k+1} - r_{k-3} = s_{k+1}(\mu_{k+1} - \mu_{k-3}) + \varepsilon_{k+1} - \varepsilon_{k-3}.$$

Or on a $r_{k+1} = r_{k-2}$, et $r_{k-2} = r_{k-3} - 2\varepsilon_{k-3}$, par conséquent

$$0 = s_{k+1}(\mu_{k+1} - \mu_{k-3}) + \varepsilon_{k+1} + \varepsilon_{k-3}.$$

Il s'ensuit que

$$\mu_{k+1} = \mu_{k-3}, \quad \varepsilon_{k+1} = -\varepsilon_{k-3}.$$

En continuant de cette manière, on voit aisément qu'on aura en général

$$r_{k+n} = r_{k-n-1}, \quad \mu_{k+n} = \mu_{k-n-2}, \quad s_{k+n} = s_{k-n-2}.$$

En posant dans la dernière équation $n = k - 1$, on trouvera

$$s_{2k-1} = s_{-1}.$$

Or il est clair que s_{-1} est la même chose que 1; car on a en général

$$R = r_m^2 + s_m s_{m-1},$$

donc en faisant $m = 0$,

$$R = r^2 + s s_{-1};$$

mais $R = r^2 + s$, donc $s_{-1} = 1$, et par conséquent

$$s_{2k-1} = 1.$$

II. Soit en second lieu $s_k = c s_{k-1}$, on a

$$r_k = \mu_k s_k + \varepsilon_k,$$

$$r_{k-1} = \mu_{k-1} s_{k-1} + \varepsilon_{k-1},$$

donc

$$r_k - r_{k-1} = s_{k-1}(c\mu_k - \mu_{k-1}) + \varepsilon_k - \varepsilon_{k-1}.$$

Or $r_k - r_{k-1} = -2\varepsilon_{k-1}$, donc

$$0 = s_{k-1}(c\mu_k - \mu_{k-1}) + \varepsilon_k + \varepsilon_{k-1}.$$

Cette équation donne

$$\mu_k = \frac{1}{c}\mu_{k-1}, \quad \varepsilon_k = -\varepsilon_{k-1}.$$

Donc des équations

$$r_k - r_{k-1} = -2\varepsilon_{k-1}, \quad r_{k+1} - r_k = -2\varepsilon_k,$$

on déduit en ajoutant

$$r_{k+1} = r_{k-1}.$$

On a de plus

$$r_{k+1}^2 + s_k s_{k+1} = r_{k-1}^2 + s_{k-1} s_{k-2},$$

et, puisque $r_{k+1} = r_{k-1}$ et $s_k = c s_{k-1}$, on en conclut

$$s_{k+1} = \frac{1}{c} s_{k-2}.$$

En continuant de cette manière, on aura,

$$s_{2k} = c^{\pm 1},$$

c'est-à-dire que s_{2k} est indépendant de x.

Cette propriété des quantités s, s_1, s_2 etc. fait voir que l'équation $s_{2k} = a$ est identique avec l'équation $s_k = a^{\pm 1} s_{k-1}$ et que l'équation $s_{2k-1} = 1$ est identique avec l'équation $s_k = s_{k-2}$. Il s'ensuit que, lorsqu'on cherche la forme de R qui convient à l'équation $s_{2k} = a$, on peut au lieu de cette équation poser $s_k = a^{\pm 1} s_{k-1}$, et que, lorsqu'on cherche la forme de R qui convient à l'équation $s_{2k-1} = 1$, il suffit de faire $s_k = s_{k-2}$, ce qui abrége beaucoup le calcul.

16.

En vertu des équations (41) et (42) on peut donner à l'expression (40) une forme plus simple.

a) Lorsque m est pair et égal à $2k$, on a

$$(43)\quad \begin{cases} \int \frac{2}{\sqrt{R}}(dr + dr_1 + \cdots + dr_{k-1} + \frac{1}{2} dr_k - \mu ds - \mu_1 ds_1 - \cdots - \mu_{k-1} ds_{k-1}) \\ = \log \frac{r+\sqrt{R}}{r-\sqrt{R}} + \log \frac{r_1+\sqrt{R}}{r_1-\sqrt{R}} + \cdots + \log \frac{r_{k-1}+\sqrt{R}}{r_{k-1}-\sqrt{R}} + \frac{1}{2}\log \frac{r_k+\sqrt{R}}{r_k-\sqrt{R}}. \end{cases}$$

b) Lorsque m est impair et égal à $2k-1$, on a

$$(44)\quad \begin{cases} \int \frac{2}{\sqrt{R}}(dr + dr_1 + \cdots + dr_{k-1} - \mu ds - \mu_1 ds_1 - \cdots - \mu_{k-2} ds_{k-2} - \frac{1}{2}\mu_{k-1} ds_{k-1}) \\ = \log \frac{r+\sqrt{R}}{r-\sqrt{R}} + \log \frac{r_1+\sqrt{R}}{r_1-\sqrt{R}} + \cdots + \log \frac{r_{k-1}+\sqrt{R}}{r_{k-1}-\sqrt{R}}. \end{cases}$$

17.

Pour appliquer ce qui précède à un exemple, prenons l'intégrale

$$\int \frac{\varrho dx}{\sqrt{x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta}}.$$

On a ici $\delta R = 4$, donc les fonctions s, s_1, s_2, s_3 ... sont du premier degré, et par suite l'équation $s_m = \text{const.}$ ne donne qu'une seule équation de condition entre les quantités, α, β, γ, δ, ε.

Faisant

$$x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta = (x^2 + ax + b)^2 + c + ex,$$

on aura

$$r = x^2 + ax + b, \quad s = c + ex.$$

Pour abréger le calcul, nous ferons $c = 0$. Dans ce cas on a $s = ex$, et par conséquent,

$$\mu = E\left(\frac{r}{s}\right) = E\left(\frac{x^2 + ax + b}{ex}\right);$$

c'est-à-dire

$$\mu = \frac{x}{e} + \frac{a}{e}, \quad \varepsilon = b.$$

De plus

$$r_1 = r - 2\varepsilon = x^2 + ax + b - 2b = x^2 + ax - b,$$

$$s_1 = 1 + 4\varepsilon\mu = 1 + 4b\frac{x+a}{e} = \frac{4b}{e}x + \frac{4ab}{e} + 1,$$

$$\mu_1 = E\left(\frac{r_1}{s_1}\right) = E\frac{x^2+ax-b}{\frac{4b}{e}x + \frac{4ab}{e} + 1} = \frac{e}{4b}x - \frac{e^2}{16b^2},$$

$$\varepsilon_1 = r_1 - \mu_1 s_1 = \frac{ae}{4b} + \frac{e^2}{16b^2} - b,$$

$$s_2 = s + 4\varepsilon_1\mu_1 = \left(\frac{ae^2}{4b^2} + \frac{e^3}{16b^3}\right)x - \frac{e^2}{4b^2}\left(\frac{ae}{4b} + \frac{e^2}{16b^2} - b\right).$$

Soit maintenant en premier lieu s_1 constant. Alors l'équation

$$s_1 = \frac{4b}{e}x + \frac{4ab}{e} + 1$$

donne

$$b = 0,$$

par conséquent,

$$r = x^2 + ax,$$

$$\int\frac{2}{\sqrt{R}}(dr - \tfrac{1}{2}\mu ds) = \log\frac{r+\sqrt{R}}{r-\sqrt{R}},$$

ou, puisque $\mu = \frac{x+a}{e}$, $s = ex$,

$$\int\frac{(3x+a)\,dx}{\sqrt{(x^2+ax)^2+ex}} = \log\frac{x^2+ax+\sqrt{R}}{x^2+ax-\sqrt{R}}.$$

Cette intégrale se trouve aussi facilement en divisant le numérateur et le dénominateur de la différentielle par $\sqrt{x}$.

Soit en deuxième lieu s_2 constant. Dans ce cas la formule (43) donne, k étant égal à l'unité,

$$\int\frac{2}{\sqrt{R}}(dr + \tfrac{1}{2}dr_1 - \mu ds) = \log\frac{r+\sqrt{R}}{r-\sqrt{R}} + \tfrac{1}{2}\log\frac{r_1+\sqrt{R}}{r_1-\sqrt{R}}.$$

Or l'équation $s_2 = \text{const.}$ donne $s_1 = cs$, donc

$$\frac{4b}{e}x + \frac{4ab}{e} + 1 = cex.$$

L'équation de condition sera donc $\frac{4ab}{e}+1=0$, c'est-à-dire

$$e=-4ab,$$

donc

$$R=(x^2+ax+b)^2-4abx.$$

De plus, ayant $\mu=\frac{x+a}{e}$, $r=x^2+ax+b$, $r_1=x^2+ax-b$, on aura la formule,

$$\int\frac{(4x+a)\,dx}{\sqrt{(x^2+ax+b)^2-4abx}}=\log\frac{x^2+ax+b+\sqrt{R}}{x^2+ax+b-\sqrt{R}}+\tfrac{1}{2}\log\frac{x^2+ax-b+\sqrt{R}}{x^2+ax-b-\sqrt{R}}.$$

Soit en troisième lieu s_3 constant. Cette équation donne $s=s_2$, c'est-à-dire

$$\frac{ae}{4b}+\frac{e^2}{16b^2}-b=0.$$

On en tire

$$e=-2b(a\pm\sqrt{a^2+4b}).$$

La formule (44) donne par conséquent, puisque $k=2$,

$$\int\frac{(5x+\frac{3}{2}a\mp\frac{1}{2}\sqrt{a^2+4b})\,dx}{\sqrt{(x^2+ax+b)^2-2bx(a\pm\sqrt{a^2+4b})}}$$
$$=\log\frac{x^2+ax+b+\sqrt{R}}{x^2+ax+b-\sqrt{R}}+\log\frac{x^2+ax-b+\sqrt{R}}{x^2+ax-b-\sqrt{R}}.$$

Si par exemple $a=0$, $b=1$, on aura cette intégrale:

$$\int\frac{(5x-1)\,dx}{\sqrt{(x^2+1)^2-4x}}=\log\frac{x^2+1+\sqrt{(x^2+1)^2-4x}}{x^2+1-\sqrt{(x^2+1)^2-4x}}+\log\frac{x^2-1+\sqrt{(x^2+1)^2-4x}}{x^2-1-\sqrt{(x^2+1)^2-4x}}.$$

Soit en quatrième lieu s_4 constant. Cela donne $s_2=cs_1$, c'est-à-dire

$$\left(\frac{ae^2}{4b^2}+\frac{e^3}{16b^3}\right)x-\frac{e^2}{4b^2}\left(\frac{ae}{4b}+\frac{e^2}{16b^2}-b\right)=\frac{4cb}{e}x+\left(\frac{4ab}{e}+1\right)c.$$

On en tire, en comparant les coefficiens et éliminant ensuite c,

$$\frac{e}{16b^3}(e+4ab)^2=-\frac{e}{b}\left(\frac{ae}{4b}+\frac{e^2}{16b^2}-b\right),$$

$$(e+4ab)^2 = 16b^3 - e(e+4ab),$$
$$e^2 + 6abe = 8b^3 - 8a^2b^2,$$
$$e = -3ab \mp \sqrt{8b^3 + a^2b^2} = -b(3a \pm \sqrt{a^2+8b}).$$

En vertu de cette expression la formule (43) donne,

$$\int \frac{(6x + \frac{3}{2}a - \frac{1}{2}\sqrt{a^2+8b})\,dx}{\sqrt{(x^2+ax+b)^2 - b(3a+\sqrt{a^2+8b})\,x}} = \log \frac{x^2+ax+b+\sqrt{R}}{x^2+ax+b-\sqrt{R}}$$
$$+ \log \frac{x^2+ax-b+\sqrt{R}}{x^2+ax-b-\sqrt{R}} + \frac{1}{2}\log \frac{x^2+ax+\frac{1}{4}a(a-\sqrt{a^2+8b})+\sqrt{R}}{x^2+ax+\frac{1}{4}a(a-\sqrt{a^2+8b})-\sqrt{R}}.$$

Si l'on fait par exemple $a=0$, $b=\frac{1}{2}$, on obtiendra

$$\int \frac{(x+\frac{1}{6})\,dx}{\sqrt{x^4+x^2+x+\frac{1}{4}}} = \frac{1}{6}\log \frac{x^2+\frac{1}{2}+\sqrt{x^4+x^2+x+\frac{1}{4}}}{x^2+\frac{1}{2}-\sqrt{x^4+x^2+x+\frac{1}{4}}}$$
$$+ \frac{1}{6}\log \frac{x^2-\frac{1}{2}+\sqrt{x^4+x^2+x+\frac{1}{4}}}{x^2-\frac{1}{2}-\sqrt{x^4+x^2+x+\frac{1}{4}}} + \frac{1}{12}\log \frac{x^2+\sqrt{x^4+x^2+x+\frac{1}{4}}}{x^2-\sqrt{x^4+x^2+x+\frac{1}{4}}}.$$

On peut continuer de cette manière et trouver un plus grand nombre d'intégrales. Ainsi par exemple l'intégrale

$$\int \frac{\left(x+\frac{\sqrt{5}+1}{14}\right)dx}{\sqrt{\left(x^2+\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2+(\sqrt{5}-1)^2 x}}$$

peut s'exprimer par des logarithmes.

Nous avons ici cherché les intégrales de la forme $\int \frac{\varrho\, dx}{\sqrt{R}}$ qui peuvent s'exprimer par une fonction logarithmique de la forme $\log \frac{p+q\sqrt{R}}{p-q\sqrt{R}}$. On pourrait rendre le problème encore plus général, et chercher en général toutes les intégrales de la forme ci-dessus qui pourraient s'exprimer d'une ma-

nière quelconque par des logarithmes; mais on ne trouverait pas d'intégrales nouvelles. On a en effet ce théorème remarquable:

„Lorsqu'une intégrale de la forme $\int \frac{\varrho dx}{\sqrt{R}}$, où ϱ et R sont des „fonctions entières de x, est exprimable par des logarithmes, on peut „toujours l'exprimer de la manière suivante:

$$\int \frac{\varrho dx}{\sqrt{R}} = A \log \frac{p + q\sqrt{R}}{p - q\sqrt{R}},$$

„où A est constant, et p et q des fonctions entières de x."

Je démontrerai ce théorème dans une autre occasion.

XII.

MÉMOIRE SUR UNE PROPRIÉTÉ GÉNÉRALE D'UNE CLASSE TRÈS-ÉTENDUE DE FONCTIONS TRANSCENDANTES.

Présenté à l'Académie des sciences à Paris le 30 Octobre 1826. Mémoires présentés par divers savants t. VII, Paris 1841.

Les fonctions transcendantes considérées jusqu'à présent par les géomètres sont en très-petit nombre. Presque toute la théorie des fonctions transcendantes se réduit à celle des fonctions logarithmiques, exponentielles et circulaires, fonctions qui, dans le fond, ne forment qu'une seule espèce. Ce n'est que dans les derniers temps qu'on a aussi commencé à considérer quelques autres fonctions. Parmi celles-ci, les transcendantes elliptiques, dont M. Legendre a developpé tant de propriétés remarquables et élégantes, tiennent le premier rang. L'auteur a considéré, dans le mémoire qu'il a l'honneur de présenter à l'Académie, une classe très-étendue de fonctions, savoir: toutes celles dont les dérivées peuvent être exprimées au moyen d'équations algébriques, dont tous les coefficients sont des fonctions rationnelles d'une même variable, et il a trouvé pour ces fonctions des propriétés analogues à celles des fonctions logarithmiques et elliptiques.

Une fonction dont la dérivée est rationnelle a, comme on le sait, la propriété qu'on peut exprimer la somme d'un nombre quelconque de semblables fonctions par une fonction algébrique et logarithmique, quelles que soient d'ailleurs les variables de ces fonctions. De même une fonction elliptique quelconque, c'est-à-dire une fonction dont la dérivée ne contient d'autres irrationnalités qu'un radical du second degré, sous lequel la variable ne passe pas le quatrième degré, aura encore la propriété qu'on peut exprimer une

somme quelconque de semblables fonctions par une fonction algébrique et logarithmique, pourvu qu'on établisse entre les variables de ces fonctions une certaine relation algébrique. Cette analogie entre les propriétés de ces fonctions a conduit l'auteur à chercher s'il ne serait pas possible de trouver des propriétés analogues de fonctions plus générales, et il est parvenu au théorème suivant:

„Si l'on a plusieurs fonctions dont les dérivées peuvent être racines „d'une *même équation algébrique*, dont tous les coefficients sont des fonctions „*rationnelles* d'une même variable, on peut toujours exprimer la somme d'un „nombre quelconque de semblables fonctions par une fonction *algébrique* et „*logarithmique*, pourvu qu'on établisse entre les variables des fonctions en „question un certain nombre de relations *algébriques*."

Le nombre de ces relations ne dépend nullement du nombre des fonctions, mais seulement de la nature des fonctions particulières qu'on considère. Ainsi, par exemple, pour une fonction elliptique ce nombre est 1; pour une fonction dont la dérivée ne contient d'autres irrationnalités qu'un radical du second degré, sous lequel la variable ne passe pas le cinquième ou sixième degré, le nombre des relations nécessaires est 2, et ainsi de suite.

Le même théorème subsiste encore lorsqu'on suppose les fonctions multipliées par des nombres rationnels quelconques positifs ou négatifs.

On en déduit encore le théorème suivant:

„On peut toujours exprimer la somme d'un nombre *donné* de fonctions, „qui sont multipliées chacune par un nombre rationnel, et dont les variables „sont arbitraires, par une somme semblable en nombre *déterminé* de fonctions, „dont les variables sont des fonctions *algébriques* des variables des fonctions „données."

A la fin du mémoire on donne l'application de la théorie à une classe particulière de fonctions, savoir, à celles qui sont exprimées comme intégrales de formules différentielles, qui ne contiennent d'autres irrationnalités qu'un radical quelconque.

1.

Soit

$$0 = p_0 + p_1 y + p_2 y^2 + \cdots + p_{n-1} y^{n-1} + y^n = \chi y \tag{1}$$

une équation algébrique quelconque, dont tous les coefficients sont des fonc-

tions rationnelles et entières d'une même quantité variable x. Cette équation, supposée irréductible, donne pour la fonction y un nombre n de formes différentes; nous les désignerons par $y', y'' \ldots y^{(n)}$, en conservant la lettre y pour indiquer l'une quelconque d'entre elles.

Soit de même

(2) $$\theta y = q_0 + q_1 y + q_2 y^2 + \cdots + q_{n-1} y^{n-1}$$

une fonction rationnelle entière de y et x, en sorte que les coefficients q_0, $q_1, q_2 \ldots q_{n-1}$, soient des fonctions entières de x. Un certain nombre des coefficients des diverses puissances de x dans ces fonctions seront supposés indéterminés; nous les désignerons par a, a', a'', etc.

Cela posé, si l'on met dans la fonction θy, au lieu de y, successivement $y', y'' \ldots y^{(n)}$, et si l'on désigne par r le produit de toutes les fonctions ainsi formées, c'est-à-dire si l'on fait

(3) $$r = \theta y' . \theta y'' \ldots . \theta y^{(n)},$$

la quantité r sera, comme on sait par la théorie des équations algébriques, une fonction rationnelle et entière de x et des quantités a, a', a'', etc.

Supposons que l'on ait

(4) $$r = F_0 x . F x,$$

$F_0 x$ et Fx étant deux fonctions entières de x, dont la première, $F_0 x$, est indépendante des quantités a, a', a'', etc.; et soit

(5) $$Fx = 0.$$

Cette équation, dont les coefficients sont des fonctions rationnelles des quantités a, a', a'', etc., donnera x en fonction de ces quantités, et on aura, pour cette fonction, autant de formes que l'équation $Fx = 0$ a de racines. Désignons ces racines par $x_1, x_2 \ldots x_\mu$, et par x, l'une quelconque d'entre elles.

L'équation $Fx = 0$, que nous venons de former, entraîne nécessairement la suivante $r = 0$, et celle-ci en amène une autre de la forme

(6) $$\theta y = 0.$$

En mettant dans cette dernière, au lieu de x, successivement $x_1, x_2 \ldots x_\mu$,



et désignant les valeurs correspondantes de y par $y_1, y_2 \ldots y_\mu$, on aura les μ équations suivantes:

(7) $$\theta y_1 = 0,\quad \theta y_2 = 0 \;\ldots\ldots\; \theta y_\mu = 0.$$

2.

Cela posé, je dis que si l'on désigne par $f(x, y)$ une fonction quelconque rationnelle de x et y, et si l'on fait

(8) $$dv = f(x_1, y_1)dx_1 + f(x_2, y_2)dx_2 + \cdots + f(x_\mu, y_\mu)dx_\mu,$$

la différentielle dv sera une fonction *rationnelle* des quantités a, a', a'', etc.

En effet, en combinant les équations $\theta y = 0$ et $\chi y = 0$, on en peut tirer la valeur de y, exprimée en fonction rationnelle de x et des quantités a, etc.; en désignant cette fonction par ϱ, on aura donc

(9) $$y = \varrho \quad \text{et} \quad f(x, y) = f(x, \varrho).$$

Mais en différentiant l'équation $Fx = 0$, on aura

$$F'x \,.\, dx + \delta Fx = 0,$$

en désignant, pour abréger, par $F'x$ la dérivée de Fx par rapport à x seul, et par δFx la différentielle de la même fonction par rapport aux quantités a, a', a'', etc. De là on tire

(10) $$dx = -\frac{\delta Fx}{F'x};$$

et par conséquent

(11) $$f(x, y)dx = -\frac{f(x, \varrho)}{F'x}\,\delta Fx = \varphi_2 x,$$

où il est clair que $\varphi_2 x$ est une fonction rationnelle de x, a, a', a'', etc. Au moyen de cette expression de la différentielle $f(x, y)dx$, la valeur de dv deviendra

$$dv = \varphi_2 x_1 + \varphi_2 x_2 + \cdots + \varphi_2 x_\mu.$$

Or, le second membre de cette équation est une fonction rationnelle des



quantités a, a', a'' ... x_1, x_2 ... x_μ, et en outre symétrique par rapport à x_1, x_2 ... x_μ; donc dv peut s'exprimer par une fonction *rationnelle* de a, a', a'' ... et des coefficients de l'équation $Fx=0$; mais ces coefficients sont eux-mêmes des fonctions *rationnelles* de a, a', etc.; donc dv le sera de même, comme on vient de le dire.

Si maintenant dv est une fonction différentielle rationnelle des quantités a, a' a'' ... son intégrale ou la quantité v sera une fonction algébrique et logarithmique de a, a', a'' .... L'équation (8) donnera donc, en intégrant entre certaines limites des quantités a, a', a'' ...

(12) $$\int f(x_1, y_1)dx_1 + \int f(x_2, y_2)dx_2 + \cdots + \int f(x_\mu, y_\mu)dx_\mu = v,$$

ou bien, en faisant

(13) $$\int f(x_1, y_1)dx_1 = \psi_1 x_1; \int f(x_2, y_2)dx_2 = \psi_2 x_2 \ldots \int f(x_\mu, y_\mu)dx_\mu = \psi_\mu x_\mu,$$

(14) $$\psi_1 x_1 + \psi_2 x_2 + \psi_3 x_3 + \cdots + \psi_\mu x_\mu = v.$$

Voilà la propriété générale des fonctions $\psi_1 x_1$, $\psi_2 x_2$, etc., que nous avons énoncée au commencement de ce mémoire.

3.

Les formes des fonctions $\psi_1 x_1$, $\psi_2 x_2$, etc., dépendent, en vertu des équations (13), de celles des fonctions y_1, y_2 ... y_μ. Ces dernières ne peuvent être choisies arbitrairement parmi celles qui satisfont à l'équation $\chi y = 0$; elles doivent en outre satisfaire aux équations (7); mais comme on a plusieurs variables indépendantes, a, a', a'' ... il est clair qu'on peut établir entre les formes des fonctions y_1, y_2 ... y_μ, un nombre de relations égal à celui de ces variables. On peut donc choisir arbitrairement les formes d'un certain nombre de fonctions y_1, y_2 ... y_μ; mais alors celles des autres fonctions dépendront, en vertu des équations (7), de celles-ci et de la grandeur des quantités a, a', ... Il se peut donc que la quantité constante d'intégration contenue dans la fonction v change de valeur pour des valeurs différentes des quantités a, a', a'' ...; mais par la nature de cette quantité, elle doit rester la même pour des valeurs de a, a', a'' ... contenues entre certaines limites.

Les fonctions x_1, x_2 ... x_μ, sont déterminées par l'équation $Fx=0$;

cette équation dépend de la forme de la fonction θy; mais comme on peut varier celle-ci d'une infinité de manières, il s'ensuit que l'équation (14) est susceptible d'une infinité de formes différentes pour la même espèce de fonctions. Les fonctions $x_1, x_2 \ldots x_\mu$, ont encore cela de très-remarquable que les mêmes valeurs répondent à une infinité de fonctions différentes. En effet la forme de la fonction $f(x, y)$, de laquelle ces quantités sont entièrement indépendantes, est assujettie à la seule condition d'être une fonction rationnelle de x et y.

4.

Nous avons montré dans ce qui précède comment on peut toujours former la différentielle rationnelle dv; mais comme la méthode indiquée sera en général très-longue, et pour des fonctions un peu composées, presque impraticable, je vais en donner une autre, par laquelle on obtiendra immédiatement l'expression de la fonction v dans tous les cas possibles.

On a par l'équation (3)

$$r = \theta y' . \theta y'' \ldots \theta y^{(n)},$$

donc, en différentiant par rapport aux quantités a, a', a'', etc., on obtiendra

$$\delta r = \frac{r}{\theta y'} \delta \theta y' + \frac{r}{\theta y''} \delta \theta y'' + \cdots + \frac{r}{\theta y^{(n)}} \delta \theta y^{(n)};$$

or, on a $\theta y = 0$, donc le second membre de l'équation précédente se réduira à $\frac{r}{\theta y} \delta \theta y$, et l'on aura par conséquent

$$\delta r = \frac{r}{\theta y} \delta \theta y.$$

Maintenant on a

$$r = F_0 x . F x,$$

où $F_0 x$ est indépendante de a, a', a'', etc.; donc, en différentiant, on obtiendra

$$\delta r = F_0 x . \delta F x$$

et, par conséquent, en substituant et divisant par $F_0 x$, on trouvera

$$\delta F x = \frac{r . \delta \theta y}{F_0 x . \theta y}.$$

Par là, la valeur de

$$dx = -\frac{\delta F x}{F' x}$$

deviendra

$$dx = -\frac{1}{F_0 x . F' x} \frac{r}{\theta y} \delta \theta y,$$

et en multipliant par $f(x, y)$

$$f(x, y)\, dx = -\frac{1}{F_0 x . F' x} f(x, y) \frac{r}{\theta y} \delta \theta y.$$

En remarquant maintenant que $\frac{r}{\theta y^{(k)}}$ s'évanouit, car autrement on aurait $y^{(k)} = y$, il est clair que l'expression de $f(x, y)\, dx$ peut s'écrire comme il suit:

$$f(x, y)\, dx =$$
$$-\frac{1}{F_0 x . F' x} \left\{ f(x, y') \frac{r}{\theta y'} \delta \theta y' + f(x, y'') \frac{r}{\theta y''} \delta \theta y'' + \cdots + f(x, y^{(n)}) \frac{r}{\theta y^{(n)}} \delta \theta y^{(n)} \right\}.$$

Pour abréger, nous désignerons dans la suite par $\Sigma F_1 y$ toute fonction de la forme

$$F_1 y' + F_1 y'' + F_1 y''' + \cdots + F_1 y^{(n)};$$

et par là la valeur précédente de $f(x, y)\, dx$ deviendra

$$(15) \qquad f(x, y)\, dx = -\frac{1}{F_0 x . F' x} \Sigma f(x, y) \frac{r}{\theta y} \delta \theta y.$$

Cela posé, soit $\chi' y$ la dérivée de χy prise par rapport à y seul, le produit $f(x, y) \chi' y$ sera une fonction rationnelle de x et y. On peut donc faire

$$f(x, y)\, \chi' y = \frac{P_1 y}{P y},$$

où P et P_1 sont deux fonctions entières de x et y. Mais si l'on désigne par T le produit $P y' . P y'' \ldots P y^{(n)}$, on aura

$$\frac{P_1 y}{P y} = \frac{1}{T} P_1 y \frac{T}{P y},$$

or $\frac{T}{Py}$ peut toujours s'exprimer par une fonction entière de x et y, et T par une fonction entière de x, donc on aura

$$\frac{P_1 y}{P y} = \frac{T_1}{T},$$

où T_1 est une fonction entière de x et y; mais toute fonction entière de x et y peut se mettre sous la forme

(16) $$t_0 + t_1 y + t_2 y^2 + \cdots + t_{n-1} y^{n-1} = f_1(x, y),$$

où $t_0, t_1 \ldots t_{n-1}$, sont des fonctions entières de x seul. On peut donc supposer

$$f(x, y)\,\chi' y = \frac{f_1(x, y)}{f_2 x},$$

$f_2 x$ étant une fonction entière de x sans y.

De là on tire

(17) $$f(x, y) = \frac{f_1(x, y)}{f_2 x \cdot \chi' y}.$$

En substituant maintenant cette valeur de $f(x, y)$ dans l'expression de $f(x, y)\,dx$ trouvée plus haut, il viendra

(18) $$\frac{f_1(x, y)}{f_2 x \cdot \chi' y} dx = -\frac{1}{F_0 x \cdot F' x \cdot f_2 x} \Sigma \frac{f_1(x, y)}{\chi' y} \frac{r}{\theta y} \delta \theta y.$$

Dans le second membre de cette équation la quantité $f_1(x, y)\frac{r}{\theta y}$ est une fonction entière par rapport à x et y; on peut donc supposer

$$f_1(x, y) \frac{r}{\theta y} \delta \theta y = R^{(1)} y + R x \cdot y^{n-1},$$

où $R^{(1)} y$ est une fonction entière de x et y, dans laquelle les puissances de y ne montent qu'au $(n-2)^e$ degré; Rx étant une fonction entière de x sans y. On aura donc

$$\Sigma \frac{f_1(x, y)}{\chi' y} \frac{r}{\theta y} \delta \theta y = \Sigma \frac{R^{(1)} y}{\chi' y} + R x . \Sigma \frac{y^{n-1}}{\chi' y}.$$

Or, on a

$$\chi' y' = (y' - y'')(y' - y''') \cdots (y' - y^{(n)}),$$
$$\chi' y'' = (y'' - y')(y'' - y''') \cdots (y'' - y^{(n)}), \quad \text{etc.};$$

donc, d'après des formules connues,

$$\Sigma \frac{R^{(1)} y}{\chi' y} = 0; \quad \Sigma \frac{y^{n-1}}{\chi' y} = 1.$$

Par conséquent

(19) $$\Sigma \frac{f_1(x, y)}{\chi' y} \frac{r}{\theta y} \delta \theta y = Rx.$$

La fonction $\Sigma \frac{f_1(x, y)}{\chi' y} \frac{r}{\theta y} \delta \theta y$ peut donc s'exprimer par une fonction *entière* de x seul sans y. Les quantités a, a', a'' etc. d'ailleurs y entrent rationnellement.

Par là l'équation (18) donnera

(20) $$\frac{f_1(x, y)}{f_2 x \cdot \chi' y} dx = -\frac{Rx}{f_2 x \cdot F_0 x \cdot F' x}.$$

En mettant dans cette équation au lieu de x successivement $x_1, x_2 \ldots x_\mu$, on obtiendra μ équations qui, ajoutées ensemble, donneront la suivante:

(21) $$dv = \frac{f_1(x_1, y_1) dx_1}{f_2 x_1 \cdot \chi' y_1} + \frac{f_1(x_2, y_2) dx_2}{f_2 x_2 \cdot \chi' y_2} + \cdots + \frac{f_1(x_\mu, y_\mu) dx_\mu}{f_2 x_\mu \cdot \chi' y_\mu} =$$
$$-\frac{Rx_1}{f_2 x_1 \cdot F_0 x_1 \cdot F' x_1} - \frac{Rx_2}{f_2 x_2 \cdot F_0 x_2 \cdot F' x_2} - \cdots - \frac{Rx_\mu}{f_2 x_\mu \cdot F_0 x_\mu \cdot F' x_\mu}.$$

Si donc on désigne par $\Sigma F_1 x$ une somme de la forme

$$F_1 x_1 + F_1 x_2 + F_1 x_3 + \cdots + F_1 x_\mu,$$

l'expression de dv pourra s'écrire comme il suit:

(22) $$dv = -\Sigma \frac{Rx}{f_2 x \cdot F_0 x \cdot F' x}.$$

Cela posé, soient

(23) $$\begin{cases} F_0 x = (x - \beta_1)^{\mu_1} (x - \beta_2)^{\mu_2} \ldots (x - \beta_\alpha)^{\mu_\alpha}, \\ f_2 x = (x - \beta_1)^{m_1} (x - \beta_2)^{m_2} \ldots (x - \beta_\alpha)^{m_\alpha} A, \\ Rx = (x - \beta_1)^{k_1} (x - \beta_2)^{k_2} \ldots (x - \beta_\alpha)^{k_\alpha} R_1 x, \end{cases}$$

$\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_\alpha$, étant des quantités indépendantes de a, a', a'' etc.; $\mu_1, \mu_2 \ldots m_1, m_2 \ldots k_1, k_2$, etc., étant des nombres entiers, zéro y compris; et $R_1 x$ étant une fonction entière de x.

En substituant ces valeurs de $F_0 x, f_2 x, Rx$ dans l'expression de dv, elle deviendra

$$dv = -\Sigma \frac{R_1 x}{A F'x.(x-\beta_1)^{\mu_1+m_1-k_1}(x-\beta_2)^{\mu_2+m_2-k_2}\ldots(x-\beta_\alpha)^{\mu_\alpha+m_\alpha-k_\alpha}},$$

ou bien en faisant, pour abréger,

(24) $$\mu_1 + m_1 - k_1 = \nu_1, \quad \mu_2 + m_2 - k_2 = \nu_2, \ldots \mu_\alpha + m_\alpha - k_\alpha = \nu_\alpha,$$

(25) $$A(x-\beta_1)^{\nu_1}(x-\beta_2)^{\nu_2}\cdots(x-\beta_\alpha)^{\nu_\alpha} = \theta_1 x:$$

(26) $$dv = -\Sigma \frac{R_1 x}{\theta_1 x . F'x}.$$

Maintenant on peut toujours supposer

$$\frac{R_1 x}{\theta_1 x} = R_2 x + \frac{R_3 x}{\theta_1 x},$$

où $R_2 x$ et $R_3 x$ sont deux fonctions entières de x, le degré de la dernière étant plus petit que celui de la fonction $\theta_1 x$; en substituant, il viendra donc

(27) $$dv = -\Sigma \frac{R_2 x}{F'x} - \Sigma \frac{R_3 x}{\theta_1 x . F'x}.$$

La fonction $-\Sigma \frac{R_2 x}{F'x}$ peut se trouver de la manière suivante.

Puisque $x_1, x_2 \ldots x_\mu$ sont les racines de l'équation $Fx = 0$, on aura, en désignant par α une quantité indéterminée quelconque,

$$\frac{1}{F\alpha} = \frac{1}{\alpha - x_1}\frac{1}{F'x_1} + \frac{1}{\alpha - x_2}\frac{1}{F'x_2} + \cdots + \frac{1}{\alpha - x_\mu}\frac{1}{F'x_\mu},$$

c'est-à-dire

(28) $$\frac{1}{F\alpha} = \Sigma \frac{1}{\alpha - x}\frac{1}{F'x},$$

d'où l'on tire, en développant $\frac{1}{\alpha - x}$ suivant les puissances descendantes de α,

$$\frac{1}{F\alpha} = \frac{1}{\alpha}\Sigma\frac{1}{F'x} + \frac{1}{\alpha^2}\Sigma\frac{x}{F'x} + \cdots + \frac{1}{\alpha^{m+1}}\Sigma\frac{x^m}{F'x} + \cdots,$$

d'où il suit que $\Sigma\frac{x^m}{F'x}$ est égal au coefficient de $\frac{1}{\alpha^{m+1}}$ dans le développement de la fonction $\frac{1}{F\alpha}$, ou, ce qui revient au même, à celui de $\frac{1}{\alpha}$ dans le développement de $\frac{\alpha^m}{F\alpha}$. En désignant donc par $\Pi F_1 x$ le coefficient de $\frac{1}{x}$ dans le développement d'une fonction quelconque $F_1 x$, suivant les puissances descendantes de x, on aura

$$\Sigma\frac{x^m}{F'x} = \Pi\frac{x^m}{Fx}.$$

De là il suit que

$$\Sigma\frac{F_1 x}{F'x} = \Pi\frac{F_1 x}{Fx},$$

en désignant par $F_1 x$ une fonction quelconque entière de x. On aura donc, en mettant $R_2 x$,

(29) $$\Sigma\frac{R_2 x}{F'x} = \Pi\frac{R_2 x}{Fx};$$

mais ayant

$$\frac{R_1 x}{\theta_1 x \,.\, Fx} = \frac{R_3 x}{\theta_1 x \,.\, Fx} + \frac{R_2 x}{Fx},$$

on aura aussi

$$\Pi\frac{R_1 x}{\theta_1 x \,.\, Fx} = \Pi\frac{R_3 x}{\theta_1 x \,.\, Fx} + \Pi\frac{R_2 x}{Fx}.$$

Or, le degré de $R_3 x$ étant moindre que celui de $\theta_1 x$, il est clair qu'on aura

$$\Pi\frac{R_3 x}{\theta_1 x \,.\, Fx} = 0,$$

donc

$$\Sigma\frac{R_2 x}{F'x} = \Pi\frac{R_1 x}{\theta_1 x \,.\, Fx}.$$

Le second terme du second membre de l'équation (27), savoir la quantité $\Sigma \frac{R_3 x}{\theta_1 x . F' x}$, se trouve comme il suit:

Soit

$$\frac{R_3 x}{\theta_1 x} = \frac{A_1^{(1)}}{x-\beta_1} + \frac{A_1^{(2)}}{(x-\beta_1)^2} + \cdots + \frac{A_1^{(\nu_1)}}{(x-\beta_1)^{\nu_1}}$$
$$+ \frac{A_2^{(1)}}{x-\beta_2} + \frac{A_2^{(2)}}{(x-\beta_2)^2} + \cdots + \frac{A_2^{(\nu_2)}}{(x-\beta_2)^{\nu_2}} + \text{etc.};$$

ou bien, pour abréger,

$$\frac{R_3 x}{\theta_1 x} = \Sigma' \left\{ \frac{A_1}{x-\beta} + \frac{A_2}{(x-\beta)^2} + \cdots + \frac{A_\nu}{(x-\beta)^\nu} \right\},$$

on aura

$$A_1 = \frac{d^{\nu-1} p}{\Gamma \nu . d\beta^{\nu-1}}, \quad A_2 = \frac{d^{\nu-2} p}{\Gamma(\nu-1) d\beta^{\nu-2}}, \ \ldots \ A_\nu = p,$$

où

$$p = \frac{(x-\beta)^\nu R_3 x}{\theta_1 x}$$

pour $x = \beta$; c'est-à-dire

$$p = \frac{\Gamma(\nu+1) R_3 \beta}{\theta_1^{(\nu)} \beta},$$

en désignant par $\theta_1^{(\nu)} x$ la ν^e dérivée de la fonction $\theta_1 x$ par rapport à x, et par $\Gamma(\nu+1)$ le produit $1 . 2 . 3 \ldots (\nu-1) . \nu$.

En substituant ces valeurs des quantités $A_1, A_2 \ldots A_\nu$, il viendra

$$\frac{R_3 x}{\theta_1 x} = \Sigma' \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^{\nu-1} p}{(x-\beta) d\beta^{\nu-1}} + (\nu-1) \frac{d^{\nu-2} p}{(x-\beta)^2 d\beta^{\nu-2}} \\ + (\nu-1)(\nu-2) \frac{d^{\nu-3} p}{(x-\beta)^3 d\beta^{\nu-3}} + \text{etc.} \end{array} \right\} \frac{1}{\Gamma \nu}.$$

Maintenant on a, en désignant $\frac{1}{x-\beta}$ par q,

$$\frac{1}{(x-\beta)^2} = \frac{dq}{d\beta}, \quad \frac{1}{(x-\beta)^3} = \frac{1}{2} \frac{d^2 q}{d\beta^2}, \ \ldots \ \frac{1}{(x-\beta)^\nu} = \frac{1}{\Gamma \nu} \frac{d^{\nu-1} q}{d\beta^{\nu-1}};$$

donc l'expression de $\frac{R_3 x}{\theta_1 x}$ peut s'écrire comme il suit:

$$\frac{R_3x}{\theta_1x}=\Sigma'\frac{1}{\Gamma\nu}\left\{\begin{aligned}&\frac{d^{\nu-1}p}{d\beta^{\nu-1}}q+\frac{\nu-1}{1}\frac{d^{\nu-2}p}{d\beta^{\nu-2}}\frac{dq}{d\beta}\\&+\frac{(\nu-1)(\nu-2)}{1.2}\frac{d^{\nu-3}p}{d\beta^{\nu-3}}\frac{d^2q}{d\beta^2}+\cdots+p\frac{d^{\nu-1}q}{d\beta^{\nu-1}}\end{aligned}\right\}.$$

Or la quantité entre les accolades est égale à $\frac{d^{\nu-1}(pq)}{d\beta^{\nu-1}}$, donc

$$\frac{R_3x}{\theta_1x}=\Sigma'\frac{1}{\Gamma\nu}\frac{d^{\nu-1}(pq)}{d\beta^{\nu-1}},$$

d'où l'on tirera, en substituant les valeurs de p et q, et remarquant que $\Gamma(\nu+1)=\nu\Gamma\nu$,

$$\frac{R_3x}{\theta_1x}=\Sigma'\nu\frac{d^{\nu-1}}{d\beta^{\nu-1}}\left\{\frac{R_3\beta}{\theta_1^{(\nu)}\beta.(x-\beta)}\right\}.$$

En substituant cette expression au lieu de $\frac{R_3x}{\theta_1x}$ dans la fonction $\Sigma\frac{R_3x}{\theta_1x.F'x}$, il viendra

(30) $$\Sigma\frac{R_3x}{\theta_1x.F'x}=\Sigma\frac{1}{F'x}\Sigma'\nu\frac{d^{\nu-1}}{d\beta^{\nu-1}}\left\{\frac{R_3\beta}{\theta_1^{(\nu)}\beta.(x-\beta)}\right\};$$

ou bien

(31) $$\Sigma\frac{R_3x}{\theta_1x.F'x}=\Sigma'\nu\frac{d^{\nu-1}}{d\beta^{\nu-1}}\left\{\frac{R_3\beta}{\theta_1^{(\nu)}\beta}\Sigma\frac{1}{(x-\beta)F'x}\right\}.$$

Or, comme nous avons vu plus haut (28),

$$\Sigma\frac{1}{(x-\beta)F'x}=-\frac{1}{F\beta},$$

donc

$$\Sigma\frac{R_3x}{\theta_1x.F'x}=-\Sigma'\nu\frac{d^{\nu-1}}{d\beta^{\nu-1}}\left\{\frac{R_3\beta}{\theta_1^{(\nu)}\beta.F\beta}\right\};$$

mais l'équation

$$\frac{R_1x}{\theta_1x}=R_2x+\frac{R_3x}{\theta_1x}$$

donne, si l'on multiplie les deux membres par $(x-\beta)^\nu$, et qu'on fasse ensuite $x=\beta$,

$$\frac{R_1\beta}{\theta_1^{(\nu)}\beta} = \frac{R_3\beta}{\theta_1^{(\nu)}\beta},$$

donc, en substituant,

(32) $$\Sigma \frac{R_3 x}{\theta_1 x \,.\, F'x} = -\Sigma'\nu \frac{d^{\nu-1}}{d\beta^{\nu-1}} \left\{ \frac{R_1\beta}{\theta_1^{(\nu)}\beta \,.\, F\beta} \right\}.$$

Ayant ainsi trouvé les valeurs de $\Sigma \frac{R_2 x}{F'x}$ et $\Sigma \frac{R_3 x}{\theta_1 x \,.\, F'x}$, l'équation (27) donnera, pour la différentielle dv, l'expression suivante,

(33) $$dv = -\Pi \frac{R_1 x}{\theta_1 x \,.\, Fx} + \Sigma'\nu \frac{d^{\nu-1}}{d\beta^{\nu-1}} \left\{ \frac{R_1\beta}{\theta_1^{(\nu)}\beta \,.\, F\beta} \right\},$$

ou bien

(34) $$dv = -\Pi \frac{R_1 x}{\theta_1 x \,.\, Fx} + \Sigma'\nu \frac{d^{\nu-1}}{dx^{\nu-1}} \left\{ \frac{R_1 x}{\theta_1^{(\nu)}x \,.\, Fx} \right\}$$
$$(x = \beta_1,\ \beta_2 \ldots \beta_\alpha).$$

Maintenant on a (19)

$$Rx = \Sigma \frac{f_1(x, y)}{\chi' y} \frac{r}{\theta y} \delta\theta y = F_0 x \,.\, Fx \,.\, \Sigma \frac{f_1(x, y)}{\chi' y} \frac{\delta\theta y}{\theta y}$$

et (23)

$$R_1 x = Rx \,.\, (x-\beta_1)^{-k_1}(x-\beta_2)^{-k_2} \ldots (x-\beta_\alpha)^{-k_\alpha};$$

donc en faisant, pour abréger,

(35) $$F_0 x \,.\, (x-\beta_1)^{-k_1}(x-\beta_2)^{-k_2} \ldots (x-\beta_\alpha)^{-k_\alpha}$$
$$= (x-\beta_1)^{\mu_1-k_1}(x-\beta_2)^{\mu_2-k_2} \ldots (x-\beta_\alpha)^{\mu_\alpha-k_\alpha} = F_2 x:$$

$$R_1 x = F_2 x \,.\, Fx \,.\, \Sigma \frac{f_1(x, y)}{\chi' y} \frac{\delta\theta y}{\theta y},$$

et en substituant cette valeur de $R_1 x$ dans l'expression précédente de dv, on obtiendra

(36) $$dv = -\Pi \frac{F_2 x}{\theta_1 x} \Sigma \frac{f_1(x, y)}{\chi' y} \frac{\delta\theta y}{\theta y} + \Sigma'\nu \frac{d^{\nu-1}}{dx^{\nu-1}} \left\{ \frac{F_2 x}{\theta_1^{(\nu)} x} \Sigma \frac{f_1(x, y)}{\chi' y} \frac{\delta\theta y}{\theta y} \right\}.$$

Sous cette forme la valeur de dv est immédiatement intégrable, car $F_2 x$, $\theta_1 x$, $f_1(x, y)$ et $\chi' y$ sont toutes indépendantes des quantités a, a', $a'' \ldots$, auxquelles la différentiation se rapporte. On aura donc, en intégrant, pour v l'expression suivante:

(37) $$v = C - \Pi \frac{F_2 x}{\theta_1 x} \Sigma \frac{f_1(x, y)}{\chi' y} \log \theta y + \Sigma' \nu \frac{d^{\nu-1}}{dx^{\nu-1}} \left\{ \frac{F_2 x}{\theta_1^{(\nu)} x} \Sigma \frac{f_1(x, y)}{\chi' y} \log \theta y \right\}$$
$$(x = \beta_1, \beta_2 \ldots \beta_\alpha);$$

ou bien en faisant, pour abréger,

(38) $$\Sigma \frac{f_1(x, y)}{f_2 x \cdot \chi' y} \log \theta y = \varphi x,$$
$$\frac{F_2 x}{\theta_1^{(\nu)} x} \Sigma \frac{f_1(x, y)}{\chi' y} \log \theta y = \varphi_1 x,$$

et remarquant que d'après (23), (24), (25) et (35),

$$F_2 x = \frac{\theta_1 x}{f_2 x}:$$

(39) $$v = C - \Pi \varphi x + \Sigma' \nu \frac{d^{\nu-1} \varphi_1 x}{dx^{\nu-1}};$$

voilà l'expression de la fonction v dans tous les cas possibles. Elle contient, comme on le voit, en général, des fonctions logarithmiques; mais dans des cas particuliers elle peut aussi devenir seulement algébrique et même constante.

En substituant cette valeur au lieu de v dans la formule (14), il viendra

(40) $$\psi_1 x_1 + \psi_2 x_2 + \cdots + \psi_\mu x_\mu = C - \Pi \varphi x + \Sigma' \nu \frac{d^{\nu-1} \varphi_1 x}{dx^{\nu-1}},$$

ou bien pour abréger:

(41) $$\Sigma \psi x = C - \Pi \varphi x + \Sigma \nu \frac{d^{\nu-1} \varphi_1 x}{dx^{\nu-1}}$$

lorsqu'on fait

(42) $$\psi_1 x_1 + \psi_2 x_2 + \cdots + \psi_\mu x_\mu = \Sigma \psi x \quad \text{et} \quad \Sigma' = \Sigma.$$

5.

Nous avons supposé dans ce qui précède que la fonction r aurait pour facteur la fonction

$$F_0 x = (x - \beta_1)^{\mu_1} (x - \beta_2)^{\mu_2} \ldots (x - \beta_\alpha)^{\mu_\alpha}.$$

Sinon tous les exposants $\mu_1, \mu_2 \ldots \mu_\alpha$ sont égaux à zéro, il en résultera

$$\frac{R_1\beta}{\theta_1^{(\nu)}\beta} = \frac{R_3\beta}{\theta_1^{(\nu)}\beta},$$

donc, en substituant,

(32) $$\Sigma \frac{R_3 x}{\theta_1 x . F'x} = -\Sigma' \nu \frac{d^{\nu-1}}{d\beta^{\nu-1}} \left\{ \frac{R_1\beta}{\theta_1^{(\nu)}\beta . F\beta} \right\}.$$

Ayant ainsi trouvé les valeurs de $\Sigma \frac{R_2 x}{F'x}$ et $\Sigma \frac{R_3 x}{\theta_1 x . F'x}$, l'équation (27) donnera, pour la différentielle dv, l'expression suivante,

(33) $$dv = -\Pi \frac{R_1 x}{\theta_1 x . Fx} + \Sigma' \nu \frac{d^{\nu-1}}{d\beta^{\nu-1}} \left\{ \frac{R_1\beta}{\theta_1^{(\nu)}\beta . F\beta} \right\},$$

ou bien

(34) $$dv = -\Pi \frac{R_1 x}{\theta_1 x . Fx} + \Sigma' \nu \frac{d^{\nu-1}}{dx^{\nu-1}} \left\{ \frac{R_1 x}{\theta_1^{(\nu)} x . Fx} \right\}$$
$$(x = \beta_1,\ \beta_2 \ldots \beta_\alpha).$$

Maintenant on a (19)

$$Rx = \Sigma \frac{f_1(x, y)}{\chi' y} \frac{r}{\theta y} \delta\theta y = F_0 x . Fx . \Sigma \frac{f_1(x, y)}{\chi' y} \frac{\delta\theta y}{\theta y}$$

et (23)

$$R_1 x = Rx . (x - \beta_1)^{-k_1} (x - \beta_2)^{-k_2} \ldots (x - \beta_\alpha)^{-k_\alpha};$$

donc en faisant, pour abréger,

(35) $$F_0 x . (x - \beta_1)^{-k_1} (x - \beta_2)^{-k_2} \ldots (x - \beta_\alpha)^{-k_\alpha}$$
$$= (x - \beta_1)^{\mu_1 - k_1} (x - \beta_2)^{\mu_2 - k_2} \ldots (x - \beta_\alpha)^{\mu_\alpha - k_\alpha} = F_2 x:$$
$$R_1 x = F_2 x . Fx . \Sigma \frac{f_1(x, y)}{\chi' y} \frac{\delta\theta y}{\theta y},$$

et en substituant cette valeur de $R_1 x$ dans l'expression précédente de dv, on obtiendra

(36) $$dv = -\Pi \frac{F_2 x}{\theta_1 x} \Sigma \frac{f_1(x, y)}{\chi' y} \frac{\delta\theta y}{\theta y} + \Sigma' \nu \frac{d^{\nu-1}}{dx^{\nu-1}} \left\{ \frac{F_2 x}{\theta_1^{(\nu)} x} \Sigma \frac{f_1(x, y)}{\chi' y} \frac{\delta\theta y}{\theta y} \right\}.$$

Sous cette forme la valeur de dv est immédiatement intégrable, car $F_2 x$, $\theta_1 x$, $f_1(x, y)$ et $\chi' y$ sont toutes indépendantes des quantités a, a', $a'' \ldots$, auxquelles la différentiation se rapporte. On aura donc, en intégrant, pour v l'expression suivante:

(37) $$v = C - \Pi \frac{F_2 x}{\theta_1 x} \Sigma \frac{f_1(x, y)}{\chi' y} \log \theta y + \Sigma' \nu \frac{d^{\nu-1}}{dx^{\nu-1}} \left\{ \frac{F_2 x}{\theta_1^{(\nu)} x} \Sigma \frac{f_1(x, y)}{\chi' y} \log \theta y \right\}$$

$$(x = \beta_1, \; \beta_2 \ldots \beta_\alpha);$$

ou bien en faisant, pour abréger,

(38) $$\Sigma \frac{f_1(x, y)}{f_2 x \cdot \chi' y} \log \theta y = \varphi x,$$

$$\frac{F_2 x}{\theta_1^{(\nu)} x} \Sigma \frac{f_1(x, y)}{\chi' y} \log \theta y = \varphi_1 x,$$

et remarquant que d'après (23), (24), (25) et (35),

$$F_2 x = \frac{\theta_1 x}{f_2 x}:$$

(39) $$v = C - \Pi \varphi x + \Sigma' \nu \frac{d^{\nu-1} \varphi_1 x}{dx^{\nu-1}};$$

voilà l'expression de la fonction v dans tous les cas possibles. Elle contient, comme on le voit, en général, des fonctions logarithmiques; mais dans des cas particuliers elle peut aussi devenir seulement algébrique et même constante.

En substituant cette valeur au lieu de v dans la formule (14), il viendra

(40) $$\psi_1 x_1 + \psi_2 x_2 + \cdots + \psi_\mu x_\mu = C - \Pi \varphi x + \Sigma' \nu \frac{d^{\nu-1} \varphi_1 x}{dx^{\nu-1}},$$

ou bien pour abréger:

(41) $$\Sigma \psi x = C - \Pi \varphi x + \Sigma \nu \frac{d^{\nu-1} \varphi_1 x}{dx^{\nu-1}}$$

lorsqu'on fait

(42) $$\psi_1 x_1 + \psi_2 x_2 + \cdots + \psi_\mu x_\mu = \Sigma \psi x \quad \text{et} \quad \Sigma' = \Sigma.$$

5.

Nous avons supposé dans ce qui précède que la fonction r aurait pour facteur la fonction

$$F_0 x = (x - \beta_1)^{\mu_1} (x - \beta_2)^{\mu_2} \ldots (x - \beta_\alpha)^{\mu_\alpha}.$$

Sinon tous les exposants $\mu_1, \mu_2 \ldots \mu_\alpha$ sont égaux à zéro, il en résultera

nécessairement certaines relations entre les coefficients des fonctions q_0, q_1, q_2 ... q_{n-1}, relations qui peuvent toujours s'exprimer par des équations linéaires entre ces coefficients; car si $r=0$ pour $x=\beta$, il faut aussi qu'on ait une équation de la forme $\theta y=0$ pour la même valeur de x; mais cette équation est linéaire. En général donc la fonction r n'aura pas de facteur comme $F_0 x$, c'est-à-dire indépendant des quantités a, a', a'' .... Ce cas mérite d'être remarqué:

Ayant (19)

$$Rx=\Sigma\frac{f_1(x, y)}{\chi' y}\frac{r}{\theta y}\delta\theta y,$$

on aura en général, si $F_0 x=1$, $k_1=k_2=k_3=\cdots=k_\alpha=0$ (on peut faire la même supposition dans tous les cas); on aura donc en vertu de (35) et (25)

$$F_2 x=1,\quad \theta_1 x=F_2 x . f_2 x=f_2 x,$$

la valeur (38) de $\varphi_1 x$ deviendra donc (en remarquant que $\nu_1=m_1$, $\nu_2=m_2$, etc., et désignant ν par m)

$$\varphi_1 x=\frac{1}{f_2^{(m)} x}\Sigma\frac{f_1(x, y)}{\chi' y}\log\theta y,$$

et par conséquent la formule (41) (en désignant par B la valeur de y pour $x=\beta$)

$$(43)\qquad \Sigma\int\frac{f_1(x, y)\,dx}{f_2 x . \chi' y}=\left\{\begin{array}{l} C-\Pi\Sigma\dfrac{f_1(x, y)}{f_2 x . \chi' y}\log\theta y \\ +\Sigma m\dfrac{d^{m-1}}{d\beta^{m-1}}\left(\dfrac{1}{f_2^{(m)}\beta}\Sigma\dfrac{f_1(\beta, B)}{\chi' B}\log\theta B\right). \end{array}\right.$$

Pour le cas particulier où $f_2 x=(x-\beta)^m$, on aura $f_2^{(m)}\beta=1.2\ldots m$, donc en substituant

$$(44)\qquad \Sigma\int\frac{f_1(x, y)\,dx}{(x-\beta)^m\chi' y}=\left\{\begin{array}{l} C-\Pi\Sigma\dfrac{f_1(x, y)}{(x-\beta)^m\chi' y}\log\theta y \\ +\dfrac{1}{1.2\ldots(m-1)}\dfrac{d^{m-1}}{d\beta^{m-1}}\left(\Sigma\dfrac{f_1(\beta, B)}{\chi' B}\log\theta B\right). \end{array}\right.$$

Si $m=1$, il vient

$$(45)\qquad \Sigma\int\frac{f_1(x, y)\,dx}{(x-\beta)\chi' y}=C-\Sigma\Pi\frac{f_1(x, y)}{(x-\beta)\chi' y}\log\theta y+\Sigma\frac{f_1(\beta, B)}{\chi' B}\log\theta B,$$

et si $m=0$,

(46) $$\Sigma\int\frac{f_1(x,y)\,dx}{\chi' y}=C-\Sigma\Pi\frac{f_1(x,y)}{\chi' y}\log\theta y.$$

Dans la formule (43), le second membre est en général une fonction des quantités a, a', a'', etc. Si on le suppose égal à une constante, il en résultera donc en général certaines relations entre ces quantités; mais il y a aussi certains cas pour lesquels le second membre se réduit à une constante, quelles que soient d'ailleurs les valeurs des quantités a, a' a'', etc. Cherchons ces cas:

D'abord il est évident que la fonction $f_2 x$ doit être constante, car dans le cas contraire le second membre contiendrait nécessairement les quantités a, a', a'' ..., vu les valeurs arbitraires de ces quantités.

En faisant donc $f_2 x=1$, il viendra

$$\Sigma\int\frac{f_1(x,y)}{\chi' y}dx=C-\Sigma\Pi\frac{f_1(x,y)}{\chi' y}\log\theta y.$$

Or, en observant que ces quantités a, a', a'', ... sont toutes arbitraires, il est clair que la fonction $\Sigma\frac{f_1(x,y)}{\chi' y}\log\theta y$, développée suivant les puissances descendantes de x, aura la forme suivante:

$$R\log x+A_0x^{\mu_0}+A_1x^{\mu_0-1}+\cdots+A_{\mu_0}+\frac{A_{\mu_0+1}}{x}+\frac{A_{\mu_0+2}}{x^2}+\cdots,$$

R étant une fonction de x indépendante de a, a', a'', etc., μ_0 un nombre entier, et A_0, A_1, ... A_{μ_0}, A_{μ_0+1}, etc., des fonctions de a, a', a'', etc.; donc pour que la fonction dont il s'agit soit constante, il faut que μ_0 soit moindre que -1; et par conséquent la plus grande valeur de ce nombre est -2.

Cela posé, en désignant par le symbole hR le plus haut exposant de x dans le développement d'une fonction quelconque R de cette quantité, suivant les puissances descendantes, il est clair que μ_0 sera égal au nombre entier le plus grand contenu dans les nombres:

$$h\frac{f_1(x,y')}{\chi' y'},\quad h\frac{f_1(x,y'')}{\chi' y''},\quad \ldots\ h\frac{f_1(x,y^{(n)})}{\chi' y^{(n)}};$$

il faut donc que tous ces nombres soient inférieurs à l'unité prise négativement.

Or, si $\frac{R}{R_1}$ est une fonction de x, on aura, comme il est aisé de le voir,

$$h\frac{R}{R_1} = hR - hR_1,$$

par conséquent

(47) $$hf_1(x, y') < h\chi'y' - 1, \quad hf_1(x, y'') < h\chi'y'' - 1, \quad \ldots hf_1(x, y^{(n)}) < h\chi'y^{(n)} - 1.$$

De ces inégalités on déduira facilement dans chaque cas particulier la forme la plus générale de la fonction $f_1(x, y)$.

Comme on a

$$\chi'y' = (y' - y'')(y' - y''') \cdots (y' - y^{(n)})$$
$$\chi'y'' = (y'' - y')(y'' - y''') \cdots (y'' - y^{(n)}), \text{ etc.,}$$

il s'ensuit que

(48) $$h\chi'y' = h(y' - y'') + h(y' - y''') + \cdots + h(y' - y^{(n)})$$
$$h\chi'y'' = h(y'' - y') + h(y'' - y''') + \cdots + h(y'' - y^{(n)}), \text{ etc.}$$

Supposons, ce qui est permis, que l'on ait

(49) $$hy' \geqq hy'', \quad hy'' \geqq hy''', \quad hy''' \geqq hy'''', \quad \ldots hy^{(n-1)} \geqq hy^{(n)},$$

de sorte que les quantités hy', hy'', hy''', ... suivent l'ordre de leurs grandeurs en commençant par la plus grande. Alors on aura, en général, excepté quelques cas particuliers que je me dispense de considérer:

(50) $$\begin{cases} h(y' - y'') = hy', \; h(y' - y''') = hy', \; h(y' - y'''') = hy' \; \ldots h(y' - y^{(n)}) = hy', \\ h(y'' - y') = hy', \; h(y'' - y''') = hy'', \; h(y'' - y'''') = hy'' \; \ldots h(y'' - y^{(n)}) = hy'', \\ h(y''' - y') = hy', \; h(y''' - y'') = hy'', \; h(y''' - y'''') = hy''' \; \ldots h(y''' - y^{(n)}) = hy''', \\ \text{etc., etc.} \end{cases}$$

Si ces équations ont lieu, on se convaincra sans peine, en supposant

(51) $$f_1(x, y) = t_0 + t_1 y + t_2 y^2 + \cdots + t_{n-1} y^{n-1},$$

que les inégalités (47) entraînent nécessairement les suivantes:

(52) $$h(t_m y'^m) < h\chi'y' - 1, \quad h(t_m y''^m) < h\chi'y'' - 1, \quad h(t_m y'''^m) < h\chi'y''' - 1, \; \ldots$$

m étant l'un quelconque des nombres 0, 1, 2, ... $n-1$.

D'où l'on tire, en remarquant que

$$h(t_m y^m) = ht_m + hy^m = ht_m + mhy,$$

les inégalités

$$ht_m < h\chi'y' - mhy' - 1,\ ht_m < h\chi'y'' - mhy'' - 1,$$
$$\ldots ht_m < h\chi'y^{(n)} - mhy^{(n)} - 1.$$

Or, au moyen des équations (48) et (50), on aura

$$h\chi'y' - mhy' - 1 = (n-m-1)hy' - 1,$$
$$h\chi'y'' - mhy'' - 1 = (n-m-2)hy'' + hy' - 1,$$
$$h\chi'y''' - mhy''' - 1 = (n-m-3)hy''' + hy' + hy'' - 1,$$

etc.,

$$h\chi'y^{(n-m-1)} - mhy^{(n-m-1)} - 1 = hy^{(n-m-1)} + hy' + hy'' + \cdots + hy^{(n-m-2)} - 1,$$
$$h\chi'y^{(n-m)} - mhy^{(n-m)} - 1 = hy' + hy'' + \cdots + hy^{(n-m-1)} - 1,$$
$$h\chi'y^{(n-m+1)} - mhy^{(n-m+1)} - 1 = -hy^{(n-m+1)} + hy' + hy'' + \cdots + hy^{(n-m)} - 1,$$

etc.,

$$h\chi'y^{(n)} - mhy^{(n)} - 1 = -mhy^{(n)} + hy' + hy'' + \cdots + hy^{(n-1)} - 1.$$

En remarquant donc que les quantités hy', hy'', ... suivent l'ordre de leurs grandeurs, il est clair que le plus petit des nombres

$$h\chi'y' - mhy' - 1,\ h\chi'y'' - mhy'' - 1, \text{ etc., } h\chi'y^{(n)} - mhy^{(n)} - 1$$

est égal à

$$hy' + hy'' + hy''' + \cdots + hy^{(n-m-1)} - 1.$$

Donc la plus grande valeur de ht_m est égale au nombre entier immédiatement inférieur à cette quantité, et on aura

$$(53)\qquad ht_m = hy' + hy'' + \cdots + hy^{(n-m-1)} - 2 + \varepsilon_{n-m-1},$$

où ε_{n-m-1} est le nombre positif moindre que l'unité qui rend possible cette équation.

Cela posé, soit $hy' = \frac{m'}{\mu'}$, m' et μ' étant deux nombres entiers et la fraction $\frac{m'}{\mu'}$ réduite à sa plus simple expression, alors il faudra que l'on ait

$$hy' = hy'' = hy''' = \cdots = hy^{(m)} = \frac{m'}{\mu'}.$$

Car si une équation de la forme $\chi y = 0$ est satisfaite par une fonction de la forme

$$y = Ax^{\frac{m'}{\mu'}} + \text{etc.},$$

cette même équation est aussi satisfaite par les μ' valeurs de y qu'on obtiendra en mettant au lieu de $x^{\frac{1}{\mu'}}$,

$$\alpha_1 x^{\frac{1}{\mu'}}, \quad \alpha_2 x^{\frac{1}{\mu'}}, \quad \ldots \; \alpha_{\mu'-1} x^{\frac{1}{\mu'}},$$

$1, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{\mu'-1}$ étant les μ' racines de l'équation $a^{\mu'} - 1 = 0$.

Parmi les quantités $hy', hy'', \ldots hy^{(n)}$, il y en a donc μ' qui sont égales entre elles. De même le nombre total des exposants qui sont égaux à une fraction réduite doit être un multiple du dénominateur.

On peut donc supposer

$$(54) \quad \begin{cases} hy' = hy'' = \cdots = hy^{(k')} = \dfrac{m'}{\mu'}, \\ hy^{(k'+1)} = hy^{(k'+2)} = \cdots = hy^{(k'')} = \dfrac{m''}{\mu''}, \\ hy^{(k''+1)} = hy^{(k''+2)} = \cdots = hy^{(k''')} = \dfrac{m'''}{\mu'''}, \\ \quad \text{etc.}, \\ hy^{(k^{(\varepsilon-1)}+1)} = hy^{(k^{(\varepsilon-1)}+2)} = \cdots = hy^{(n)} = \dfrac{m^{(\varepsilon)}}{\mu^{(\varepsilon)}}, \end{cases}$$

où

$$(55) \quad \begin{cases} k' = n'\mu'; \; k'' = n'\mu' + n''\mu''; \; k''' = n'\mu' + n''\mu'' + n'''\mu'''; \; \text{etc.} \\ n = n'\mu' + n''\mu'' + n'''\mu''' + \cdots + n^{(\varepsilon)}\mu^{(\varepsilon)}; \end{cases}$$

les fractions $\frac{m'}{\mu'}, \frac{m''}{\mu''}, \ldots \frac{m^{(\varepsilon)}}{\mu^{(\varepsilon)}}$ sont réduites à leur plus simple expression, et $n', n'', n''', \ldots n^{(\varepsilon)}$ sont des nombres entiers.

Supposons maintenant dans l'expression de ht_m, que $m = n - k^{(\alpha)} - \beta - 1$, β étant un nombre moindre que $k^{(\alpha+1)} - k^{(\alpha)}$, c'est-à-dire moindre que $n^{(\alpha+1)}\mu^{(\alpha+1)}$, il viendra alors

$$ht_{n-k^{(\alpha)}-\beta-1} = \left\{\begin{array}{l} hy' + hy'' + \cdots + hy^{(k')} \\ + hy^{(k'+1)} + hy^{(k'+2)} + \cdots + hy^{(k'')} \\ + \text{etc.} \\ + hy^{(k^{(\alpha-1)}+1)} + hy^{(k^{(\alpha-1)}+2)} + \cdots + hy^{(k^{(\alpha)})} \\ + hy^{(k^{(\alpha)}+1)} + hy^{(k^{(\alpha)}+2)} + \cdots + hy^{(k^{(\alpha)}+\beta)} \\ + \varepsilon_{(k^{(\alpha)}+\beta)} - 2; \end{array}\right.$$

or, les équations (54) et (55) donnent

$$hy' + hy'' + \cdots + hy^{(k')} = k' \frac{m'}{\mu'} = n'm',$$

$$hy^{(k'+1)} + hy^{(k'+2)} + \cdots + hy^{(k'')} = (k'' - k') \frac{m''}{\mu''} = n''m'',$$

etc.,

$$hy^{(k^{(\alpha)}+1)} + \cdots + hy^{(k^{(\alpha)}+\beta)} = \beta \frac{m^{(\alpha+1)}}{\mu^{(\alpha+1)}},$$

donc, en substituant

$$(56) \qquad ht_{n-k^{(\alpha)}-\beta-1} = \left\{\begin{array}{l} n'm' + n''m'' + n'''m''' + \cdots + n^{(\alpha)}m^{(\alpha)} \\ \qquad + \beta \frac{m^{(\alpha+1)}}{\mu^{(\alpha+1)}} + \varepsilon_{k^{(\alpha)}+\beta} - 2. \end{array}\right.$$

Quant à la valeur de $\varepsilon_{k^{(\alpha)}+\beta}$, il est clair qu'en faisant

$$\mu^{(\alpha+1)} . \varepsilon_{k^{(\alpha)}+\beta} = A_\beta^{(\alpha+1)},$$

cette quantité $A_\beta^{(\alpha+1)}$ sera le plus petit nombre entier positif, qui rend le nombre $\beta m^{(\alpha+1)} + A_\beta^{(\alpha+1)}$ divisible par $\mu^{(\alpha+1)}$; on aura donc

$$(57) \qquad ht_{n-k^{(\alpha)}-\beta-1} = \left\{\begin{array}{l} -2 + n'm' + n''m'' + n'''m''' + \cdots + n^{(\alpha)}m^{(\alpha)} \\ + \frac{\beta m^{(\alpha+1)} + A_\beta^{(\alpha+1)}}{\mu^{(\alpha+1)}}. \end{array}\right.$$

En faisant dans cette équation $\alpha = 0$, il viendra

$$ht_{n-\beta-1} = -2 + \frac{\beta m' + A'_\beta}{\mu'};$$

donc si $\frac{\beta m' + A'_\beta}{\mu'} < 2$, $ht_{n-\beta-1}$ est négatif, et par conséquent il faut faire $t_{n-\beta-1} = 0$; car, pour toute fonction entière t, ht est nécessairement positif, zéro y compris. Or, en faisant $\beta = 0$, on a toujours $\frac{\beta m' + A'_\beta}{\mu'} < 2$; donc

t_{n-1} est toujours égal à zéro, c'est-à-dire que la fonction $f_1(x, y)$ doit être de la forme

(58) $$f_1(x, y) = t_0 + t_1 y + t_2 y^2 + \cdots + t_{n-\beta'-1} y^{n-\beta'-1},$$

où β', étant plus grand que zéro, est déterminé par l'équation

$$\frac{\beta' m' + A'_{\beta'}}{\mu'} = 2,$$

d'où il suit que β' est égal au plus grand nombre entier contenu dans la fraction $\frac{\mu'}{m'} + 1$.

Une fonction telle que $f_1(x, y)$ existe donc toujours à moins que β' ne surpasse $n-1$. Pour que cela puisse avoir lieu, il faut que

$$\frac{\mu'}{m'} + 1 = n + \varepsilon,$$

où ε est une quantité positive, zéro y compris; de là il suit

$$\frac{m'}{\mu'} = \frac{1}{n-1+\varepsilon}.$$

Or, la plus grande valeur de μ' est n, donc cette équation donne

$$\frac{m'}{\mu'} = \frac{1}{n-1} \quad \text{ou} \quad \frac{m'}{\mu'} = \frac{1}{n}.$$

Or, je dis que dans ces deux cas l'intégrale $\int f(x, y)\, dx$ peut s'exprimer au moyen de fonctions algébriques et logarithmiques. En effet, pour que $\frac{m'}{\mu'}$, qui est le plus grand des exposants hy', hy'', ... $hy^{(n)}$, ait une des deux valeurs $\frac{1}{n-1}$, $\frac{1}{n}$, il faut que l'équation $\chi y = 0$, qui donne la fonction y, ne contienne la variable x que sous une forme linéaire. On aura donc

$$\chi y = P + xQ,$$

où P et Q sont des fonctions entières de y; de là il suit

$$x = -\frac{P}{Q}, \quad dx = \frac{PdQ - QdP}{Q^2},$$

et

$$f(x, y)\, dx = f\left(-\frac{P}{Q}, y\right) \frac{PdQ - QdP}{Q^2} = R\, dy,$$



où il est clair que R est une fonction rationnelle de y; par conséquent l'intégrale $\int R dy$, et par suite $\int f(x, y) dx$, peut être exprimée au moyen de fonctions logarithmiques et algébriques.

Excepté ce cas donc, la fonction $f_1(x, y)$ existe toujours; en la substituant dans l'équation (46), elle deviendra

(59) $$\Sigma \int \frac{(t_0 + t_1 y + \cdots + t_{n-\beta'-1} y^{(n-\beta'-1)}) dx}{\chi' y} = C.$$

Un cas particulier de cette équation est le suivant:

(60) $$\Sigma \int \frac{x^k y^m dx}{\chi' y} = C.$$

où k et m sont deux nombres entiers et positifs, tels que

(61) $$m < n - \frac{\mu'}{m'} - 1;$$

$$k < -1 + n'm' + n''m'' + \cdots + n^{(\alpha)} m^{(\alpha)} + \frac{\beta m^{(\alpha+1)}}{\mu^{(\alpha+1)}};$$

$$m = n - k^{(\alpha)} - \beta - 1; \quad \beta < \mu^{(\alpha+1)} n^{(\alpha+1)};$$

et il est clair que cette formule peut remplacer la formule (59) dans toute sa généralité.

Puisque le degré de la fonction entière t_m est égal à ht_m, cette même fonction contiendra un nombre de constantes arbitraires égal à $ht_m + 1$. La fonction $f_1(x, y)$ en contiendra donc un nombre exprimé par

$$ht_0 + ht_1 + \cdots + ht_{n-\beta'-1} + n - \beta',$$

ou bien, comme il est aisé de le voir,

$$ht_0 + ht_1 + \cdots + ht_{n-\beta'-1} + \cdots + ht_{n-2} + n - 1.$$

En désignant ce nombre par γ, on trouvera aisément, en vertu de l'équation qui donne la valeur générale de ht_m,

$$\gamma = \left\{ \begin{array}{l} \frac{A_0'}{\mu'} + \frac{m' + A_1'}{\mu'} + \frac{2m' + A_2'}{\mu'} + \cdots + \frac{(n'\mu' - 1)m' + A'_{n'\mu'-1}}{\mu'} \\ + \frac{A_0''}{\mu''} + \frac{m'' + A_1''}{\mu''} + \frac{2m'' + A_2''}{\mu''} + \cdots + \frac{(n''\mu'' - 1)m'' + A''_{n''\mu''-1}}{\mu''} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + n'm'n''\mu'' \\ + \frac{A_0'''}{\mu'''} + \frac{m''' + A_1'''}{\mu'''} + \frac{2m''' + A_2'''}{\mu'''} + \cdots + \frac{(n'''\mu''' - 1)m''' + A'''_{n'''\mu'''-1}}{\mu'''} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + (n'm' + n''m'')n'''\mu''' \\ + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ - n + 1; \end{array} \right.$$

or, en remarquant que m' et μ' sont premiers entre eux, on sait par la théorie des nombres que la suite A_0', A_1', A_2', $A_3' \ldots A'_{n'\mu'-1}$, contiendra n' fois la suite des nombres naturels $0, 1, 2, 3, \ldots \mu'-1$, donc

$$A_0'+A_1'+A_2'+\cdots+A'_{n'\mu'-1}=n'(0+1+2+\cdots+\mu'-1)$$
$$=n'\frac{\mu'(\mu'-1)}{2};$$

de même

$$A_0''+A_1''+A_2''+\cdots+A''_{n''\mu''-1}=n''(0+1+2+\cdots+\mu''-1)$$
$$=n''\frac{\mu''(\mu''-1)}{2},$$

etc.

En substituant ces valeurs et réduisant, la valeur de γ deviendra

$$\gamma=\left\{\begin{array}{l} -n+1+\frac{1}{2}m'n'(n'\mu'-1)+\frac{1}{2}n'(\mu'-1)+\frac{1}{2}m''n''(n''\mu''-1) \\ \qquad +\frac{1}{2}n''(\mu''-1) \\ +\cdots+\frac{1}{2}n^{(\varepsilon)}m^{(\varepsilon)}(n^{(\varepsilon)}\mu^{(\varepsilon)}-1)+\frac{1}{2}n^{(\varepsilon)}(\mu^{(\varepsilon)}-1)+\cdots \\ +n'm'n''\mu''+(n'm'+n''m'')n'''\mu'''+(n'm'+n''m''+n'''m''')n''''\mu'''' \\ +\cdots+(n'm'+n''m''+\cdots+n^{(\varepsilon-1)}m^{(\varepsilon-1)})n^{(\varepsilon)}\mu^{(\varepsilon)}; \end{array}\right.$$

ou bien en remarquant que

$$n=n'\mu'+n''\mu''+\cdots+n^{(\varepsilon)}\mu^{(\varepsilon)},$$

(62)

$$\gamma=\left\{\begin{array}{l} n'\mu'\left(\frac{m'n'-1}{2}\right)+n''\mu''\left(m'n'+\frac{m''n''-1}{2}\right)+n'''\mu'''\left(m'n'+m''n''+\frac{m'''n'''-1}{2}\right) \\ +\cdots+n^{(\varepsilon)}\mu^{(\varepsilon)}\left(m'n'+m''n''+\cdots+m^{(\varepsilon-1)}n^{(\varepsilon-1)}+\frac{m^{(\varepsilon)}n^{(\varepsilon)}-1}{2}\right) \\ -\frac{n'(m'+1)}{2}-\frac{n''(m''+1)}{2}-\frac{n'''(m'''+1)}{2}-\cdots-\frac{n^{(\varepsilon)}(m^{(\varepsilon)}+1)}{2}+1. \end{array}\right.$$

Comme cas particuliers on doit remarquer les deux suivants:

1. Lorsque

$$hy'=hy''=\cdots=hy^{(n)}=\frac{m'}{\mu'}.$$

Dans ce cas $\varepsilon=1$, et par conséquent

(63) $$\gamma=n'\mu'\frac{n'm'-1}{2}-n'\frac{m'+1}{2}+1.$$

Si en outre $\mu'=n$, on aura $n'=1$, et

(64) $$\gamma=(n-1)\frac{m'-1}{2}.$$

2. Lorsque toutes les quantités $hy', hy'', \ldots hy^{(n)}$ sont des nombres entiers. Alors on aura

$$\mu' = \mu'' = \mu''' = \cdots = \mu^{(\varepsilon)} = 1;$$

et si l'on fait de plus

$$n' = n'' = \cdots = n^{(\varepsilon)} = 1,$$

on aura $\varepsilon = n$, et par conséquent en substituant,

$$(65) \qquad \gamma = (n-1)m' + (n-2)m'' + (n-3)m''' + \cdots + 2m^{(n-2)} + m^{(n-1)} - n + 1;$$

c'est-à-dire, en remarquant que $m' = hy'$, $m'' = hy''$, etc.

$$(66) \qquad \gamma = (n-1)hy' + (n-2)hy'' + (n-3)hy''' + \cdots + 2hy^{(n-2)} + hy^{(n-1)} - n + 1.$$

Dans le cas où tous les nombres $hy', hy'', \ldots hy^{(n-1)}$ sont égaux entre eux, la valeur de γ deviendra

$$(67) \qquad \gamma = \frac{n(n-1)}{2}hy' - n + 1 = (n-1)\left(\frac{nhy'}{2} - 1\right).$$

La formule (59) a généralement lieu pour des valeurs quelconques des quantités $a, a', a'', \ldots$ toutes les fois que la fonction r n'a pas un facteur de la forme F_0x; mais dans ce cas elle a encore lieu, sinon F_0x et $\frac{\chi' y}{f_1(x, y)}$ s'évanouissent pour une même valeur de x. Alors la formule dont il s'agit cesse d'avoir lieu, et on aura au lieu d'elle la formule (40), qui deviendra, en faisant $f_2x = 1$,

$$(68) \qquad \Sigma\int\frac{f_1(x, y)\,dx}{\chi' y} = \begin{cases} C - H\Sigma\frac{f_1(x, y)}{\chi' y}\log\theta y \\ \quad + \Sigma\nu\frac{d^{\nu-1}}{d\beta^{\nu-1}}\left(\frac{\theta_1\beta}{\theta_1^{(\nu)}\beta}\Sigma\frac{f_1(\beta, B)}{\chi' B}\log\theta B\right), \end{cases}$$

c'est-à-dire, en remarquant que

$$H\Sigma\frac{f_1(x, y)}{\chi' y}\log\theta y = 0,$$

$$(69) \qquad \Sigma\int\frac{f_1(x, y)\,dx}{\chi' y} = C + \Sigma\nu\frac{d^{\nu-1}}{d\beta^{\nu-1}}\left(\frac{\theta_1\beta}{\theta_1^{(\nu)}\beta}\Sigma\frac{f_1(\beta, B)}{\chi' B}\log\theta B\right).$$

Maintenant on a (19)

$$Rx = \Sigma\frac{f_1(x, y)}{\chi' y}\frac{r}{\theta y}\delta\theta y,$$

d'où il suit que si $\frac{f_1(x,y)}{\chi' y}$ conserve une valeur finie pour $x=\beta_1$, la fonction entière Rx aura $(x-\beta_1)^{\mu_1}$ pour facteur, donc

$$k_1=\mu_1 \quad \text{et} \quad \nu_1=\mu_1-k_1=0.$$

Par là on voit que, dans le second membre de l'équation précédente, tous les termes relatifs à des valeurs de β, qui ne rendent point infinie la valeur de $\frac{f_1(\beta,B)}{\chi' B}$, s'évanouiront; par conséquent ledit nombre se réduit à une constante, si $F_0 x$ n'a pas de facteur commun avec $\frac{\chi' y}{f_1(x,y)}$.

6.

Reprenons maintenant la formule générale (14), et considérons les fonctions $x_1, x_2, x_3, \ldots x_\mu$. Ces quantités sont données, par l'équation $Fx=0$, en fonctions des quantités indépendantes a, a', a'', etc.; soient

$$x_1=f_1(a,a',a'',\ldots);\ x_2=f_2(a,a',a'',\ldots);\ \ldots x_\mu=f_\mu(a,a',a'',\ldots).$$

Si maintenant on désigne par α le nombre des quantités $a, a', a'', \ldots$ on peut en général tirer de ces équations les valeurs de $a, a', a'', \ldots$ en fonctions d'un nombre α des quantités $x_1, x_2 \ldots x_\mu$; par exemple, en fonctions de $x_1, x_2, \ldots x_\alpha$. En substituant les valeurs de $a, a', a'', \ldots$ ainsi déterminées, dans les expressions de $x_{\alpha+1}, x_{\alpha+2}, \ldots x_\mu$, ces dernières quantités deviendront des fonctions de $x_1, x_2, \ldots x_\alpha$; et alors celles-ci seront indéterminées. La formule (14) deviendra donc

$$(70) \qquad v=\left\{\begin{array}{l}\psi_1 x_1+\psi_2 x_2+\cdots+\psi_\alpha x_\alpha \\ \qquad +\psi_{\alpha+1}x_{\alpha+1}+\psi_{\alpha+2}x_{\alpha+2}+\cdots+\psi_\mu x_\mu,\end{array}\right.$$

où $x_1, x_2, \ldots x_\alpha$ sont des quantités quelconques, $x_{\alpha+1}, x_{\alpha+2}, \ldots x_\mu$ des fonctions algébriques de $x_1, x_2, \ldots x_\alpha$, et v une fonction algébrique et logarithmique des mêmes quantités.

Les quantités $a, a', a'', \ldots$ et $x_{\alpha+1}, x_{\alpha+2}, \ldots x_\mu$ se trouvent de la manière suivante. Les équations (7) donnent les suivantes:

$$(71) \qquad \theta y_1=0,\ \theta y_2=0,\ \ldots \theta y_\alpha=0,$$

qui toutes sont linéaires par rapport aux quantités $a, a', a'', \ldots$. Elles donneront donc ces quantités en fonctions rationnelles de $x_1, y_1;\ x_2, y_2;\ x_3, y_3;$

$\dots x_\alpha, y_\alpha$. Maintenant si l'on substitue ces fonctions au lieu de $a, a', a'', \dots$ dans l'équation $Fx = 0$, la fonction Fx deviendra divisible par le produit $(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_\alpha)$; car on a

$$Fx = B(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_\alpha)(x-x_{\alpha+1})\cdots(x-x_\mu).$$

En désignant donc le quotient $\frac{Fx}{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_\alpha)}$ par $F^{(1)}x$, l'équation

(72) $$F^{(1)}x = 0$$

sera du degré $\mu-\alpha$, et aura pour racines les quantités $x_{\alpha+1}, \dots x_\mu$. Quant aux coefficients de cette équation, il est aisé de voir qu'ils seront des fonctions rationnelles des quantités

$$x_1, y_1; \quad x_2, y_2; \dots x_\alpha, y_\alpha.$$

De cette manière donc les $\mu-\alpha$ quantités $x_{\alpha+1}, \dots x_\mu$ sont déterminées en fonctions de $x_1, x_2, \dots x_\alpha$ par une même équation du $(\mu-\alpha)^e$ degré.

Les équations (71) sont en général en nombre suffisant pour déterminer les α quantités $a, a', a'', \dots$, mais il y a un cas où plusieurs d'entre elles deviendront identiques. C'est ce qui arrive lorsqu'on a à la fois

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_k; \quad y_1 = y_2 = \cdots = y_k;$$

car alors

$$\theta y_1 = \theta y_2 = \cdots = \theta y_k.$$

Or dans ce cas on aura, d'après les principes du calcul différentiel, au lieu des k équations identiques,

$$\theta y_1 = 0, \quad \theta y_2 = 0, \ \dots, \ \theta y_k = 0,$$

les suivantes

(73) $$\theta y_1 = 0, \quad \frac{d\theta y_1}{dx_1} = 0, \quad \frac{d^2\theta y_1}{dx_1^2} = 0, \ \dots \frac{d^k\theta y_1}{dx_1^k} = 0,$$

qui, jointes aux équations

$$\theta y_{k+1} = 0, \ \dots \ \theta y_\alpha = 0,$$

détermineront les valeurs de $a, a', \dots a^{(\alpha-1)}$.

La formule (70) montre qu'on peut exprimer une somme quelconque de la forme

$$\psi_1 x_1 + \psi_2 x_2 + \cdots + \psi_\alpha x_\alpha$$

par une fonction connue v et une somme semblable d'autres fonctions; en effet elle donnera

$$(74)\qquad \psi_1 x_1 + \psi_2 x_2 + \cdots + \psi_\alpha x_\alpha = v - (\psi_{\alpha+1} x_{\alpha+1} + \cdots + \psi_\mu x_\mu).$$

7.

Dans cette formule le nombre des fonctions $\psi_{\alpha+1}x_{\alpha+1}, \psi_{\alpha+2}x_{\alpha+2}, \ldots \psi_\mu x_\mu$ est très-remarquable. Plus il est petit, plus la formule est simple. Nous allons, dans ce qui suit, chercher la moindre valeur dont ce nombre, qui est exprimé par $\mu - \alpha$, est susceptible.

Si la fonction $F_0 x$ se réduit à l'unité, tous les coefficients dans les fonctions $q_0, q_1, q_2, \ldots q_{n-1}$ seront arbitraires; dans ce cas donc on aura (en remarquant que, d'après la forme des équations (71), un des coefficients dans les fonctions $q_0, q_1, \ldots$ peut être pris à volonté sans nuire à la généralité),

$$\alpha = hq_0 + hq_1 + hq_2 + \cdots + hq_{n-1} + n - 1.$$

Si $F_0 x$ n'est pas égal à l'unité, il faut en général un nombre $hF_0 x$ de conditions différentes pour que l'équation

$$F_0 x . Fx = r$$

soit satisfaite; mais la forme particulière de la fonction y pourrait rendre moindre ce nombre de conditions nécessaires. Supposons donc qu'il soit égal à

$$(75)\qquad hF_0 x - A,$$

le nombre des quantités indéterminées $a, a', a'', \ldots$ deviendra

$$(76)\qquad \alpha = hq_0 + hq_1 + hq_2 + \cdots + hq_{n-1} + n - 1 - hF_0 x + A;$$

maintenant on a

$$hr = hF_0 x + hFx = hF_0 x + \mu,$$

donc

$$(77)\qquad \mu = hr - hF_0 x,$$

et par conséquent

$$(78)\qquad \mu - \alpha = hr - (hq_0 + hq_1 + hq_2 + \cdots + hq_{n-1}) - n + 1 - A.$$

Mais comme on a (3)

$$r = \theta y' . \theta y'' \ldots \theta y^{(n)},$$

il est clair que

(79) $$hr = h\theta y' + h\theta y'' + \cdots + h\theta y^{(n)};$$

donc

(80) $$\mu - \alpha = h\theta y' + h\theta y'' + \cdots + h\theta y^{(n)} - (hq_0 + hq_1 + \cdots + hq_{n-1}) - n + 1 - A.$$

Ayant maintenant (2)

$$\theta y = q_0 + q_1 y + q_2 y^2 + \cdots + q_{n-1} y^{n-1},$$

on aura nécessairement, pour toutes les valeurs de m,

$$h\theta y > h(q_m y^m),$$

où le signe $>$ n'exclut pas l'égalité.

Donc en faisant

$$y = y', y'', y''', \ldots y^{(n)},$$

et remarquant que

$$h(q_m y^m) = hq_m + mhy,$$

on aura aussi

(81) $$h\theta y' > hq_m + mhy'; \; h\theta y'' > hq_m + mhy'', \ldots h\theta y^{(n)} > hq_m + mhy^{(n)}.$$

Cela posé, désignons par n', m', μ', k'; n'', m'', μ'', k''; etc. les mêmes choses que plus haut dans le numéro (5), et supposons que $h(q_{\varrho_1} y'^{\varrho_1})$ soit la plus grande des $n'\mu'$ quantités

$$h(q_{n-1} y'^{n-1}); \; h(q_{n-2} y'^{n-2}); \ldots h(q_{n-k'} y'^{n-k'}),$$

en sorte que

(82) $$hq_{\varrho_1} + \varrho_1 hy' > hq_{n-\beta-1} + (n-\beta-1) hy'.$$

En désignant, pour abréger, hq_m par fm, et mettant $\frac{m'}{\mu'}$ au lieu de hy', il est clair que cette formule donne

(83) $$f\varrho_1 - f(n-\beta-1) = (n-\beta-1-\varrho_1)\frac{m'}{\mu'} + \varepsilon'_\beta + A'_\beta$$

$$(\text{depuis } \beta = 0, \text{ jusqu'à } \beta = k'-1),$$

où A_β' est un nombre positif moindre que l'unité, et ε'_β un nombre entier positif, zéro y compris.

Soient de même



$$(84)\left\{\begin{array}{l}
f\varrho_2 - f(n-\beta-1) = (n-\beta-1-\varrho_2)\frac{m''}{\mu''} + \varepsilon_\beta'' + A_\beta'' \\
\qquad\qquad\text{(depuis } \beta = k',\text{ jusqu'à } \beta = k''-1), \\
f\varrho_3 - f(n-\beta-1) = (n-\beta-1-\varrho_3)\frac{m'''}{\mu'''} + \varepsilon_\beta''' + A_\beta''' \\
\qquad\qquad\text{(depuis } \beta = k'',\text{ jusqu'à } \beta = k'''-1), \\
\quad\text{etc.,} \\
f\varrho_m - f(n-\beta-1) = (n-\beta-1-\varrho_m)\frac{m^{(m)}}{\mu^{(m)}} + \varepsilon_\beta^{(m)} + A_\beta^{(m)} \\
\qquad\qquad\text{(depuis } \beta = k^{(m-1)},\text{ jusqu'à } \beta = k^{(m)}-1), \\
\quad\text{etc.,} \\
f\varrho_\varepsilon - f(n-\beta-1) = (n-\beta-1-\varrho_\varepsilon)\frac{m^{(\varepsilon)}}{\mu^{(\varepsilon)}} + \varepsilon_\beta^{(\varepsilon)} + A_\beta^{(\varepsilon)} \\
\qquad\qquad\text{(depuis } \beta = k^{(\varepsilon-1)},\text{ jusqu'à } \beta = n-1).
\end{array}\right.$$

A_β'', A_β''', ... $A_\beta^{(\varepsilon)}$ étant des nombres positifs et moindres que l'unité, et ε_β'', ε_β''', etc. des nombres entiers positifs, en y comprenant zéro.

Considérons l'une quelconque de ces équations, par exemple la $(m-1)^e$; en donnant à β les $k^{(m)}-k^{(m-1)}$ valeurs,

$$\beta = k^{(m-1)},\ k^{(m-1)}+1,\ k^{(m-1)}+2,\ \ldots\ k^{(m)}-1,$$

on obtiendra un nombre $k^{(m)}-k^{(m-1)}$ d'équations semblables; et en les ajoutant il viendra

$$(k^{(m)}-k^{(m-1)})\cdot\left(f\varrho_m + \varrho_m\frac{m^{(m)}}{\mu^{(m)}}\right) = \left\{\begin{array}{l}
\frac{1}{2}(2n-k^{(m)}-k^{(m-1)}-1)(k^{(m)}-k^{(m-1)})\frac{m^{(m)}}{\mu^{(m)}} \\
+A_0^{(m)} + A_1^{(m)} + \cdots + A^{(m)}_{k^{(m)}-k^{(m-1)}-1} \\
+\varepsilon_0^{(m)} + \varepsilon_1^{(m)} + \cdots + \varepsilon^{(m)}_{k^{(m)}-k^{(m-1)}-1} \\
+f(n-1-k^{(m-1)}) + f(n-2-k^{(m-1)}) + \cdots \\
\qquad + f(n-k^{(m)}).
\end{array}\right.$$

Or

$$k^{(m)}-k^{(m-1)} = n^{(m)}\mu^{(m)},$$

donc en substituant,

$$n^{(m)}\mu^{(m)}\left(f\varrho_m + \varrho_m\frac{m^{(m)}}{\mu^{(m)}}\right) = \left\{\begin{array}{l}
\frac{1}{2}(2n-k^{(m)}-k^{(m-1)}-1)\,n^{(m)}m^{(m)} \\
\qquad +A_0^{(m)} + A_1^{(m)} + \cdots + A^{(m)}_{n^{(m)}\mu^{(m)}-1} \\
\qquad +\varepsilon_0^{(m)} + \varepsilon_1^{(m)} + \cdots + \varepsilon^{(m)}_{n^{(m)}\mu^{(m)}-1} \\
\qquad +f(n-1-k^{(m-1)}) + \cdots + f(n-k^{(m)}).
\end{array}\right.$$

Or, en remarquant que $A_\beta^{(m)}$ est le nombre, moindre que l'unité, qui, ajouté à $(n-\beta-1-\varrho_m)\frac{m^{(m)}}{\mu^{(m)}}$, rend cette quantité égale à un nombre entier, on voit sans peine que la suite

$$A_0^{(m)}+A_1^{(m)}+\cdots+A^{(m)}_{n^{(m)}\mu^{(m)}-1},$$

qui est composée de $n^{(m)}\mu^{(m)}$ termes, contiendra $n^{(m)}$ fois la suite des nombres

$$\frac{0}{\mu^{(m)}},\ \frac{1}{\mu^{(m)}},\ \frac{2}{\mu^{(m)}},\ \ldots\ \frac{\mu^{(m)}-1}{\mu^{(m)}};$$

donc

$$(85)\qquad A_0^{(m)}+A_1^{(m)}+\cdots+A^{(m)}_{n^{(m)}\mu^{(m)}-1}=\frac{n^{(m)}(0+1+\cdots+\mu^{(m)}-1)}{\mu^{(m)}}$$
$$=\frac{n^{(m)}\mu^{(m)}(\mu^{(m)}-1)}{2\mu^{(m)}}=\tfrac{1}{2}n^{(m)}(\mu^{(m)}-1).$$

En substituant cette valeur, et faisant pour abréger,

$$\varepsilon_0^{(m)}+\varepsilon_1^{(m)}+\cdots+\varepsilon^{(m)}_{n^{(m)}\mu^{(m)}-1}=C_m,$$

il viendra

$$(86)\qquad n^{(m)}\mu^{(m)}\left(f\varrho_m+\varrho_m\frac{m^{(m)}}{\mu^{(m)}}\right)=\begin{cases}\tfrac{1}{2}(2n-k^{(m)}-k^{(m-1)}-1)n^{(m)}m^{(m)}\\ +\tfrac{1}{2}n^{(m)}(\mu^{(m)}-1)+C_m\\ +f(n-k^{(m-1)}-1)+\cdots+f(n-k^{(m)}).\end{cases}$$

Maintenant on a, en désignant $h\theta y^{(m)}$ par φm,

$$(87)\qquad \varphi(k^{(m-1)}+1)=\varphi(k^{(m-1)}+2)=\varphi(k^{(m-1)}+3)=\cdots=\varphi(k^{(m)});$$

en remarquant que $hy^{(m)}$ conserve la même valeur pour toutes les valeurs de m, de $k^{(m-1)}+1$ à $k^{(m)}$. Les inégalités (81) donneront donc

$$\varphi(k^{(m-1)}+1)+\varphi(k^{(m-1)}+2)+\varphi(k^{(m-1)}+3)+\cdots+\varphi(k^{(m)})$$
$$>\left(f\varrho_m+\varrho_m\frac{m^{(m)}}{\mu^{(m)}}\right)(k^{(m)}-k^{(m-1)})>n^{(m)}\mu^{(m)}\left(f\varrho_m+\varrho_m\frac{m^{(m)}}{\mu^{(m)}}\right),$$

donc on aura, en vertu de l'équation précédente,

$$\varphi(k^{(m-1)}+1)+(\varphi(k^{(m-1)}+2)+\varphi(k^{(m-1)}+3)+\cdots+\varphi(k^{(m)})$$
$$>\begin{cases}\tfrac{1}{2}n^{(m)}m^{(m)}(2n-k^{(m)}-k^{(m-1)}-1)+\tfrac{1}{2}n^{(m)}(\mu^{(m)}-1)+C_m\\ +f(n-k^{(m-1)}-1)+f(n-k^{(m-1)}-2)+\cdots+f(n-k^{(m)}).\end{cases}$$

En faisant dans cette formule successivement $m=1,2,3,\ldots.$ et puis ajoutant les équations qu'on obtiendra, il viendra

$$\varphi(1)+\varphi(2)+\varphi(3)+\cdots+\varphi(n)$$
$$>\left\{\begin{array}{l} f(n-1)+f(n-2)+f(n-3)+\cdots+f(1)+f(0) \\ +\frac{1}{2}n'm'(2n-k'-1)+\frac{1}{2}n'(\mu'-1)+C_1 \\ +\frac{1}{2}n''m''(2n-k''-k'-1)+\frac{1}{2}n''(\mu''-1)+C_2 \\ +\frac{1}{2}n'''m'''(2n-k'''-k''-1)+\frac{1}{2}n'''(\mu'''-1)+C_3 \\ +\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ +\frac{1}{2}n^{(\varepsilon)}m^{(\varepsilon)}(2n-k^{(\varepsilon)}-k^{(\varepsilon-1)}-1)+\frac{1}{2}n^{(\varepsilon)}(\mu^{(\varepsilon)}-1)+C_\varepsilon. \end{array}\right.$$

En substituant les valeurs des quantités k', k'', k''', ... savoir,

$$k'=n'\mu';\ k''=n'\mu'+n''\mu'';\ k'''=n'\mu'+n''\mu''+n'''\mu''', \text{ etc.,}$$

et pour n sa valeur (55)

$$n=n'\mu'+n''\mu''+\cdots+n^{(\varepsilon)}\mu^{(\varepsilon)},$$

on obtiendra

$$h\theta y'+h\theta y''+h\theta y'''+\cdots+h\theta y^{(n)}-(hq_0+hq_1+hq_2+\cdots+hq_{n-1})$$
$$>\gamma'+C_1+C_2+\cdots+C_\varepsilon,$$

où l'on a fait pour abréger

$$(88)\quad \gamma'=\left\{\begin{array}{l} n'm'\left(\frac{n'\mu'-1}{2}+n''\mu''+n'''\mu'''+\cdots+n^{(\varepsilon)}\mu^{(\varepsilon)}\right)+n'\frac{\mu'-1}{2} \\ +n''m''\left(\frac{n''\mu''-1}{2}+n'''\mu'''+n''''\mu''''+\cdots+n^{(\varepsilon)}\mu^{(\varepsilon)}\right)+n''\frac{\mu''-1}{2} \\ +\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ +n^{(\varepsilon-1)}m^{(\varepsilon-1)}\left(\frac{n^{(\varepsilon-1)}\mu^{(\varepsilon-1)}-1}{2}+n^{(\varepsilon)}\mu^{(\varepsilon)}\right)+n^{(\varepsilon-1)}\left(\frac{\mu^{(\varepsilon-1)}-1}{2}\right) \\ +n^{(\varepsilon)}m^{(\varepsilon)}\frac{n^{(\varepsilon)}\mu^{(\varepsilon)}-1}{2}+n^{(\varepsilon)}\frac{\mu^{(\varepsilon)}-1}{2}. \end{array}\right.$$

De cette formule combinée avec l'équation (80) on déduira

$$(89)\qquad \mu-\alpha>\gamma'-n+1-A+C_1+C_2+\cdots+C_\varepsilon.$$

Or, je remarque que le nombre $\gamma'-n+1$ est précisément égal à celui que nous avons désigné précédemment par γ, équation (62), donc

$$(90)\qquad \mu-\alpha>\gamma-A+C_1+C_2+\cdots+C_\varepsilon.$$

Cette formule nous montre que $\mu-\alpha$ ne peut être moindre que $\gamma-A$, or je dis qu'il peut être précisément égal à ce nombre.

En effet c'est ce qui arrive lorsqu'on a

$$(91)\qquad \begin{cases} \varphi k^{(m)} = f\varrho_m + \varrho_m \dfrac{m^{(m)}}{\mu^{(m)}}, \\ \text{et}\quad C_1 + C_2 + C_3 + \cdots + C_\varepsilon = 0; \end{cases}$$

or on peut démontrer de la manière suivante que ces équations pourront avoir lieu.

En se rappelant la valeur de C_m, il est clair que l'équation (91) entraîne la suivante:

$$\varepsilon_\beta^{(m)} = 0 \text{ (depuis } \beta = k^{(m-1)}, \text{ jusqu'à } \beta = k^{(m)} - 1);$$

donc en vertu des équations (83) et (84)

$$(92)\qquad f(n-\beta-1) = f\varrho_m - (n-\beta-1-\varrho_m)\frac{m^{(m)}}{\mu^{(m)}} - A_\beta^{(m)},$$
$$\text{(depuis } \beta = k^{(m-1)}, \text{ jusqu'à } \beta = k^{(m)} - 1).$$

Il s'agit maintenant de trouver la valeur de $f\varrho_m$.

Or l'équation (91) donne

$$(93)\ldots\qquad f\varrho_m + \varrho_m \frac{m^{(m)}}{\mu^{(m)}} > f\varrho_\alpha + \varrho_\alpha \frac{m^{(m)}}{\mu^{(m)}}$$

pour toutes les valeurs de m et de α.

De là on tire, en désignant pour abréger

$$(94)\qquad \frac{m^{(\alpha)}}{\mu^{(\alpha)}} \text{ par } \sigma_\alpha,$$

$$(95)\qquad f\varrho_m - f\varrho_\alpha > (\varrho_\alpha - \varrho_m)\sigma_m.$$

En faisant $m = \alpha - 1$, et changeant ensuite α en m, de même que α en $m-1$, on obtiendra les deux formules

$$(96)\qquad \begin{cases} f\varrho_m - f\varrho_{m-1} < (\varrho_{m-1} - \varrho_m)\sigma_{m-1}, \\ f\varrho_m - f\varrho_{m-1} > (\varrho_{m-1} - \varrho_m)\sigma_m. \end{cases}$$

Par là on voit que la différence entre la plus grande et la plus petite valeur de $f\varrho_m - f\varrho_{m-1}$ ne peut surpasser $(\varrho_{m-1} - \varrho_m)(\sigma_{m-1} - \sigma_m)$. Par conséquent on doit avoir

$$f\varrho_m - f\varrho_{m-1} = (\varrho_{m-1} - \varrho_m)\sigma_m + \theta_{m-1}(\varrho_{m-1} - \varrho_m)(\sigma_{m-1} - \sigma_m),$$

où θ_{m-1} est une quantité positive qui ne peut surpasser l'unité.

Cette équation peut s'écrire comme il suit:

$$(97)\qquad f\varrho_m - f\varrho_{m-1} = (\varrho_{m-1} - \varrho_m)[\theta_{m-1}\sigma_{m-1} + (1-\theta_{m-1})\sigma_m].$$

De là on tire sans peine

$$(98)\qquad f\varrho_m = \begin{cases} f\varrho_1 + (\varrho_1 - \varrho_2)[\theta_1\sigma_1 + (1-\theta_1)\sigma_2] \\ + (\varrho_2 - \varrho_3)[\theta_2\sigma_2 + (1-\theta_2)\sigma_3] + \cdots \\ \cdots + (\varrho_{m-1} - \varrho_m)[\theta_{m-1}\sigma_{m-1} + (1-\theta_{m-1})\sigma_m]. \end{cases}$$

Si $f\varrho_m$ a cette valeur, il n'est pas difficile de voir que la condition

$$f\varrho_m - f\varrho_\alpha > (\varrho_\alpha - \varrho_m)\sigma_m$$

est satisfaite pour toute valeur de α et m, quelle que soit la valeur de $f\varrho_1$ et celles des quantités $\theta_1, \theta_2, \cdots \theta_{m-1}$, pourvu qu'elles ne surpassent pas l'unité.

Connaissant ainsi la valeur de $f\varrho_m$, on aura celle de $f(n-\beta-1)$ par l'équation (92).

Après avoir de cette manière déterminé les valeurs de toutes les quantités $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $\ldots f(n-1)$, voyons à présent si elles satisfont en effet à l'équation (91)

$$\varphi k^{(m)} = f\varrho_m + \varrho_m \frac{m^{(m)}}{\mu^{(m)}} = f\varrho_m + \varrho_m\sigma_m.$$

Pour que cette équation ait lieu, il est nécessaire et il suffit que l'équation

$$(99)\qquad f\varrho_m + \varrho_m\sigma_m > f\alpha + \alpha\sigma_m$$

soit satisfaite pour toutes les valeurs de α et m. Il faut donc que

$$(100)\qquad P_m^{(\delta)} = f\varrho_m - f\alpha_\delta + (\varrho_m - \alpha_\delta)\sigma_m > 0.$$

Soit $\alpha_\delta = n - \beta - 1$, où β a une valeur quelconque comprise entre $k^{(\delta-1)}$ et $k^{(\delta)} - 1$ inclusivement, l'équation (92) donnera

$$f\alpha_\delta = f\varrho_\delta - (\alpha_\delta - \varrho_\delta)\sigma_\delta - A_\beta^{(\delta)};$$

et par conséquent

$$(101)\qquad P_m^{(\delta)} = f\varrho_m - f\varrho_\delta + (\varrho_m - \alpha_\delta)\sigma_m + (\alpha_\delta - \varrho_\delta)\sigma_\delta + A_\beta^{(\delta)}.$$

En mettant $m+1$ au lieu de m, il viendra

$$P_{m+1}^{(\delta)} - P_m^{(\delta)} = f\varrho_{m+1} - f\varrho_m + \varrho_{m+1}\sigma_{m+1} - \varrho_m\sigma_m + \alpha_\delta(\sigma_m - \sigma_{m+1}).$$

On a par l'équation (97)

$$f\varrho_{m+1} - f\varrho_m = (\varrho_m - \varrho_{m+1})[\theta_m\sigma_m + (1-\theta_m)\sigma_{m+1}];$$

donc, en substituant et réduisant,

$$(102)\qquad P_{m+1}^{(\delta)} - P_m^{(\delta)} = \Big(\alpha_\delta - [\varrho_m(1-\theta_m) + \varrho_{m+1}\theta_m]\Big)(\sigma_m - \sigma_{m+1});$$

or, en remarquant que α_δ est compris entre $n-1-k^{(\delta-1)}$ et $n-k^{(\delta)}$, que $\varrho_m(1-\theta_m)+\varrho_{m+1}\theta_m$ l'est entre ϱ_m et ϱ_{m+1}, c'est-à-dire entre $n-k^{(m-1)}-1$ et $n-k^{(m+1)}$, il est clair que le second membre de cette équation sera toujours positif si $m \overline{\gtrless} \delta+1$, et toujours négatif si $m \overline{\gtrless} \delta-2$.

De là il suit: 1° que $P_{m+1+\delta}>0$ si $P_{\delta+1}>0$; 2° que $P_{\delta-1-m}>0$ si $P_{\delta-1}>0$. Donc pour que $P_m^{(\delta)}$ soit positif pour toutes les valeurs de m, il suffit qu'il le soit pour $m=\delta+1$, δ, $\delta-1$.

Or, en faisant dans l'équation (102) $m=\delta$, $m=\delta-1$, il viendra

$$P_{\delta+1}^{(\delta)}-P_\delta^{(\delta)}=\Big(\alpha_\delta-[\varrho_\delta(1-\theta_\delta)+\varrho_{\delta+1}\theta_\delta]\Big)(\sigma_\delta-\sigma_{\delta+1}),$$

$$P_\delta^{(\delta)}-P_{\delta-1}^{(\delta)}=\Big(\alpha_\delta-[\varrho_{\delta-1}(1-\theta_{\delta-1})+\varrho_\delta\theta_{\delta-1}]\Big)(\sigma_{\delta-1}-\sigma_\delta).$$

Mais l'équation (101) donne pour $m=\delta$,

$$P_\delta^{(\delta)}=A_\beta^{(\delta)},$$

donc $P_\delta^{(\delta)}$ est toujours positif, et en substituant cette valeur, les deux équations précédentes donneront, en mettant $\delta+1$ au lieu de δ dans la dernière,

$$P_{\delta+1}^{(\delta)}=[\alpha_\delta-\varrho_\delta+\theta_\delta(\varrho_\delta-\varrho_{\delta+1})](\sigma_\delta-\sigma_{\delta+1})+A_\beta^{(\delta)},$$
$$P_\delta^{(\delta+1)}=[\varrho_\delta-\alpha_{\delta+1}-\theta_\delta(\varrho_\delta-\varrho_{\delta+1})](\sigma_\delta-\sigma_{\delta+1})+A_\beta^{(\delta+1)}.$$

De ces équations on tire (en remarquant qu'on doit avoir pour $P_{\delta+1}^{(\delta)}$ et $P_\delta^{(\delta+1)}$ des valeurs positives),

$$(103)\qquad\left\{\begin{aligned}\theta_\delta &> \frac{\varrho_\delta-\alpha_\delta}{\varrho_\delta-\varrho_{\delta+1}}-\frac{A_\beta{}^{(\delta)}}{(\varrho_\delta-\varrho_{\delta+1})(\sigma_\delta-\sigma_{\delta+1})}=B_\delta,\\ \theta_\delta &< \frac{\varrho_\delta-\alpha_{\delta+1}}{\varrho_\delta-\varrho_{\delta+1}}+\frac{A_\beta{}^{(\delta+1)}}{(\varrho_\delta-\varrho_{\delta+1})(\sigma_\delta-\sigma_{\delta+1})}=C_\delta,\end{aligned}\right.$$

Maintenant θ_δ est compris entre 0 et 1; par conséquent il faut que B_δ ne surpasse pas l'unité, et que C_δ soit positif. Or c'est ce qui a toujours lieu. En effet on trouve

$$1-B_\delta=\frac{\alpha_\delta-\varrho_{\delta+1}}{\varrho_\delta-\varrho_{\delta+1}}+\frac{A_\beta{}^{(\delta)}}{(\varrho_\delta-\varrho_{\delta+1})(\sigma_\delta-\sigma_{\delta+1})};$$

donc $1-B_\delta$ est toujours positif en remarquant que $\alpha_\delta>\varrho_{\delta+1}$; par conséquent B_δ ne peut surpasser l'unité. De même $\varrho_\delta>\alpha_{\delta+1}$; donc C_δ est toujours positif.

La condition

$$P_m^{(\delta)}>0$$

est donc satisfaite pour toute valeur de δ et m; d'où résulte l'équation

$$\varphi k^{(\delta)} = f\varrho_\delta + \varrho_\delta \frac{m^{(\delta)}}{\mu^{(\delta)}}.$$

On aura donc, comme on vient de le dire,

(104) $$\mu - \alpha = \gamma - A,$$

qui est la moindre valeur que peut avoir $\mu - \alpha$.

Si l'on suppose que tous les coefficients dans les fonctions $q_0, q_1, \ldots q_{n-1}$, soient des quantités indéterminées, alors $F_0 x = 1$, et par suite $A = 0$; donc dans ce cas

(105) $$\mu - \alpha = \gamma.$$

C'est ce qui a lieu généralement, car c'est seulement pour des fonctions d'une forme particulière que le nombre A a une valeur plus grande que zéro.

Dans ce qui précède nous avons supposé que tous les coefficients dans $q_0, q_1, \ldots q_{n-1}$, étaient indéterminés, excepté ceux qui sont déterminés par la condition que r ait pour diviseur la fonction $F_0 x$. Dans ce cas on a toujours, comme nous l'avons supposé plus haut (87),

$$\varphi(k^{(m-1)}+1) = \varphi(k^{(m-1)}+2) = \cdots = \varphi(k^{(m)}) = f\varrho_m + \varrho_m \sigma_m,$$

et par suite

(106) $$hr = \begin{cases} n'\mu'(f\varrho_1 + \varrho_1\sigma_1) + n''\mu''(f\varrho_2 + \varrho_2\sigma_2) + \cdots \\ \qquad\qquad + n^{(\varepsilon)}\mu^{(\varepsilon)}(f\varrho_\varepsilon + \varrho_\varepsilon\sigma_\varepsilon). \end{cases}$$

C'est la valeur de hr en général. Supposons maintenant que les quantités $a, a', a'', \ldots$ ne soient pas toutes indéterminées, mais qu'un certain nombre d'elles soient déterminées par la condition que la valeur de hr soit de A' unités moindre que la valeur précédente. En général, un nombre A' des quantités $a, a', a'', \ldots$ sera déterminé par cette condition, et alors $\mu - \alpha$ ne change pas de valeur; mais il est possible que, pour les fonctions d'une forme particulière, la condition dont il s'agit n'entraîne qu'un nombre moindre d'équations différentes entre $a, a', a'', \ldots$ Soit donc ce nombre $A' - B$, la valeur de $\mu - \alpha$ deviendra

$$(\mu - A') - [\alpha - (A' - B)] - A,$$

c'est-à-dire

(107) $$\mu - \alpha = \gamma - A - B.$$

8.

Pour donner un exemple de l'application de la théorie précédente, supposons que $n=13$, en sorte que y soit déterminé par l'équation

$$0=\left\{\begin{array}{l} p_0+p_1y+p_2y^2+p_3y^3+p_4y^4+p_5y^5+p_6y^6+p_7y^7 \\ \quad +p_8y^8+p_9y^9+p_{10}y^{10}+p_{11}y^{11}+p_{12}y^{12}+y^{13}, \end{array}\right.$$

et

$$\theta y=q_0+q_1y+q_2y^2+\cdots+q_{12}y^{12}.$$

Supposons que les degrés des fonctions entières

$$p_0, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7, p_8, p_9, p_{10}, p_{11}, p_{12},$$

soient respectivement

$$2,\ 3,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 3,\ 4,\ 2,\ 3,\ 4,\ 1,\ 1,$$

D'abord, il faut chercher les valeurs de hy', hy'', ... $hy^{(13)}$. Or, pour cela, il suffit de faire dans l'équation proposée,

$$y=Ax^m,$$

et de déterminer ensuite A et m de manière que l'équation soit satisfaite pour $x=\infty$.

On obtiendra l'équation

$$0=\left\{\begin{array}{l} A^{13}x^{13m}+B_{12}A^{12}x^{12m+1}+B_{11}A^{11}x^{11m+1}+B_{10}A^{10}x^{10m+4} \\ \qquad +\cdots+B_2A^2x^{2m+2}+B_1Ax^{m+3}+B_0x^2. \end{array}\right.$$

Pour y satisfaire il faut qu'un certain nombre des exposants soient égaux et en même temps plus grands que les autres, et que la somme des termes correspondants soit égale à zéro.

Or on trouve qu'en faisant

1° $13m=10m+4$, d'où $m=\frac{4}{3}$, les deux exposants $13m$, $10m+4$, seront les plus grands;

2° $10m+4=5m+5$, d'où $m=\frac{1}{5}$, $10m+4$, $5m+5$;

3° $5m+5=m+3$, d'où $m=-\frac{1}{2}$, $5m+5$, $m+3$,

4° $m+3=2$, d'où $m=-1$, $m+3$, 2.

On a donc

$$y=Ax^{\frac{4}{3}},\quad A^{13}+B_{10}A^{10}=0,$$

donc

$$A = -\sqrt[3]{B_{10}} \text{ et } hy' = hy'' = hy''' = \frac{m'}{\mu'} = \frac{4}{3}, \; n' = 1;$$

$$y = Ax^{\frac{1}{5}}, \; B_{10}A^{10} + B_5 A^5 = 0,$$

donc

$$A = -\sqrt[5]{\frac{B_5}{B_{10}}} \text{ et } hy^{(4)} = hy^{(5)} = hy^{(6)} = hy^{(7)} = hy^{(8)} = \frac{m''}{\mu''} = \frac{1}{5}, \; n'' = 1;$$

$$y = Ax^{-\frac{1}{2}}, \; B_5 A^5 + B_1 A = 0,$$

donc

$$A = \sqrt[4]{-\frac{B_1}{B_5}} \text{ et } hy^{(9)} = hy^{(10)} = hy^{(11)} = hy^{(12)} = \frac{m'''}{\mu'''} = \frac{-1}{2}, \; n''' = 2;$$

$$y = Ax^{-1}, \; B_1 A + B_0 = 0,$$

donc

$$A = -\frac{B_0}{B_1} \text{ et } hy^{(13)} = \frac{m''''}{\mu''''} = -1, \; n'''' = 1.$$

Ayant ainsi trouvé les valeurs des nombres m', μ', n', m'', μ'', n'', m''', μ''', n''', m'''', μ'''', n'''', on aura

$$k' = n'\mu' = 3, \; k'' = n'\mu' + n''\mu'' = 8, \; k''' = n'\mu' + n''\mu'' + n'''\mu''' = 12,$$
$$k'''' = n'\mu' + n''\mu'' + n'''\mu''' + n''''\mu'''' = 13 = n.$$

Maintenant le nombre ϱ_1 doit être compris entre $n-1$ et $n-k'$, ϱ_2 entre $n-k'-1$ et $n-k''$, etc.; donc on trouvera pour ces quantités, les valeurs suivantes:

$$\varrho_1 = 12, \; 11, \; 10, \quad \varrho_2 = 9, \; 8, \; 7, \; 6, \; 5, \quad \varrho_3 = 4, \; 3, \; 2, \; 1, \quad \varrho_4 = 0.$$

Connaissant ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3, ϱ_4, on aura A_β', A_β'', A_β''', A_β'''' par l'équation (92); ensuite θ_1, θ_2, θ_3, θ_4 par les équations (103); $f\varrho_2$, $f\varrho_3$, $f\varrho_4$ par l'équation (98); et enfin $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, ... $f(12)$ par l'équation (92).

La valeur de γ, qui est toujours la même, deviendra par l'équation (88) et la relation $\gamma = \gamma' - n + 1$,

$$\gamma = \left\{ \begin{array}{l} \quad 1.4.\left(\frac{3-1}{2} + 5 + 4 + 1\right) + 1.\frac{3-1}{2} \\ + 1.1.\left(\frac{5-1}{2} + 4 + 1\right) + 1.\frac{5-1}{2} \\ + 2.(-1).\left(\frac{4-1}{2} + 1\right) + 2.\frac{2-1}{2} \\ + 1.(-1).\left(\frac{1-1}{2}\right) + 1.\frac{1-1}{2} - 13 + 1, \end{array} \right.$$

c'est-à-dire, en réduisant,

$$\gamma = 38.$$

Pour pouvoir déterminer numériquement les valeurs de α et de μ, supposons, par exemple,

$$\varrho_1 = 11, \quad \varrho_2 = 6, \quad \varrho_3 = 4, \quad \varrho_4 = 0.$$

Alors l'équation (92) donnera les suivantes:

$$\begin{array}{llll}
f(12) = f(11) - \frac{4}{3} - A_0', & \text{donc} & A_0' = \frac{2}{3}, & f(12) = f(11) - 2 \\
f(10) = f(11) + \frac{4}{3} - A_2', & \text{donc} & A_2' = \frac{1}{3}, & f(10) = f(11) + 1 \\
f(9) = f(6) - \frac{3}{5} - A_3'', & \text{donc} & A_3'' = \frac{2}{5}, & f(9) = f(6) - 1 \\
f(8) = f(6) - \frac{2}{5} - A_4'', & \text{donc} & A_4'' = \frac{3}{5}, & f(8) = f(6) - 1 \\
f(7) = f(6) - \frac{1}{5} - A_5'', & \text{donc} & A_5'' = \frac{4}{5}, & f(7) = f(6) - 1 \\
f(5) = f(6) + \frac{1}{5} - A_7'', & \text{donc} & A_7'' = \frac{1}{5}, & f(5) = f(6) \\
f(3) = f(4) - \frac{1}{2} - A_9''', & \text{donc} & A_9''' = \frac{1}{2}, & f(3) = f(4) - 1 \\
f(2) = f(4) - 1 - A_{10}''', & \text{donc} & A_{10}''' = 0, & f(2) = f(4) - 1 \\
f(1) = f(4) - \frac{3}{2} - A_{11}''', & \text{donc} & A_{11}''' = \frac{1}{2}, & f(1) = f(4) - 2.
\end{array}$$

Pour trouver maintenant $f(0)$, $f(4)$, $f(6)$, $f(11)$, il faut chercher les limites de θ_1, θ_2, θ_3, θ_4.

Or les équations (103), qui déterminent ces limites, donnent

$$\theta_1 > \frac{11 - \alpha_1}{5} - \frac{3A_\beta'}{17}, \text{ d'où } \theta_1 > -\frac{1}{5} - \frac{2}{17}, \; 0, \; \frac{1}{5} - \frac{1}{17};$$

$$\theta_1 < \frac{11 - \alpha_2}{5} + \frac{3A_\beta''}{17}, \text{ d'où } \theta_1 < \frac{2}{5} + \frac{6}{5.17}, \; \frac{3}{5} + \frac{9}{5.17}, \; \frac{4}{5} + \frac{12}{5.17}, \; 1, \; \frac{6}{5} + \frac{3}{5.17}.$$

Il suit de là que

$$\theta_1 > \frac{12}{85}, \quad \theta_1 < \frac{8}{17}.$$

On trouve de la même manière

$$\theta_2 > \frac{5}{14}, \quad \theta_2 < 1, \quad \theta_3 > \frac{1}{2}, \quad \theta_3 < 1.$$

Maintenant l'équation (97) donne

$$f\varrho_m - f\varrho_{m-1} > (\varrho_{m-1} - \varrho_m)\left[\theta''_{m-1}\sigma_{m-1} + (1 - \theta''_{m-1})\sigma_m\right],$$
$$f\varrho_m - f\varrho_{m-1} < (\varrho_{m-1} - \varrho_m)\left[\theta'_{m-1}\sigma_{m-1} + (1 - \theta'_{m-1})\sigma_m\right],$$

où θ''_{m-1} est la plus petite et θ'_{m-1} la plus grande valeur de θ_{m-1}; donc on trouvera, en faisant,

$$m = 2,\ 3,\ 4,$$

$$f(6)-f(11) > 5.[\tfrac{12}{85}.\tfrac{4}{3}+(1-\tfrac{12}{85}).\tfrac{1}{5}]\ (=1+\tfrac{68}{85})$$
$$f(6)-f(11) < 5.[\tfrac{8}{17}.\tfrac{4}{3}+(1-\tfrac{8}{17}).\tfrac{1}{5}]\ (=3+\tfrac{2}{3})$$
$$f(4)-f(6) > 2.[\tfrac{5}{14}.\tfrac{1}{5}-(1-\tfrac{5}{14}).\tfrac{1}{2}]\ (=\ -\tfrac{1}{2})$$
$$f(4)-f(6) < 2.[\ 1\ .\tfrac{1}{5}-(1-\ 1\ ).\tfrac{1}{2}]\ (=\tfrac{2}{5}),$$
$$f(0)-f(4) > 4.[\ \tfrac{1}{2}\ .(-\tfrac{1}{2})+(1-\tfrac{1}{2}).(-1)]\ (=-3)$$
$$f(0)-f(4) < 4.[\ 1\ .(-\tfrac{1}{2})+(1-1).(-1)]\ (=-2);$$

donc on aura pour $f(6)-f(11)$, $f(4)-f(6)$, $f(0)-f(4)$, les valeurs suivantes:

$$f(6)-f(11)=2,\ 3,\ f(4)-f(6)=0,\ f(0)-f(4)=-3,\ -2;$$

d'où

$$f(6)=f(11)+2,\ f(11)+3,\ f(4)=f(11)+2,\ f(11)+3;$$
$$f(0)=f(11)-1,\ f(11),\ f(11)+1;$$
$$f(12)=f(11)-2;\ f(10)=f(11)+1;\ f(9)=f(11)+1,\ f(11)+2;$$
$$f(8)=f(11)+1,\ f(11)+2;\ f(7)=f(11)+1,\ f(11)+2;$$
$$f(5)=f(11)+2,\ f(11)+3;\ f(3)=f(11)+1,\ f(11)+2;$$
$$f(2)=f(11)+1,\ f(11)+2;\ f(1)=f(11),\ f(11)+1.$$

En exprimant donc toutes ces quantités par $f(12)$, on voit que les fonctions q_{12}, q_{11}, q_{10}, ... q_0, sont respectivement des degrés suivants

$$\overset{(12)}{\theta},\ \overset{(11)}{\theta+2},\ \overset{(10)}{\theta+3},\ \overset{(9)}{[\theta+3,\ \theta+4]},\ \overset{(8)}{[\theta+3,\ \theta+4]},\ \overset{(7)}{[\theta+3,\ \theta+4]},$$
$$\overset{(6)}{[\theta+4,\ \theta+5]},\ \overset{(5)}{[\theta+4,\ \theta+5]},\ \overset{(4)}{[\theta+4,\ \theta+5]},\ \overset{(3)}{[\theta+3,\ \theta+4]},$$
$$\overset{(2)}{[\theta+3,\ \theta+4]},\ \overset{(1)}{[\theta+2,\ \theta+3]},\ \overset{(0)}{\begin{bmatrix}\theta+1, & \theta+2\\ \theta+2, & \theta+3\end{bmatrix}},$$

où θ est le degré de la fonction q_{12}.

De là suit que

$$\alpha = f(0)+f(1)+\cdots+f(12)+12 = 13\theta+47,\ 13\theta+48,$$
$$13\theta+57,\ 13\theta+58,$$

et

$$\mu = n'\mu'\left(f\varrho_1 + \varrho_1\frac{m'}{\mu'}\right) + n''\mu''\left(f\varrho_2 + \varrho_2\frac{m''}{\mu''}\right)$$
$$+ n'''\mu'''\left(f\varrho_3 + \varrho_3\frac{m'''}{\mu'''}\right) + n''''\mu''''\left(f\varrho_4 + \varrho_4\frac{m''''}{\mu''''}\right)$$
$$= 3(f(11) + 11 \cdot \tfrac{4}{5}) + 5 \cdot (f(6) + 6 \cdot \tfrac{1}{5}) + 4\,(f(4) - 4 \cdot \tfrac{1}{2}) + 1 \cdot (f(0) - 0);$$

c'est-à-dire,

$$\mu = 13\theta + 85, \quad 13\theta + 86, \quad 13\theta + 95, \quad 13\theta + 96.$$

La valeur de $\mu - \alpha$ deviendra donc

$$\mu - \alpha = 38,$$

comme nous avons trouvé plus haut pour la valeur de γ.

9.

Par les équations (92) et (98) établies précédemment, on aura les valeurs de toutes les quantités $f(0)$, $f(1)$, $f(2) \ldots f(n-1)$, exprimées de la manière suivante:

(108) $$fm = f\varrho_1 + M_m,$$

où M_m est indépendant de $f\varrho_1$. Cette dernière quantité est entièrement arbitraire. Le nombre des coefficients dans q_0, q_1, $q_2 \ldots q_{n-1}$, sera donc égal à

(109) $$nf\varrho_1 + M_0 + M_1 + M_2 + \cdots + M_{n-1};$$

mais α, ou le nombre des quantités indéterminées a, a', $a'' \ldots$, est égal au nombre des coefficients déjà mentionnés diminué d'un certain nombre. On aura donc

(110) $$\alpha = nf\varrho_1 + M,$$

où M est indépendant de $f\varrho_1$.

De là il suit qu'on peut prendre α aussi grand qu'on voudra, le nombre $\mu - \alpha$ restant toujours le même.

L'équation (74) nous met donc en état d'exprimer une somme d'un nombre quelconque de fonctions données, de la forme ψx, par une somme d'un nombre déterminé de fonctions. Le dernier nombre peut toujours être supposé égal à γ, qui, en général, sera sa plus petite valeur.

De la formule (74) on peut en déduire une autre qui est plus générale encore, et dont elle est un cas particulier.

En effet, soient

(111) $$\psi_1 x_1 + \psi_2 x_2 + \cdots + \psi_\alpha x_\alpha = v - (\psi_{\alpha+1} x_{\alpha+1} + \psi_{\alpha+2} x_{\alpha+2} + \cdots + \psi_\mu x_\mu),$$
$$\psi_1' x_1' + \psi_2' x_2' + \cdots + \psi'_{\alpha'} x'_{\alpha'} = v' - (\psi'_{\alpha'+1} x'_{\alpha'+1} + \psi'_{\alpha'+2} x'_{\alpha'+2} + \cdots + \psi'_{\mu'} x'_{\mu'}),$$

où ψ_1', ψ_2', ... sont des fonctions semblables à ψ_1, ψ_2, ...

Supposons, ce qui est permis, que

$$x'_{\alpha'} = x_\mu,\ x'_{\alpha'-1} = x_{\mu-1},\ x'_{\alpha'-2} = x_{\mu-2},\ \ldots\ x'_{\alpha'-\mu+\alpha+1} = x_{\alpha+1},$$

et

$$\psi'_{\alpha'} x'_{\alpha'} = \psi_\mu x_\mu,\ \psi'_{\alpha'-1} x'_{\alpha'-1} = \psi_{\mu-1} x_{\mu-1},\ \ldots\ \psi'_{\alpha'-\mu+\alpha+1} x'_{\alpha'-\mu+\alpha+1} = \psi_{\alpha+1} x_{\alpha+1};$$

les équations précédentes donneront

$$\psi_1 x_1 + \psi_2 x_2 + \cdots + \psi_\alpha x_\alpha - \psi_1' x_1' - \psi_2' x_2' - \cdots - \psi'_{\alpha'-\mu+\alpha} x'_{\alpha'-\mu+\alpha} = v - v' + \psi'_{\alpha'+1} x'_{\alpha'+1} + \cdots + \psi'_{\mu'} x'_{\mu'};$$

donc en mettant V au lieu de $v - v'$, α' au lieu de $\alpha' - \mu + \alpha$,

$$\psi_1'',\ \psi_2'',\ \ldots\ \psi_k'' \text{ au lieu de } \psi'_{\alpha'+1},\ \psi'_{\alpha'+2},\ \ldots\ \psi'_{\mu'},$$
$$x_1'',\ x_2'',\ \ldots\ x_k'' \text{ au lieu de } x'_{\alpha'+1},\ x'_{\alpha'+2},\ \ldots\ x'_{\mu'},$$

et enfin k au lieu de $\mu' - \alpha'$, il viendra

(112) $$\psi_1 x_1 + \psi_2 x_2 + \cdots + \psi_\alpha x_\alpha - \psi_1' x_1' - \psi_2' x_2' - \cdots - \psi'_{\alpha'} x'_{\alpha'} = V + \psi_1'' x_1'' + \psi_2'' x_2'' + \psi_3'' x_3'' + \cdots + \psi_k'' x_k''.$$

Le nombre k, qui est égal à $\mu' - \alpha'$, est indépendant de α et α', qui sont des nombres quelconques.

Si l'on suppose

(113) $$x_1'' = c_1,\ x_2'' = c_2,\ \ldots\ x_k'' = c_k,$$

c_1, c_2, ... c_k étant des constantes, alors la formule (112) deviendra

(114) $$\psi_1 x_1 + \psi_2 x_2 + \cdots + \psi_\alpha x_\alpha - \psi_1' x_1' - \psi_2' x_2' - \cdots - \psi'_{\alpha'} x'_{\alpha'} = C + V,$$

où un nombre k des quantités x_1, x_2, ... x_α, x_1', x_2', ... $x'_{\alpha'}$ sont fonctions des autres, en vertu des équations (113). Il est clair qu'on peut prendre c_1, c_2, ... c_k de manière que C deviendra égal à zéro.

Supposons maintenant qu'on ait dans la formule précédente

$$(115)\quad \begin{cases} x_1 = x_2 = x_3 = \cdots = x_{\varepsilon_1} = z_1 \\ x_{\varepsilon_1+1} = x_{\varepsilon_1+2} = x_{\varepsilon_1+3} = \cdots = x_{\varepsilon_1+\varepsilon_2} = z_2, \\ x_{\varepsilon_1+\varepsilon_2+1} = x_{\varepsilon_1+\varepsilon_2+2} = \cdots = x_{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3} = z_3, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{\alpha-\varepsilon_m+1} = x_{\alpha-\varepsilon_m+2} = \cdots = x_\alpha = z_m, \\ \psi_1 = \psi_2 = \cdots = \psi_{\varepsilon_1} = \pi_1, \\ \psi_{\varepsilon_1+1} = \psi_{\varepsilon_1+2} = \cdots = \psi_{\varepsilon_1+\varepsilon_2} = \pi_2, \\ \psi_{\varepsilon_1+\varepsilon_2+1} = \psi_{\varepsilon_1+\varepsilon_2+2} = \cdots = \psi_{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3} = \pi_3, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \psi_{\alpha-\varepsilon_m+1} = \psi_{\alpha-\varepsilon_m+2} = \cdots = \psi_\alpha = \pi_m; \end{cases}$$

en sorte que

$$\alpha = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_m.$$

Supposons les mêmes choses relativement aux quantités $x'_1, x'_2, \ldots \psi'_1, \psi'_2, \ldots \alpha'$, en accentuant les lettres $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_m, z_1, z_2, \ldots z_m, \pi_1, \pi_2, \ldots \pi_m$ et m. Alors la formule (114) deviendra:

$$(116)\quad V = \begin{cases} \varepsilon_1\pi_1 z_1 + \varepsilon_2\pi_2 z_2 + \varepsilon_3\pi_3 z_3 + \cdots + \varepsilon_m\pi_m z_m - \varepsilon_1'\pi_1' z_1' \\ \qquad - \varepsilon_2'\pi_2' z_2' - \cdots - \varepsilon'_{m'}\pi'_{m'} z'_{m'}, \end{cases}$$

où un nombre k des fonctions $\pi_1 z_1, \pi_2 z_2, \ldots \pi_1' z_1', \ldots$ dépendent des formes et des valeurs des autres.

En divisant les deux membres de cette équation par un nombre quelconque A et désignant les nombres rationnels

$$\frac{\varepsilon_1}{A}, \frac{\varepsilon_2}{A}, \ldots \frac{\varepsilon_m}{A}, -\frac{\varepsilon_1'}{A}, -\frac{\varepsilon_2'}{A}, \ldots -\frac{\varepsilon'_{m'}}{A},$$

par $h_1, h_2, h_3, \ldots h_\alpha$, et mettant ψ au lieu de π, x au lieu de z, et v au lieu de $\frac{V}{A}$, il viendra:

$$(117)\qquad h_1\psi_1 x_1 + h_2\psi_2 x_2 + \cdots + h_\alpha\psi_\alpha x_\alpha = v,$$

où il est clair que $h_1, h_2, \ldots h_\alpha$ peuvent être des nombres rationnels quelconques, positifs ou négatifs.

En remarquant que k des quantités $x_1, x_2, \ldots x_\alpha$ sont déterminées en fonctions des autres, on peut écrire cette formule comme il suit:

$$(118)\qquad h_1\psi_1 x_1 + h_2\psi_2 x_2 + \cdots + h_m\psi_m x_m \\ = v + k_1\psi_1' x_1' + k_2\psi_2' x_2' + \cdots + k_k\psi_k' x_k',$$

$$h_1, h_2, \ldots h_m, k_1, k_2, \ldots k_k$$

étant des nombres *rationnels* quelconques;

$$x_1,\ x_2,\ \ldots x_m$$

étant des quantités indéterminées en nombre arbitraire;

$$x_1',\ x_2',\ \ldots x_k'$$

étant des fonctions de ces quantités, qui peuvent se trouver algébriquement, et k étant un nombre indépendant de m.

Si l'on prend, par exemple,

$$k_1 = k_2 = \cdots = k_k = 1,$$

on aura la formule

(119) $$h_1 \psi_1 x_1 + h_2 \psi_2 x_2 + \cdots + h_m \psi_m x_m = v + \psi_1' x_1' + \psi_2' x_2' + \cdots + \psi_k' x_k'.$$

10.

Après avoir ainsi, dans ce qui précède, considéré les fonctions en général, je vais maintenant appliquer la théorie à une classe de fonctions qui méritent une attention particulière. Ce sont les fonctions de la forme

(120) $$\int f(x, y)\, dx,$$

où y est donné par l'équation

(121) $$\chi y = y^n + p_0 = 0,$$

p_0 étant une fonction entière de x.

Quelle que soit la fonction entière p_0, on peut toujours supposer

(122) $$-p_0 = r_1^{\mu_1} r_2^{\mu_2} r_3^{\mu_3} \ldots r_\varepsilon^{\mu_\varepsilon},$$

où $\mu_1,\ \mu_2,\ \ldots \mu_\varepsilon$ sont des nombres entiers et positifs, et $r_1,\ r_2,\ \ldots r_\varepsilon$ des fonctions entières qui n'ont point de facteurs égaux.

En substituant cette expression de $-p_0$ dans l'équation (121), on en tirera la valeur de y, savoir:

(123) $$y = r_1^{\frac{\mu_1}{n}} r_2^{\frac{\mu_2}{n}} r_3^{\frac{\mu_3}{n}} \ldots r_\varepsilon^{\frac{\mu_\varepsilon}{n}}.$$

Si l'on désigne cette valeur de y par R, et par $1,\ \omega,\ \omega^2,\ \ldots \omega^{n-1}$ les n racines de l'équation $\omega^n - 1 = 0$, les n valeurs de y seront

(124) $$R,\ \omega R,\ \omega^2 R,\ \omega^3 R,\ \ldots \omega^{n-1} R;$$

on aura, par conséquent,

(125) $$r=\theta y'.\theta y''\ldots\theta y^{(n)}=(q_0+q_1R+q_2R^2+\cdots+q_{n-1}R^{n-1})$$
$$\times(q_0+\omega q_1R+\omega^2q_2R^2+\cdots+\omega^{n-1}q_{n-1}R^{n-1})$$
$$\times(q_0+\omega^2q_1R+\omega^4q_2R^2+\cdots+\omega^{2n-2}q_{n-1}R^{n-1})$$
$$\times(q_0+\omega^3q_1R+\omega^6q_2R^2+\cdots+\omega^{3n-3}q_{n-1}R^{n-1})$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\times(q_0+\omega^{n-1}q_1R+\omega^{2n-2}q_2R^2+\cdots+\omega^{(n-1)^2}q_{n-1}R^{n-1});$$

attendu que

(126) $$\begin{cases}\theta y'=q_0+q_1R+q_2R^2+\cdots+q_{n-1}R^{n-1},\\ \theta y''=q_0+\omega q_1R+\omega^2q_2R^2+\cdots+\omega^{n-1}q_{n-1}R^{n-1},\\ \theta y'''=q_0+\omega^2q_1R+\omega^4q_2R^2+\cdots+\omega^{2n-2}q_{n-1}R^{n-1},\\ \text{etc., etc.}\end{cases}$$

Cela posé, soit

(127) $$f(x,y)=\frac{f_1(x,y)}{f_2x.\chi'y},$$

et supposons

$$f_1(x,y)=nf_3x.y^{n-m-1},$$

où f_2x et f_3x sont deux fonctions entières de x; alors on aura, en vertu de l'équation $\chi y=y^n+p_0$, qui donne $\chi'y=ny^{n-1}$,

(128) $$f(x,y)=\frac{f_3x}{f_2x.y^m};$$

d'où

(129) $$\psi x=\int\frac{f_3x.dx}{y^mf_2x}.$$

L'une quelconque des valeurs de y est de la forme ω^eR, donc

(130) $$\psi x=\omega^{-em}\int\frac{f_3x.dx}{R^mf_2x}.$$

En indiquant donc par ψx la fonction $\int\frac{f_3x.dx}{R^mf_2x}$, toutes les fonctions $\psi_1x,\ \psi_2x\ \ldots\ \psi_\mu x$ seront de la forme $\omega^{-em}\psi x$. Soient donc

(131) $$\psi_1x=\omega^{-e_1m}\psi x,\quad \psi_2x=\omega^{-e_2m}\psi x,\quad\ldots\quad \psi_\mu x=\omega^{-e_\mu m}\psi x,$$

où

$$\psi x=\int\frac{f_3x.dx}{R^mf_2x}.$$

Maintenant les équations (38) donnent pour φx et φ_1x les expressions suivantes:

$$\varphi x = \Sigma \frac{f_3 x}{f_2 x \cdot y^m} \log \theta y, \quad \varphi_1 x = \frac{F_2 x}{\theta_1^{(\nu)} x} \Sigma \frac{f_3 x}{y^m} \log \theta y,$$

c'est-à-dire

$$\varphi x = \frac{f_3 x}{f_2 x} \Sigma \frac{\log \theta y}{y^m}, \quad \varphi_1 x = \frac{F_2 x \cdot f_3 x}{\theta_1^{(\nu)} x} \Sigma \frac{\log \theta y}{y^m},$$

où il est clair que

$$\Sigma \frac{\log \theta y}{y^m} = \frac{\log \theta R}{R^m} + \omega^{-m} \frac{\log \theta(\omega R)}{R^m} + \cdots + \omega^{-(n-1)m} \frac{\log \theta(\omega^{n-1} R)}{R^m},$$

ou bien

$$\Sigma \frac{\log \theta y}{y^m} = \frac{1}{R^m} \left\{ \begin{array}{l} \log \theta R + \omega^{-m} \log \theta(\omega R) + \omega^{-2m} \log \theta(\omega^2 R) \\ + \cdots + \omega^{-(n-1)m} \log \theta(\omega^{n-1} R). \end{array} \right\}$$

En faisant donc, pour abréger,

(132) $$\varphi_2 x = \frac{f_3 x}{R^m} \left\{ \begin{array}{l} \log \theta R + \omega^{-m} \log \theta(\omega R) + \omega^{-2m} \log \theta(\omega^2 R) \\ + \cdots + \omega^{-(n-1)m} \log \theta(\omega^{n-1} R) \end{array} \right\}$$

on aura

(133) $$\varphi x = \frac{\varphi_2 x}{f_2 x}, \quad \varphi_1 x = \frac{F_2 x}{\theta_1^{(\nu)} x} \varphi_2 x.$$

La formule (41) deviendra donc

(134) $$\omega^{-\varepsilon_1 m} \psi x_1 + \omega^{-\varepsilon_2 m} \psi x_2 + \cdots + \omega^{-\varepsilon_\mu m} \psi x_\mu$$
$$= C - \Pi \frac{\varphi_2 x}{f_2 x} + \Sigma \nu \frac{d^{\nu-1}}{d\beta^{\nu-1}} \left(\frac{F_2 \beta \cdot \varphi_2 \beta}{\theta_1^{(\nu)} \beta} \right).$$

Les équations

$$\theta y_1 = 0, \ \theta y_2 = 0, \ \ldots \ \theta y_\mu = 0,$$

qui ont lieu entre les quantités $a, a', a'', \ldots x_1, x_2, \ldots x_\mu, y_1, y_2, \ldots y^\mu$, peuvent, dans les cas que nous considérons, s'écrire comme il suit:

$$\theta(x_1, \omega^{\varepsilon_1} R_1) = 0, \quad \theta(x_2, \omega^{\varepsilon_2} R_2) = 0, \quad \theta(x_3, \omega^{\varepsilon_3} R_3) = 0,$$
$$\ldots \ \theta(x_\mu, \omega^{\varepsilon_\mu} R_\mu) = 0,$$

où

$$\theta(x, y) = q_0 + q_1 y + q_2 y^2 + \cdots + q_{n-1} y^{n-1},$$

et $R_1, R_2, R_3, \ldots R_\mu$ désignent les valeurs de R pour $x = x_1, x_2, x_3, \ldots x_\mu$.

Cela posé, supposons d'abord que tous les coefficients dans $q_0, q_1, \ldots q_{n-1}$ soient des quantités indéterminées, en sorte que le nombre des quantités $a, a', a'', \ldots$ serait

(135) $$\alpha = hq_0 + hq_1 + hq_2 + \cdots + hq_{n-1} + n - 1,$$

et cherchons la plus petite valeur de $\mu - \alpha$.

Comme toutes les fonctions y', y'', y''', ... $y^{(n)}$ sont du même degré, on aura

$$hy' = hy'' = hy''' = \cdots = hy^{(n)} = \frac{m'}{\mu'};$$

par conséquent

$$\varepsilon = 1, \quad n = n'\mu' = k'.$$

L'équation (92) donne donc

(136) $$fm = f\varrho_1 + (\varrho_1 - m)\frac{m'}{\mu'} - A_m',$$

où m est un nombre entier quelconque depuis zéro jusqu'à $n-1$, et A_m' une quantité positive moindre que l'unité.

On a de même par (106)

$$\mu = hr = n'\mu'\left(f\varrho_1 + \varrho_1\frac{m'}{\mu'}\right),$$

donc

(137) $$\mu = nf\varrho_1 + n'm'\varrho_1,$$

et par l'équation (62) la valeur de γ, qui sera celle de $\mu - \alpha$, savoir:

(138) $$\mu - \alpha = \gamma = n'\mu'\frac{n'm'-1}{2} - n'\frac{m'+1}{2} + 1,$$

ou bien en remarquant que $n = n'\mu'$, $n'm' = nhR$:

(139) $$\mu - \alpha = \gamma = \frac{n-1}{2}n.hR - \frac{n+n'}{2} + 1.$$

C'est là la moindre valeur de $\mu - \alpha$ lorsque toutes les quantités a, a', a'', ... sont indéterminées; mais dans le cas qui nous occupe, on peut rendre ce nombre beaucoup plus petit en déterminant convenablement quelques-unes des quantités a, a', a'', ...

Désignons, pour abréger, par EA le plus grand nombre entier contenu dans un nombre quelconque A, et par εA le reste, on aura:

(140) $$A = EA + \varepsilon A,$$

où il est clair que εA est positif et plus petit que l'unité.

Cela posé, soient

(141) $$\theta_m = E\frac{\mu_m}{n} + E\frac{2\mu_m}{n} + E\frac{3\mu_m}{n} + \cdots + E\frac{(n-1)\mu_m}{n},$$

et

(142) $$\delta_{m,\pi} = \theta_m - E\left(\frac{\pi\mu_m}{n} - \frac{\alpha_m}{n}\right),$$

où m est l'un quelconque des nombres $1, 2, 3, \ldots \varepsilon$, π un des nombres $0, 1, 2, \ldots n-1$, et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\varepsilon$ des nombres entiers positifs.

Supposons

$$(143) \qquad q_\pi = v_\pi r_1^{\delta_{1,\pi}} r_2^{\delta_{2,\pi}} \ldots r_\varepsilon^{\delta_{\varepsilon,\pi}},$$

v_π étant une fonction entière de x.

De là on tire

$$q_\pi R^\pi = v_\pi r_1^{\frac{\pi\mu_1}{n}+\delta_{1,\pi}} r_2^{\frac{\pi\mu_2}{n}+\delta_{2,\pi}} \ldots r_\varepsilon^{\frac{\pi\mu_\varepsilon}{n}+\delta_{\varepsilon,\pi}};$$

or

$$\frac{\pi\mu_m}{n} + \delta_{m,\pi} = \frac{\pi\mu_m}{n} + \theta_m - E\left(\frac{\pi\mu_m}{n} - \frac{\alpha_m}{n}\right);$$

mais en vertu de l'équation (140),

$$E\left(\frac{\pi\mu_m}{n} - \frac{\alpha_m}{n}\right) = \frac{\pi\mu_m}{n} - \frac{\alpha_m}{n} - \varepsilon\left(\frac{\pi\mu_m - \alpha_m}{n}\right),$$

donc en substituant:

$$(144) \qquad \frac{\pi\mu_m}{n} + \delta_{m,\pi} = \theta_m + \frac{\alpha_m}{n} + \varepsilon\,\frac{\pi\mu_m - \alpha_m}{n};$$

en faisant donc, pour abréger,

$$(145) \qquad \varepsilon\,\frac{\pi\mu_m - \alpha_m}{n} = k_{m,\pi},$$

on aura

$$(146) \qquad q_\pi R^\pi = v_\pi r_1^{\theta_1+\frac{\alpha_1}{n}} r_2^{\theta_2+\frac{\alpha_2}{n}} \ldots r_\varepsilon^{\theta_\varepsilon+\frac{\alpha_\varepsilon}{n}} \times r_1^{k_{1,\pi}} r_2^{k_{2,\pi}} \ldots r_\varepsilon^{k_{\varepsilon,\pi}},$$

ou bien en faisant

$$(147) \qquad r_1^{k_{1,\pi}} r_1^{k_{2,\pi}} r_3^{k_{3,\pi}} \ldots r_\varepsilon^{k_{\varepsilon,\pi}} = R^{(\pi)}:$$

$$(148) \qquad q_\pi R^\pi = v_\pi r_1^{\theta_1+\frac{\alpha_1}{n}} r_2^{\theta_2+\frac{\alpha_2}{n}} \ldots r_\varepsilon^{\theta_\varepsilon+\frac{\alpha_\varepsilon}{n}} R^{(\pi)}.$$

Par là il est évident qu'on aura

$$(149) \qquad \left\{ \begin{aligned} & q_0 + q_1 R + q_2 R^2 + \cdots + q_\pi R^\pi + \cdots + q_{n-1} R^{n-1} \\ & = (v_0 R^{(0)} + v_1 R^{(1)} + v_2 R^{(2)} + \cdots + v_\pi R^{(\pi)} + \cdots + v_{n-1} R^{(n-1)}) \\ & \qquad \times r_1^{\theta_1+\frac{\alpha_1}{n}} r_2^{\theta_2+\frac{\alpha_2}{n}} \ldots r_\varepsilon^{\theta_\varepsilon+\frac{\alpha_\varepsilon}{n}}; \end{aligned} \right.$$

et en général (126)

(150) $$\begin{cases} \theta y^{(e)} = q_0 + \omega^e q_1 R + \omega^{2e} q_2 R^2 + \cdots + \omega^{(n-1)e} q_{n-1} R^{n-1}, \\ \quad = (v_0 R^{(0)} + \omega^e v_1 R^{(1)} + \omega^{2e} v_2 R^{(2)} + \cdots + \omega^{(n-1)e} v_{n-1} R^{(n-1)}) \\ \qquad \times r_1^{\theta_1 + \frac{\alpha_1}{n}} r_2^{\theta_2 + \frac{\alpha_2}{n}} \cdots r_\varepsilon^{\theta_\varepsilon + \frac{\alpha_\varepsilon}{n}}; \end{cases}$$

Soit, pour abréger,

(151) $$v_0 R^{(0)} + \omega^e v_1 R^{(1)} + \omega^{2e} v_2 R^{(2)} + \cdots + \omega^{(n-1)e} v_{n-1} R^{(n-1)} = \theta'(x, e),$$

il est clair que

(152) $$\begin{aligned} r &= \theta y' . \theta y'' \ldots \theta y^{(n)} \\ &= \theta'(x,0)\,\theta'(x,1)\,\theta'(x,2) \ldots \theta'(x,n-1)\, r_1^{n\theta_1+\alpha_1} r_2^{n\theta_2+\alpha_2} \ldots r_\varepsilon^{n\theta_\varepsilon+\alpha_\varepsilon}; \end{aligned}$$

donc en supposant que tous les coefficients dans $v_0, v_1, \ldots v_{n-1}$ soient des quantités indéterminées, on aura

(153) $$\begin{aligned} F_0 x &= r_1^{n\theta_1+\alpha_1} r_2^{n\theta_2+\alpha_2} \ldots r_\varepsilon^{n\theta_\varepsilon+\alpha_\varepsilon}, \\ F x &= \theta'(x,0)\,\theta'(x,1)\,\theta'(x,2) \ldots \theta'(x,n-1). \end{aligned}$$

Maintenant l'équation (19) donne, en substituant les valeurs de $f_1(x,y) = n f_3 x . y^{n-m-1}$ et de $\chi' y = n y^{n-1}$,

$$Rx = \Sigma \frac{f_3 x}{y^m} \frac{r . \delta\theta y}{\theta y};$$

or, par l'équation (150),

$$\frac{\delta\theta y^{(e)}}{\theta y^{(e)}} = \frac{\delta\theta'(x,e)}{\theta'(x,e)},$$

donc, en substituant et mettant au lieu de r sa valeur,

$$r = F_0 x . F x:$$

(154) $$Rx = F_0 x\, \Sigma \frac{f_3 x}{y^m} \frac{F x . \delta\theta'(x,e)}{\theta'(x,e)},$$

où

$$y = y^{(e)};$$

or, on a par (123)

$$y^m = r_1^{\frac{m\mu_1}{n}} r_2^{\frac{m\mu_2}{n}} \ldots r^{\frac{m\mu_\varepsilon}{n}},$$

donc

(155) $$y^m = r_1^{E\frac{m\mu_1}{n}} r_2^{E\frac{m\mu_2}{n}} \ldots r_\varepsilon^{E\frac{m\mu_\varepsilon}{n}} \times r_1^{\varepsilon\frac{m\mu_1}{n}} r_2^{\varepsilon\frac{m\mu_2}{n}} \ldots r_\varepsilon^{\varepsilon\frac{m\mu_\varepsilon}{n}};$$

en faisant donc pour abréger

(156) $$s_m = r_1^{\varepsilon\frac{m\mu_1}{n}} r_2^{\varepsilon\frac{m\mu_2}{n}} \ldots r_\varepsilon^{\varepsilon\frac{m\mu_\varepsilon}{n}},$$

et posant ensuite

(157) $$f_3x = fx \, . \, r_1^{E\frac{m\mu_1}{n}} r_2^{E\frac{m\mu_2}{n}} \dots r_\varepsilon^{E\frac{m\mu_\varepsilon}{n}},$$

on aura

$$\frac{f_3x}{y^m} = \frac{fx}{s_m};$$

donc

$$\frac{f_3x}{(y^{(e)})^m} = \omega^{-em} \frac{fx}{s_m},$$

et par conséquent la valeur de Rx deviendra

(158) $$Rx = \frac{fx \, . \, F_0x}{s_m} \Sigma \omega^{-em} \frac{Fx}{\theta'(x,e)} \delta\theta'(x,e)$$

$$= \frac{F_0x \, . \, fx}{s_m} \left\{ \begin{array}{l} \frac{Fx}{\theta'(x,0)} \delta\theta'(x,0) + \omega^{-m} \frac{Fx}{\theta'(x,1)} \delta\theta'(x,1) + \omega^{-2m} \frac{Fx}{\theta'(x,2)} \delta\theta'(x,2) \\ \quad + \dots + \omega^{-(n-1)m} \frac{Fx}{\theta'(x,n-1)} \delta\theta'(x,n-1) \end{array} \right\}.$$

Maintenant il est clair que

$$\frac{Fx}{\theta'(x,0)} \delta\theta'(x,0),$$

qui est égal à (153)

$$\theta'(x,1)\,\theta'(x,2) \dots \theta'(x,n-1)\,\delta\theta'(x,0)$$

et par conséquent une fonction entière de x et de $R^{(0)}$, $R^{(1)}$, ... $R^{(n-1)}$, peut être mise sous la forme

$$M_0 + M_1 s_1 + M_2 s_2 + \dots + M_m s_m + \dots + M_{n-1} s_{n-1},$$

où M_0, M_1, ... M_{n-1} sont des fonctions entières de x.

De là il suit que la fonction Rx, qui doit être entière, sera égale à

$$nF_0x \, . \, fx \, . \, M_m.$$

La fonction F_0x est donc un facteur de Rx, et par conséquent

(159) $$Rx = F_0x \, . \, R_1x.$$

Par là il est clair, en vertu des équations (23), (25) et (35), qu'on aura

(160) $$F_2x = 1, \quad \theta_1 x = f_2 x.$$

Cela posé, la valeur (132) de $\varphi_2 x$ deviendra, en mettant $\frac{fx}{s_m}$ au lieu

de $\frac{f_3 x}{R^m}$, substituant les valeurs de $\theta(R)$, $\theta(\omega R)$, etc., données par l'équation (150), en remarquant que

$$1+\omega^{-m}+\omega^{-2m}+\cdots+\omega^{-(n-1)m}=0:$$

$$(161)\qquad \varphi_2 x=\frac{fx}{s_m}\left\{\begin{array}{l}\log\theta'(x,0)+\omega^{-m}\log\theta'(x,1)+\omega^{-2m}\log\theta'(x,2)\\ \qquad\qquad+\cdots+\omega^{-(n-1)m}\log\theta'(x,n-1)\end{array}\right\},$$

et les valeurs (133) de φx et $\varphi_1 x$:

$$\varphi x=\frac{\varphi_2 x}{f_2 x},\quad \varphi_1 x=\frac{\varphi_2 x}{f_2^{(\nu)} x},$$

et par suite la formule (134) donnera

$$(162)\qquad \omega^{-\varepsilon_1 m}\psi x_1+\omega^{-\varepsilon_2 m}\psi x_2+\cdots+\omega^{-\varepsilon_\mu m}\psi x_\mu$$
$$=C-\Pi\frac{\varphi_2 x}{f_2 x}+\Sigma\nu\frac{d^{\nu-1}}{d\beta^{\nu-1}}\left\{\frac{\varphi_2\beta}{f_2^{(\nu)}\beta}\right\};$$

on a

$$f_2 x=(x-\beta_1)^{\nu_1}(x-\beta_2)^{\nu_2}\ldots(x-\beta_k)^{\nu_k}.$$

Il nous reste à trouver la valeur de μ et le nombre des quantités indéterminées; or, on a par l'équation (153)

$$(163)\qquad hF_0 x=(n\theta_1+\alpha_1)hr_1+(n\theta_2+\alpha_2)hr_2+\cdots+(n\theta_\varepsilon+\alpha_\varepsilon)hr_\varepsilon;$$

mais

$$hr=nf\varrho_1+n'm'\varrho_1,$$

donc

$$\mu=nf\varrho_1+n'm'\varrho_1-[(n\theta_1+\alpha_1)hr_1+(n\theta_2+\alpha_2)hr_2+\cdots+(n\theta_\varepsilon+\alpha_\varepsilon)hr_\varepsilon];$$

or

$$n'm'=n\,.\,hR=n\left(\frac{\mu_1}{n}hr_1+\frac{\mu_2}{n}hr_2+\cdots+\frac{\mu_\varepsilon}{n}hr_\varepsilon\right)$$
$$=\mu_1 hr_1+\mu_2 hr_2+\cdots+\mu_\varepsilon hr_\varepsilon,$$

donc en substituant,

$$(164)\qquad \mu=\left\{\begin{array}{l}nf\varrho_1+(\mu_1\varrho_1-n\theta_1-\alpha_1)hr_1\\ +(\mu_2\varrho_1-n\theta_2-\alpha_2)hr_2+\cdots+(\mu_\varepsilon\varrho_1-n\theta_\varepsilon-\alpha_\varepsilon)hr_\varepsilon.\end{array}\right.$$

Maintenant l'équation (143) donne

$$(165)\qquad hq_\pi=f\pi=\delta_{1,\pi}.hr_1+\delta_{2,\pi}.hr_2+\cdots+\delta_{\varepsilon,\pi}.hr_\varepsilon+hv_\pi,$$

donc, en écrivant ϱ au lieu de ϱ_1,

$$\mu=nhv_\varrho+(n\delta_{1,\varrho}-n\theta_1+\varrho\mu_1-\alpha_1)hr_1+(n\delta_{2,\varrho}-n\theta_2+\varrho\mu_2-\alpha_2)hr_2+\cdots;$$

mais en vertu de (144) on aura

$$n\delta_{m,\varrho} - n\theta_m + \varrho\mu_m - \alpha_m = n\,.\,\varepsilon\frac{\varrho\mu_m - \alpha_m}{n},$$

donc

$$(166)\quad \mu = nhv_\varrho + n\,.\,\varepsilon\frac{\varrho\mu_1 - \alpha_1}{n}hr_1 + n\,.\,\varepsilon\frac{\varrho\mu_2 - \alpha_2}{n}hr_2 + \cdots + n\,.\,\varepsilon\frac{\varrho\mu_\varepsilon - \alpha_\varepsilon}{n}hr_\varepsilon.$$

Cherchons maintenant la valeur de α ou le nombre des indéterminées. On a

$$\alpha = hv_0 + hv_1 + hv_2 + \cdots + hv_{n-1} + n - 1,$$

donc en vertu de (165)

$$(167)\quad \alpha = \left\{\begin{array}{l} hq_0 + hq_1 + hq_2 + \cdots + hq_{n-1} + n - 1 \\ -(\delta_{1,0} + \delta_{1,1} + \delta_{1,2} + \cdots + \delta_{1,n-1})hr_1 \\ -(\delta_{2,0} + \delta_{2,1} + \delta_{2,2} + \cdots + \delta_{2,n-1})hr_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ -(\delta_{\varepsilon,0} + \delta_{\varepsilon,1} + \delta_{\varepsilon,2} + \cdots + \delta_{\varepsilon,n-1})hr_\varepsilon. \end{array}\right.$$

On a d'après (136) et (85)

$$(168)\quad hq_0 + hq_1 + \cdots + hq_{n-1}$$
$$= n.hq_\varrho + [\varrho + (\varrho - 1) + \cdots + (\varrho - n + 1)]\frac{m'}{\mu'} - (A_0' + A_1' + \cdots + A'_{n-1})$$
$$= n(hv_\varrho + \delta_{1,\varrho}hr_1 + \delta_{2,\varrho}hr_2 + \cdots + \delta_{\varepsilon,\varrho}hr_\varepsilon) + \left(n\varrho - \frac{n(n-1)}{2}\right)\frac{m'}{\mu'} - \frac{n'(\mu'-1)}{2},$$

et d'après (142)

$$(169)\quad \delta_{m,0} + \delta_{m,1} + \cdots + \delta_{m,n-1} = n\theta_m$$
$$-\left(E\frac{-\alpha_m}{n} + E\frac{\mu_m - \alpha_m}{n} + E\frac{2\mu_m - \alpha_m}{n} + \cdots + E\frac{(n-1)\mu_m - \alpha_m}{n}\right).$$

En désignant le second membre par

$$n\theta_m - P_m,$$

on aura

$$P_m = \left\{\begin{array}{l} \frac{-\alpha_m}{n} + \frac{\mu_m - \alpha_m}{n} + \frac{2\mu_m - \alpha_m}{n} + \cdots + \frac{(n-1)\mu_m - \alpha_m}{n} \\ -\left(\varepsilon\frac{-\alpha_m}{n} + \varepsilon\frac{\mu_m - \alpha_m}{n} + \cdots + \varepsilon\frac{(n-1)\mu_m - \alpha_m}{n}\right); \end{array}\right.$$

or, la suite

$$\varepsilon\frac{-\alpha_m}{n} + \varepsilon\frac{\mu_m - \alpha_m}{n} + \cdots + \varepsilon\frac{(n-1)\mu_m - \alpha_m}{n}$$

contiendra k_m fois la suivante

$$\frac{0}{n_m}+\frac{1}{n_m}+\frac{2}{n_m}+\cdots+\frac{n_m-1}{n_m},$$

si l'on suppose

$$\frac{\mu_m}{n}=\frac{\mu_m'}{n_m} \quad \text{et} \quad n=k_m n_m$$

et

(170) $$\alpha_m=\varepsilon_m k_m,$$

ε_m étant un nombre entier.

La somme dont il s'agit sera donc

$$k_m\frac{n_m-1}{2},$$

et par conséquent

$$P_m=-\alpha_m+\frac{n-1}{2}\mu_m-\frac{n_m-1}{2}k_m.$$

En faisant $\alpha_m=0$, on aura d'après (141) $P_m=\theta_m$, donc

$$\theta_m=\frac{n-1}{2}\mu_m-\frac{n_m-1}{2}k_m;$$

de là il suit:

$$\delta_{m,0}+\delta_{m,1}+\cdots+\delta_{m,n-1}=\alpha_m+(n-1)\theta_m;$$

la valeur de α deviendra donc

$$\alpha=\begin{cases} nhv_\varrho+[n\delta_{1,\varrho}-\alpha_1-(n-1)\theta_1]hr_1 \\ \quad +[n\delta_{2,\varrho}-\alpha_2-(n-1)\theta_2]hr_2+\cdots \\ \quad +n-1-\frac{n'(\mu'-1)}{2}+\left(n\varrho-\frac{n(n-1)}{2}\right)\frac{m'}{\mu'}; \end{cases}$$

or

$$n\delta_{m,\varrho}-\alpha_m-n\theta_m=n.\varepsilon\frac{\varrho\mu_m-\alpha_m}{n}-\varrho\mu_m, \quad n'\mu'=n$$

et

$$\frac{m'}{\mu'}=hR=\frac{1}{n}(\mu_1hr_1+\mu_2hr_2+\cdots+\mu_\varepsilon hr_\varepsilon),$$

donc en substituant

$$\alpha=\begin{cases} nhv_\varrho+\left(n.\varepsilon\frac{\varrho\mu_1-\alpha_1}{n}+\theta_1-\frac{n-1}{2}\mu_1\right)hr_1 \\ \quad +\left(n.\varepsilon\frac{\varrho\mu_2-\alpha_2}{n}+\theta_2-\frac{n-1}{2}\mu_2\right)hr_2+\cdots \\ \quad +\left(n.\varepsilon\frac{\varrho\mu_\varepsilon-\alpha_\varepsilon}{n}+\theta_\varepsilon-\frac{n-1}{2}\mu_\varepsilon\right)hr_\varepsilon-1+\frac{n+n'}{2}; \end{cases}$$

mais nous avons vu que

$$\theta_m = \frac{n-1}{2}\mu_m - \frac{n_m-1}{2}k_m = \frac{n-1}{2}\mu_m - \frac{n-k_m}{2},$$

donc

$$(171)\qquad \alpha = \begin{cases} nhv_\varrho + \left(n.\varepsilon\frac{\varrho\mu_1-\alpha_1}{n} - \frac{n-k_1}{2}\right)hr_1 \\ \quad + \left(n.\varepsilon\frac{\varrho\mu_2-\alpha_2}{n} - \frac{n-k_2}{2}\right)hr_2 + \dots \\ \quad + \left(n.\varepsilon\frac{\varrho\mu_\varepsilon-\alpha_\varepsilon}{n} - \frac{n-k_\varepsilon}{2}\right)hr_\varepsilon - 1 + \frac{n+n'}{2}. \end{cases}$$

Ayant ainsi trouvé les valeurs de μ et α on aura celle de $\mu-\alpha$, savoir:

$$(172)\qquad \mu-\alpha = \frac{n-k_1}{2}hr_1 + \frac{n-k_2}{2}hr_2 + \frac{n-k_3}{2}hr_3 + \dots$$
$$+ \frac{n-k_\varepsilon}{2}hr_\varepsilon + 1 - \frac{n'+n}{2} = \theta;$$

$\mu-\alpha$ est donc, comme on le voit, indépendant de ϱ et $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots \alpha_\varepsilon$.

En vertu des équations (145) et (147), il est clair qu'on aura aussi

$$(173)\qquad \mu = n.hv_\varrho + n.hR^{(\varrho)},$$
$$(174)\qquad \alpha = n.hv_\varrho + n.hR^{(\varrho)} - \theta.$$

Les quantités $hv_0, hv_1, \dots hv_{n-1}$ peuvent s'exprimer en hv_ϱ au moyen des équations (136) et (165).

On a

$$fm = \delta_{1,m}hr_1 + \delta_{2,m}hr_2 + \dots + \delta_{\varepsilon,m}hr_\varepsilon + hv_m$$
$$f\varrho = \delta_{1,\varrho}hr_1 + \delta_{2,\varrho}hr_2 + \dots + \delta_{\varepsilon,\varrho}hr_\varepsilon + hv_\varrho$$

et

$$fm = f\varrho + (\varrho - m)\frac{m'}{\mu'} - A_m';$$

donc en éliminant fm et $f\varrho$,

$$hv_m = \begin{cases} hv_\varrho + (\varrho-m)\frac{m'}{\mu'} + (\delta_{1,\varrho}-\delta_{1,m})hr_1 + (\delta_{2,\varrho}-\delta_{2,m})hr_2 + \dots \\ \quad + (\delta_{\varepsilon,\varrho}-\delta_{\varepsilon,m})hr_\varepsilon - A_m'. \end{cases}$$

Or,

$$\frac{m'}{\mu'} = \frac{1}{n}(\mu_1 hr_1 + \mu_2 hr_2 + \dots + \mu_\varepsilon hr_\varepsilon),$$

et par (142)

$$\delta_{k,\varrho} - \delta_{k,m} = \theta_k - E\left(\frac{\varrho\mu_k}{n} - \frac{\alpha_k}{n}\right) - \left\{\theta_k - E\left(\frac{m\mu_k}{n} - \frac{\alpha_k}{n}\right)\right\}$$
$$= (m-\varrho)\frac{\mu_k}{n} + \varepsilon\frac{\varrho\mu_k - \alpha_k}{n} - \varepsilon\frac{m\mu_k - \alpha_k}{n} = (m-\varrho)\frac{\mu_k}{n} + k_{k,\varrho} - k_{k,m};$$

donc en substituant et réduisant

$$hv_m = \left\{ \begin{array}{l} hv_\varrho + (k_{1,\varrho} - k_{1,m})hr_1 + (k_{2,\varrho} - k_{2,m})hr_2 + \cdots \\ \qquad\qquad + (k_{\varepsilon,\varrho} - k_{\varepsilon,m})hr_\varepsilon - A_m'; \end{array}\right.$$

c'est-à-dire en remarquant que A_m' est positif et plus petit que l'unité,

$$(175)\quad hv_m = hv_\varrho + E\left\{ \begin{array}{l} (k_{1,\varrho} - k_{1,m})hr_1 + (k_{2,\varrho} - k_{2,m})hr_2 + \cdots \\ \qquad\qquad + (k_{\varepsilon,\varrho} - k_{\varepsilon,m})hr_\varepsilon \end{array}\right\}.$$

D'après l'équation (147), qui donne la valeur de $R^{(\varrho)}$, on peut aussi écrire

$$(176)\qquad hv_m = hv_\varrho + Eh\frac{R^{(\varrho)}}{R^{(m)}}.$$

Cela posé, soient

$$(177)\quad \left\{ \begin{array}{l} x_{\alpha+1} = z_1,\ x_{\alpha+2} = z_2,\ x_{\alpha+3} = z_3,\ \ldots\ x_{\mu-1} = z_{\theta-1},\ x_\mu = z_\theta, \\ e_{\alpha+1} = \varepsilon_1,\ e_{\alpha+2} = \varepsilon_2,\ e_{\alpha+3} = \varepsilon_3,\ \ldots\ e_{\mu-1} = \varepsilon_{\theta-1},\ e_\mu = \varepsilon_\theta, \end{array}\right.$$

et pour abréger

$$(178)\qquad \omega^{-e_\mu} = \omega_\mu,\quad \omega^{-\varepsilon_\mu} = \pi_\mu.$$

La formule (134) deviendra, en mettant $s_m(x)$ au lieu de s_m, et $\frac{fx\,.\,\varphi x}{s_m(x)}$ au lieu de $\varphi_2 x$,

$$(179)\quad \omega_1^m\psi x_1 + \omega_2^m\psi x_2 + \cdots + \omega_\alpha^m\psi x_\alpha + \pi_1^m\psi z_1 + \pi_2^m\psi z_2 + \cdots + \pi_\theta^m\psi z_\theta$$
$$= C - \Pi\frac{fx\,.\,\varphi x}{s_m(x)\,.\,f_2 x} + \Sigma\nu\frac{d^{\nu-1}}{d\beta^{\nu-1}}\left\{\frac{f\beta\,.\,\varphi\beta}{s_m(\beta)\,.\,f_2^{(\nu)}\beta}\right\}.$$

Dans cette formule on a

$$(180)\qquad \psi x = \int\frac{fx\,.\,dx}{f_2 x\,.\,s_m(x)},$$

où fx est une fonction entière quelconque, et

$$f_2 x = A(x-\beta_1)^{\nu_1}(x-\beta_2)^{\nu_2}\ldots$$

Les quantités $x_1, x_2, \ldots x_\alpha$, sont des variables indépendantes; $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_\alpha$, des racines quelconques de l'équation

$$\omega^n - 1 = 0.$$

Les fonctions $z_1, z_2, \ldots z_\theta$, sont les θ racines de l'équation

(181) $$\frac{\theta'(z,0)\theta'(z,1)\theta'(z,2)\ldots\theta'(z,n-1)}{(z-x_1)(z-x_2)(z-x_3)\ldots(z-x_\alpha)}=0.$$

Les quantités $a, a', a'', \ldots$ sont déterminées par les α équations

(182) $$\theta'(x_1,e_1)=0,\ \theta'(x_2,e_2)=0,\ \theta'(x_3,e_3)=0,\ldots\ \theta'(x_\alpha,e_\alpha)=0;$$

et les nombres $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_\theta$, par les θ équations

(183) $$\theta'(z_1,\varepsilon_1)=0,\ \theta'(z_2,\varepsilon_2)=0,\ \theta'(z_3,\varepsilon_3)=0,\ \ldots\ \theta'(z_\theta,\varepsilon_\theta)=0.$$

La fonction $\theta'(x,e)$ est donnée par l'équation

(184) $$\theta'(x,e)=v_0R^{(0)}+\omega^e v_1R^{(1)}+\omega^{2e}v_2R^{(2)}+\cdots+\omega^{(n-1)e}v_{n-1}R^{(n-1)},$$

et la fonction φx par

(185) $$\varphi(x)=\log\theta'(x,0)+\omega^{-m}\log\theta'(x,1)+\omega^{-2m}\log\theta'(x,2)+\cdots$$
$$+\omega^{-(n-1)m}\log\theta'(x,n-1).$$

Si les fonctions $v_0, v_1, \ldots v_{n-1}$ sont déterminées d'après l'équation (175), les quantités θ, μ et α auront les valeurs que leur donnent les équations (172), (173), (174), et dans le même cas la valeur de $\mu-\alpha$ ou le nombre des fonctions dépendantes est le plus petit possible. Mais si les fonctions $v_0, v_1, \ldots v_{n-1}$ ont des formes quelconques, alors on a toujours

(186) $$\theta=\mu-\alpha,\ \mu=h[\theta'(x,0).\theta'(x,1).\theta'(x,2)\ldots\theta'(x,n-1)];$$

α ou le nombre des indéterminées $a, a' a'', \ldots$ est arbitraire, mais sa valeur ne peut pas surpasser le nombre

$$hv_0+hv_1+hv_2+\cdots+hv_{n-1}+n-1,$$

ou celui des coefficients dans $v_0, v_1, \ldots v_{n-1}$ moins un.

Comme cas particuliers on doit remarquer les suivants:

1° Lorsque $f_2x=(x-\beta)^\nu$.

Alors la formule (179) deviendra, en faisant pour abréger,

$$\omega_1^m\psi x_1+\omega_2^m\psi x_2+\cdots+\omega_\alpha^m\psi x_\alpha=\Sigma\omega^m\psi x,$$
$$\pi_1^m\psi z_1+\pi_2^m\psi z_2+\cdots+\pi_\theta^m\psi z_\theta=\Sigma\pi^m\psi z,$$

(187) $$\Sigma\omega^m\psi x+\Sigma\pi^m\psi z=C-\Pi\frac{fx.\varphi x}{s_m(x)(x-\beta)^\nu}+\frac{1}{\Gamma\nu}\frac{d^{\nu-1}}{d\beta^{\nu-1}}\left\{\frac{f\beta.\varphi\beta}{s_m(\beta)}\right\},$$

et

$$\psi x=\int\frac{fx.dx}{(x-\beta)^\nu s_m(x)};$$

2° Lorsque $f_2 x = x - \beta$,

(188) $$\Sigma \omega^m \psi x + \Sigma \pi^m \psi z = C - \Pi \frac{fx \cdot \varphi x}{s_m(x) \cdot (x-\beta)} + \frac{f\beta \cdot \varphi\beta}{s_m(\beta)},$$

où

$$\psi x = \int \frac{fx \cdot dx}{(x-\beta) \cdot s_m(x)};$$

3° Lorsque $f_2 x = 1$.

Alors on aura la formule

(189) $$\Sigma \omega^m \psi x + \Sigma \pi^m \psi z = C - \Pi \frac{fx \cdot \varphi x}{s_m(x)}.$$

Si le degré de la fonction $\frac{fx \cdot \varphi x}{s_m(x)}$ est moindre que -1, alors $\Pi \frac{fx \cdot \varphi x}{s_m(x)}$ s'évanouira, et on aura

(190) $$\Sigma \omega^m \psi x + \Sigma \pi^m \psi z = C.$$

D'après la valeur de φx, il est clair que le degré de la fonction $\frac{fx \cdot \varphi x}{s_m(x)}$ ou le nombre $h \frac{fx \cdot \varphi x}{s_m(x)}$ est toujours un nombre entier; or φx est du degré zéro en général, et ne peut pas être d'un degré plus élevé, donc $h \frac{fx \cdot \varphi x}{s_m(x)}$ ne peut pas surpasser le plus grand nombre entier contenu dans $h \frac{fx}{s_m(x)}$, c'est-à-dire que, d'après la notation adoptée, on aura en général

$$h \frac{fx \cdot \varphi x}{s_m(x)} \leqq Eh \frac{fx}{s_m(x)} \leqq E(hfx) + E[-hs_m(x)] \leqq hfx + E[-hs_m(x)].$$

Si donc

(191) $$hfx \leqq -E[-hs_m(x)] - 2,$$

le nombre $h \frac{fx \cdot \varphi x}{s_m(x)}$ sera toujours moindre que -1, et par conséquent la formule (190) aura lieu.

La détermination de la fonction φx, qui dépend de celle des quantités a, a', a'', etc., est en général assez longue; mais il y a un cas dans lequel on peut déterminer cette fonction d'une manière assez simple; c'est celui où l'on suppose

(192) $$\theta'(x, 0) = v_1 R^{(0)} + R^{(1)}.$$

En effet, en faisant

(193) $$v_1 = \theta x, \quad \frac{R^{(1)}}{R^{(0)}} = -\theta_1 x,$$

les équations

$$\theta'(x_1, e_1) = 0, \quad \theta'(x_2, e_2) = 0, \quad \ldots \quad \theta'(x_\alpha, e_\alpha) = 0$$

peuvent s'écrire comme il suit:

(194) $$\theta x_1 = \omega_1^{t_1 - t} \theta_1 x_1, \quad \theta x_2 = \omega_2^{t_1 - t} \theta_1 x_2, \quad \ldots \quad \theta x_\alpha = \omega_\alpha^{t_1 - t} \theta_1 x_\alpha.$$

En supposant maintenant que tous les coefficients dans θx soient des quantités indéterminées, la fonction θx sera du degré $\alpha - 1$; il s'agit donc de trouver une fonction entière de x du degré $\alpha - 1$, qui, pour les α valeurs particulières de x: $x_1, x_2, \ldots x_\alpha$, auront les α valeurs correspondantes

$$\omega_1^{t_1 - t} \theta_1 x_1, \quad \omega_2^{t_1 - t} \theta_1 x_2, \quad \ldots \quad \omega_\alpha^{t_1 - t} \theta_1 x_\alpha.$$

Or, comme on sait, la fonction θx aura alors la valeur suivante:

(195) $$\theta x = \begin{cases} \dfrac{(x - x_2)(x - x_3) \cdots (x - x_\alpha)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \cdots (x_1 - x_\alpha)} \omega_1^{t_1 - t} \theta_1 x_1 \\ + \dfrac{(x - x_1)(x - x_3) \cdots (x - x_\alpha)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3) \cdots (x_2 - x_\alpha)} \omega_2^{t_1 - t} \theta_1 x_2 + \cdots \\ + \dfrac{(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_{\alpha - 1})}{(x_\alpha - x_1)(x_\alpha - x_2) \cdots (x_\alpha - x_{\alpha - 1})} \omega_\alpha^{t_1 - t} \theta_1 x_\alpha. \end{cases}$$

En désignant cette fonction par $\theta' x$, la fonction la plus générale qui peut satisfaire aux équations (194) sera

(196) $$\theta x = \theta' x + (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_\alpha) \theta'' x,$$

$\theta'' x$ étant une fonction entière quelconque.

Ayant ainsi déterminé θx, on aura $\theta'(x, m)$ d'après l'équation

(197) $$\theta(x, m) = \omega^{tm} \theta x R^{(t)} + \omega^{mt_1} R^{(t_1)},$$

et la fonction φx par l'équation (185).

Dans ce qui précède nous avons exposé ce qui concerne les fonctions $\int \frac{fx \cdot dx}{f_2 x \cdot s_m}$ en général, quelle que soit la forme de la fonction s_m.

Considérons maintenant quelques cas particuliers:

A) soit d'abord $n = 1$.

Dans ce cas, le nombre des fonctions $s_0, s_1, s_2, \ldots s_{n-1}$ se réduit à l'unité, c'est-à-dire qu'on aura la seule fonction s_0, qui, d'après l'équation (156), se réduit à l'unité.

On aura donc

$$s_0 = 1, \quad \psi x = \int \frac{fx \, . \, dx}{f_2 x}.$$

L'équation (147) donne $R^{(0)} = 1$, et l'équation (184)

$$\theta'(x, 0) = v_0 R^{(0)} = v_0(x);$$

on aura ensuite la fonction φx par (185), savoir:

$$\varphi x = \log v_0(x).$$

Les équations (182) qui détermineront

$$x_1, \; x_2, \; \ldots \; x_\alpha,$$

seront

(198) $$v_0(x_1) = 0, \quad v_0(x_2) = 0, \quad \ldots \; v_0(x_\alpha) = 0,$$

et celle qui donne $z_1, \; z_2, \; \ldots \; z_\theta$,

(199) $$\frac{v_0(z)}{(z - x_1)(z - x_2) \cdots (z - x_\alpha)} = 0.$$

Cela posé, la formule générale (179) deviendra, en remarquant que $m = 0$,

(200) $$\psi x_1 + \psi x_2 + \cdots + \psi x_\alpha + \psi z_1 + \psi z_2 + \cdots + \psi z_\theta$$
$$= C - \Pi \frac{fx}{f_2 x} \log v_0(x) + \Sigma \nu \frac{d^{\nu-1}}{d\beta^{\nu-1}} \left(\frac{f\beta}{f_2^{(\nu)}\beta} \log v_0(\beta) \right).$$

Les équations (198) et (199) donnent

$$v_0(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \ldots (x - x_\alpha) . (x - z_1)(x - z_2) \ldots (x - z_\theta).$$

D'après l'équation (172) il est clair qu'on peut faire $\theta = 0$. Alors on aura, en faisant en même temps $\nu = 1$,

$$\Sigma \psi x = \begin{cases} C - \Pi \frac{fx}{f_2 x} [\log a + \log(x - x_1) + \log(x - x_2) + \cdots + \log(x - x_\alpha)] \\ \quad + \Sigma \frac{f\beta}{f_2 \beta} [\log a + \log(\beta - x_1) + \log(\beta - x_2) + \cdots + \log(\beta - x_\alpha)]. \end{cases}$$

En faisant $a = 1$, il viendra

(201) $$\int \frac{fx_1 . dx_1}{f_2 x_1} = C - \Pi \frac{fx}{f_2 x} \log(x - x_1) + \Sigma \nu \frac{d^{\nu-1}}{d\beta^{\nu-1}} \left(\frac{f\beta}{f_2^{(\nu)}\beta} \log(\beta - x_1) \right),$$

formule qu'il est aisé de vérifier. Elle donne, comme on le voit, l'intégrale de toute différentielle rationnelle.

B) soit en second lieu $n=2$, $R=r_1^{\frac{1}{2}} r_2^{\frac{1}{2}}$, $\alpha_1=1$, $\alpha_2=0$. Dans ce cas on aura

$$s_0=1,\ s_1=(r_1 r_2)^{\frac{1}{2}},\ R^{(0)}=r_1^{\frac{1}{2}},\ R^{(1)}=r_2^{\frac{1}{2}},$$

$$\theta'(x,0)=v_0 r_1^{\frac{1}{2}}+v_1 r_2^{\frac{1}{2}},\ \theta'(x,1)=v_0 r_1^{\frac{1}{2}}-v_1 r_2^{\frac{1}{2}},\ \omega=-1.$$

La fonction φx sera, en faisant $m=1$,

$$\varphi x=\log\theta'(x,0)-\log\theta'(x,1)=\log\frac{\theta'(x,0)}{\theta'(x,1)},$$

donc

$$\varphi x=\log\frac{v_0 r_1^{\frac{1}{2}}+v_1 r_2^{\frac{1}{2}}}{v_0 r_1^{\frac{1}{2}}-v_1 r_2^{\frac{1}{2}}}.$$

Cela posé, en mettant $v_0(x)$ et $v_1(x)$ au lieu de v_0 et v_1, et faisant

$$r_1=\varphi_0 x,\quad r_2=\varphi_1 x,$$

la formule (179) deviendra, en faisant $m=1$,

(202) $$\Sigma\omega\psi x+\Sigma\pi\psi z=C-\Pi\frac{fx}{f_2 x\sqrt{\varphi_0 x\cdot\varphi_1 x}}\log\left(\frac{v_0(x)\sqrt{\varphi_0 x}+v_1(x)\sqrt{\varphi_1 x}}{v_0(x)\sqrt{\varphi_0 x}-v_1(x)\sqrt{\varphi_1 x}}\right)$$
$$+\Sigma\nu\frac{d^{\nu-1}}{d\beta^{\nu-1}}\frac{f\beta}{f_2^{(\nu)}\beta\cdot\sqrt{\varphi_0\beta\cdot\varphi_1\beta}}\log\left(\frac{v_0(\beta)\sqrt{\varphi_0\beta}+v_1(\beta)\sqrt{\varphi_1\beta}}{v_0(\beta)\sqrt{\varphi_0\beta}-v_1(\beta)\sqrt{\varphi_1\beta}}\right),$$

où

$$\psi x=\int\frac{fx\cdot dx}{f_2 x\sqrt{\varphi_0 x\cdot\varphi_1 x}}.$$

Les fonctions $v_0(x)$ et $v_1(x)$ sont déterminées par les équations:

$$v_0(x_1)\sqrt{\varphi_0 x_1}+\omega_1 v_1(x_1)\sqrt{\varphi_1 x_1}=0,$$
$$v_0(x_2)\sqrt{\varphi_0 x_2}+\omega_2 v_1(x_2)\sqrt{\varphi_1 x_2}=0,\ \text{etc.}$$

et $z_1, z_2, \ldots z_\theta$, par l'équation (181), qui deviendra

(203) $$\frac{[v_0(z)]^2\varphi_0 z-[v_1(z)]^2\varphi_1 z}{(z-x_1)(z-x_2)\cdots(z-x_\mu)}=0.$$

Les quantités $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_\mu$ sont toutes égales à $+1$ ou à -1, et $\pi_1, \pi_2, \ldots \pi_\theta$, qui sont aussi de la même forme, sont déterminées par

$$\pi_1=-\frac{v_0(z_1)\sqrt{\varphi_0 z_1}}{v_1(z_1)\sqrt{\varphi_1 z_1}},\quad \pi_2=-\frac{v_0(z_2)\sqrt{\varphi_0 z_2}}{v_1(z_2)\sqrt{\varphi_1 z_2}},\ \ldots$$

La plus petite valeur de θ se trouve par l'équation (172), en remarquant que

$$k_1 = 1, \quad k_2 = 1;$$

on aura

$$\theta = \tfrac{1}{2} h r_1 + \tfrac{1}{2} h r_2 - \frac{n'}{2} = \tfrac{1}{2}[h(r_1 r_2) - n'],$$

où n' est le plus grand commun diviseur de 2 et $hr_1 + hr_2$; si donc

$$h(\varphi_0 x . \varphi_1 x) = 2m - 1,$$

ou

$$h(\varphi_0 x . \varphi_1 x) = 2m,$$

on aura pour θ la même valeur, savoir:

$$\theta = m - 1;$$

quant aux valeurs de v_0 et v_1, on aura l'équation (176), savoir, si $\varrho = 1$,

$$hv_0 = hv_1 + Eh \frac{R^{(1)}}{R^{(0)}} = hv_1 + E\tfrac{1}{2}(h\varphi_1 x - h\varphi_0 x);$$

donc dans le cas où $h(\varphi_0 x . \varphi_1 x) = 2m - 1$,

$$hv_0 = hv_1 + \tfrac{1}{2}(h\varphi_1 x - h\varphi_0 x) - \tfrac{1}{2},$$

et dans le cas où $h(\varphi_0 x . \varphi_1 x) = 2m$,

$$hv_0 = hv_1 + \tfrac{1}{2}(h\varphi_1 x - h\varphi_0 x).$$

Pour les valeurs de μ et α on aura, d'après les équations (173) et (174),

$$\mu = 2hv_1 + h\varphi_1 x,$$
$$\alpha = 2hv_1 + h\varphi_1 x - m + 1.$$

Si $m = 1$, on a $\theta = 0$, donc alors:

$$\Sigma \omega \psi x = v.$$

Dans ce cas:

$$\psi x = \int \frac{fx . dx}{f_2 x . \sqrt{R}},$$

où R est du premier ou du second degré.

Cette intégrale peut donc s'exprimer par des fonctions algébriques et logarithmiques, comme on le voit, en faisant

$$\varphi_0 x = \varepsilon_0 x + \delta_0, \quad \varphi_1 x = \varepsilon_1 x + \delta_1, \quad f_2 x = (x - \beta)^\nu,$$
$$v_1(x) = 1, \quad v_0(x) = a;$$

on aura

$$a = -\frac{\omega_1 \sqrt{\varphi_1 x_1}}{\sqrt{\varphi_0 x_1}} = v_0(x),$$

donc en substituant et faisant $\omega_1 = 1$,

(204) $$\int \frac{f x_1 . dx_1}{(x_1-\beta)^\nu \sqrt{(\varepsilon_0 x_1 + \delta_0)(\varepsilon_1 x_1 + \delta_1)}} = C$$

$$+ \Pi \left(\frac{fx}{(x-\beta)^\nu . \sqrt{(\varepsilon_0 x + \delta_0)(\varepsilon_1 x + \delta_1)}} \log \frac{\sqrt{(\varepsilon_0 x + \delta_0)(\varepsilon_1 x_1 + \delta_1)} + \sqrt{(\varepsilon_0 x_1 + \delta_0)(\varepsilon_1 x + \delta_1)}}{\sqrt{(\varepsilon_0 x + \delta_0)(\varepsilon_1 x_1 + \delta_1)} - \sqrt{(\varepsilon_0 x_1 + \delta_0)(\varepsilon_1 x + \delta_1)}} \right)$$

$$- \frac{1}{\Gamma \nu} \frac{d^{\nu-1}}{d\beta^{\nu-1}} \left(\frac{f\beta}{\sqrt{(\varepsilon_0 \beta + \delta_0)(\varepsilon_1 \beta + \delta_1)}} \log \frac{\sqrt{(\varepsilon_0 \beta + \delta_0)(\varepsilon_1 x_1 + \delta_1)} + \sqrt{(\varepsilon_1 \beta + \delta_1)(\varepsilon_0 x_1 + \delta_0)}}{\sqrt{(\varepsilon_0 \beta + \delta_0)(\varepsilon_1 x_1 + \delta_1)} - \sqrt{(\varepsilon_1 \beta + \delta_1)(\varepsilon_0 x_1 + \delta_1)}} \right);$$

soit, par exemple, $\nu = 0$, $fx_1 = 1$, on aura, en mettant z au lieu de x_1,

$$\int \frac{dz}{\sqrt{(\varepsilon_0 z + \delta_0)(\varepsilon_1 z + \delta_1)}} =$$

$$C + \Pi \left(\frac{1}{\sqrt{(\varepsilon_0 x + \delta_0)(\varepsilon_1 x + \delta_1)}} \log \frac{\sqrt{(\varepsilon_0 x + \delta_0)(\varepsilon_1 z + \delta_1)} + \sqrt{(\varepsilon_1 x + \delta_1)(\varepsilon_0 z + \delta_0)}}{\sqrt{(\varepsilon_0 x + \delta_0)(\varepsilon_1 z + \delta_1)} - \sqrt{(\varepsilon_1 x + \delta_1)(\varepsilon_0 z + \delta_0)}} \right)$$

$$= C + \Pi \left\{ \left(\frac{1}{x} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon_1}} + \cdots \right) \log \left(\frac{\sqrt{\varepsilon_0}\sqrt{\varepsilon_1 z + \delta_1} + \sqrt{\varepsilon_1}\sqrt{\varepsilon_0 z + \delta_0}}{\sqrt{\varepsilon_0}\sqrt{\varepsilon_1 z + \delta_1} - \sqrt{\varepsilon_1}\sqrt{\varepsilon_0 z + \delta_0}} + \cdots \right) \right\}.$$

donc

$$\int \frac{dz}{\sqrt{(\varepsilon_0 z + \delta_0)(\varepsilon_1 z + \delta_1)}} = C + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon_1}} \log \frac{\sqrt{\varepsilon_0}\sqrt{\varepsilon_1 z + \delta_1} + \sqrt{\varepsilon_1}\sqrt{\varepsilon_0 z + \delta_0}}{\sqrt{\varepsilon_0}\sqrt{\varepsilon_1 z + \delta_1} - \sqrt{\varepsilon_1}\sqrt{\varepsilon_0 z + \delta_0}}.$$

Si $m = 2$, on aura $\theta = 1$,

$$h(\varphi_0 x . \varphi_1 x) = 3 \text{ ou } 4.$$

Dans ce cas on aura donc

(205) $$\Sigma \omega \psi x = v - \pi_1 \psi z_1 = \omega_1 \psi x_1 + \omega_2 \psi x_2 + \cdots + \omega_\alpha \psi x_\alpha;$$

et la fonction ψx sera une fonction elliptique.

On aura immédiatement la valeur de z_1 par l'équation (203).
En effet, en faisant

$$(v_0 z)^2 \varphi_0 z - (v_1 z)^2 \varphi_1 z = A + \cdots + B z^{\alpha+1},$$

on aura

$$x_1 x_2 \ldots x_\alpha z_1 = \frac{A}{B} (-1)^{\alpha+1},$$

donc

$$z_1 = \frac{A}{B} \frac{(-1)^{\alpha+1}}{x_1 x_2 \ldots x_\alpha};$$

il est clair que $\frac{A}{B}$ est une fonction rationnelle de $x_1, x_2, \ldots x_\alpha, \sqrt{\varphi_0 x_1}, \sqrt{\varphi_0 x_2}, \ldots \sqrt{\varphi_0 x_\alpha}, \sqrt{\varphi_1 x_1}, \sqrt{\varphi_1 x_2}, \ldots \sqrt{\varphi_1 x_\alpha}$.

Soit, par exemple,

$$\varphi_0 x = 1, \ \varphi_1 x = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3, \ v_1 x = 1, \ v_0 x = a_0 + a_1 x,$$

on trouvera les équations:

$$v_0(x_1) = -\omega_1 \sqrt{\varphi_1 x_1}, \ v_0 x_2 = -\omega_2 \sqrt{\varphi_1 x_2},$$

$$v_0(x) = -\omega_1 \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} \sqrt{\varphi_1 x_1} - \omega_2 \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \sqrt{\varphi_1 x_2},$$

$$a_0 = \omega_1 \frac{x_2}{x_1 - x_2} \sqrt{\varphi_1 x_1} + \omega_2 \frac{x_1}{x_2 - x_1} \sqrt{\varphi_1 x_2} = \frac{\omega_1 x_2 \sqrt{\varphi_1 x_1} - \omega_2 x_1 \sqrt{\varphi_1 x_2}}{x_1 - x_2},$$

$$a_1 = -\omega_1 \frac{1}{x_1 - x_2} \sqrt{\varphi_1 x_1} - \omega_2 \frac{1}{x_2 - x_1} \sqrt{\varphi_1 x_2} = \frac{\omega_2 \sqrt{\varphi_1 x_2} - \omega_1 \sqrt{\varphi_1 x_1}}{x_1 - x_2};$$

on trouve de même:

$$A = a_0^2 - \alpha_0, \ B = -\alpha_3,$$

donc

$$z_1 = \frac{1}{x_1 x_2} \frac{(a_0^2 - \alpha_0)}{\alpha_3} = \frac{1}{\alpha_3 x_1 x_2} \left(\frac{x_2^2 \varphi_1 x_1 + x_1^2 \varphi_1 x_2 - 2\omega_1\omega_2 . x_1 x_2 \sqrt{\varphi_1 x_1 . \varphi_1 x_2}}{(x_1 - x_2)^2} - \alpha_0 \right);$$

si l'on fait

$$\omega_1 = 1, \ \omega_2 = \pm 1,$$

l'équation (205) deviendra donc

$$(206) \qquad \psi x_1 \pm \psi x_2 = \pm \psi z + C$$
$$- \Pi \left(\frac{fx}{f_2 x . \sqrt{\varphi x}} \log Fx \right) + \Sigma \nu \frac{d^{\nu-1}}{d\beta^{\nu-1}} \left(\frac{f\beta}{f_2^{(\nu)}\beta \sqrt{\varphi\beta}} \log F\beta \right),$$

où

$$\psi x = \int \frac{fx . dx}{f_2 x . \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3}}, \ \varphi x = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3,$$

$$z = \frac{(x_2 \sqrt{\varphi x_1} \pm x_1 \sqrt{\varphi x_2})^2 - \alpha_0 (x_1 - x_2)^2}{\alpha_3 x_1 x_2 (x_1 - x_2)^2},$$

$$Fx = \frac{-\frac{x - x_2}{x_1 - x_2} \sqrt{\varphi x_1} \mp \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \sqrt{\varphi x_2} + \sqrt{\varphi x}}{-\frac{x - x_2}{x_1 - x_2} \sqrt{\varphi x_1} \mp \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \sqrt{\varphi x_2} - \sqrt{\varphi x}},$$

ou bien

$$Fx = \frac{\frac{\sqrt{\varphi x_1}}{(x_1 - x)(x_1 - x_2)} \pm \frac{\sqrt{\varphi x_2}}{(x_2 - x)(x_2 - x_1)} + \frac{\sqrt{\varphi x}}{(x - x_1)(x - x_2)}}{\frac{\sqrt{\varphi x_1}}{(x_1 - x)(x_1 - x_2)} \pm \frac{\sqrt{\varphi x_2}}{(x_2 - x)(x_2 - x_1)} - \frac{\sqrt{\varphi x}}{(x - x_1)(x - x_2)}}.$$

Pour $f_2x = x - \beta$, $fx = 1$, on a

$$\psi x_1 \pm \psi x_2 = \pm \psi z + C + \frac{1}{\sqrt{\varphi\beta}} \log F\beta, \text{ où } \psi x = \int \frac{dx}{(x-\beta)\sqrt{\varphi x}};$$

et pour $f_2x = 1$, $fx = 1$,

$$\psi x_1 \pm \psi x_2 = \pm \psi z + C, \text{ où } \psi x = \int \frac{dx}{\sqrt{\varphi x}}.$$

Soit encore $m = 3$, on aura $\theta = 2$, et $h(\varphi_0 x . \varphi_1 x) = 5$ ou 6. Dans ce cas donc on a

$$\psi x = \int \frac{fx . dx}{f_2 x \sqrt{R}},$$

où R est un polynome du cinquième ou sixième degré, et

$$\omega_1 \psi x_1 + \omega_2 \psi x_2 + \cdots + \omega_\alpha \psi x_\alpha = v - \pi_1 \psi z_1 - \pi_2 \psi z_2.$$

Ces fonctions z_1, z_2 sont les deux racines d'une équation du second degré, dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de $x_1, x_2, x_3 \ldots$ et $\sqrt{R_1}$, $\sqrt{R_2}$, $\sqrt{R_3} \ldots$, en désignant par $R_1, R_2, R_3 \ldots$, les valeurs de R correspondant à $x_1, x_2, x_3 \ldots$.

Comme cas particuliers je citerai seulement les suivants:

1° Lorsque $fx = A_0 + A_1 x$, $f_2 x = 1$. Alors on aura

$$\psi x = \int \frac{(A_0 + A_1 x)\, dx}{\sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_5 x^5 + \alpha_6 x^6}}$$

et

$$\pm \psi x_1 \pm \psi x_2 \pm \psi x_3 \pm \ldots \pm \psi x_\alpha = \pm \psi z_1 \pm \psi z_2 + C.$$

2° Lorsque $\varphi_0 x = 1$, $\varphi_1 x = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \alpha_4 x^4 + \alpha_5 x^5 = \varphi x$, $v_0 x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, $v_1 x = 1$.

Alors on trouvera facilement

$$v_0 x = \mp \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} \sqrt{\varphi x_1} \mp \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} \sqrt{\varphi x_2} \mp \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)} \sqrt{\varphi x_3}$$

et

$$\pm \psi x_1 \pm \psi x_2 \pm \psi x_3 = \pm \psi z_1 \pm \psi z_2 + C$$
$$- \Pi \frac{fx}{f_2 x \sqrt{\varphi x}} \log \frac{F_0 x}{F_1 x} + \Sigma \nu \frac{d^{\nu-1}}{d\beta^{\nu-1}} \left\{ \frac{f\beta}{f_2^{(\nu)}\beta \sqrt{\varphi\beta}} \log \frac{F_0 \beta}{F_1 \beta} \right\},$$

où

$$\psi x = \int \frac{fx . dx}{f_2 x . \sqrt{\varphi x}}$$

et

$$\frac{F_0 x}{F_1 x} = \frac{\frac{\pm\sqrt{\varphi x_1}}{(x_1-x)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} + \frac{\pm\sqrt{\varphi x_2}}{(x_2-x)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + \frac{\pm\sqrt{\varphi x_3}}{(x_3-x)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} + \frac{\sqrt{\varphi x}}{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}}{\frac{\pm\sqrt{\varphi x_1}}{(x_1-x)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} + \frac{\pm\sqrt{\varphi x_2}}{(x_2-x)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + \frac{\pm\sqrt{\varphi x_3}}{(x_3-x)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} - \frac{\sqrt{\varphi x}}{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}};$$

z_1 et z_2 sont les racines de l'équation

$$\frac{(v_0 z)^2 - \varphi z}{(z-x_1)(z-x_2)(z-x_3)} = 0.$$

En faisant dans la formule générale (202) $v_1 = 1$, on aura

$$v_0 x = \left\{ \begin{array}{l} -\omega_1 \frac{(x-x_2)\cdots(x-x_\alpha)}{(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_\alpha)}\sqrt{\frac{\varphi_1 x_1}{\varphi_0 x_1}} - \omega_2 \frac{(x-x_1)(x-x_3)\cdots(x-x_\alpha)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\cdots(x_2-x_\alpha)}\sqrt{\frac{\varphi_1 x_2}{\varphi_0 x_2}} \\ \qquad - \cdots - \omega_\alpha \frac{(x-x_1)\cdots(x-x_{\alpha-1})}{(x_\alpha-x_1)\cdots(x_\alpha-x_{\alpha-1})}\sqrt{\frac{\varphi_1 x_\alpha}{\varphi_0 x_\alpha}}, \end{array} \right.$$

et d'après cela

$$\Sigma\omega\psi x + \Sigma\pi\psi z = \left\{ \begin{array}{l} C - \Pi\left(\frac{fx}{f_2 x \cdot \sqrt{\varphi_0 x \cdot \varphi_1 x}} \log \frac{F_0 x}{F_1 x}\right) \\ + \Sigma'\nu \frac{d^{\nu-1}}{d\beta^{\nu-1}}\left(\frac{f\beta}{f_2^{(\nu)}\beta \cdot \sqrt{\varphi_0\beta \cdot \varphi_1\beta}} \log \frac{F_0\beta}{F_1\beta}\right), \end{array} \right.$$

où

$$F_0 x = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\omega_1\sqrt{\frac{\varphi_1 x_1}{\varphi_0 x_1}}}{(x_1-x)(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_\alpha)} + \frac{\omega_2\sqrt{\frac{\varphi_1 x_2}{\varphi_0 x_2}}}{(x_2-x)(x_2-x_1)\cdots(x_2-x_\alpha)} + \cdots \\ + \frac{\omega_\alpha\sqrt{\frac{\varphi_1 x_\alpha}{\varphi_0 x_\alpha}}}{(x_\alpha-x)(x_\alpha-x_1)\cdots(x_\alpha-x_{\alpha-1})} + \frac{\sqrt{\frac{\varphi_1 x}{\varphi_0 x}}}{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_\alpha)}, \end{array} \right.$$

$$F_1 x = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\omega_1\sqrt{\frac{\varphi_1 x_1}{\varphi_0 x_1}}}{(x_1-x)(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_\alpha)} + \frac{\omega_2\sqrt{\frac{\varphi_1 x_2}{\varphi_0 x_2}}}{(x_2-x)(x_2-x_1)\cdots(x_2-x_\alpha)} + \cdots \\ + \frac{\omega_\alpha\sqrt{\frac{\varphi_1 x_\alpha}{\varphi_0 x_\alpha}}}{(x_\alpha-x)(x_\alpha-x_1)\cdots(x_\alpha-x_{\alpha-1})} - \frac{\sqrt{\frac{\varphi_1 x}{\varphi_0 x}}}{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_\alpha)}; \end{array} \right.$$

$z_1, z_2, \ldots z_\theta$ sont les racines de l'équation

$$\frac{v_0^2 \cdot \varphi_0 z - \varphi_1 z}{(z-x_1)(z-x_2)\cdots(z-x_\alpha)} = 0.$$

En faisant dans la même formule générale $f_2 x = 1$, on aura

$$\Sigma\omega\psi x + \Sigma\pi\psi z = C - \Pi\left(\frac{fx}{\sqrt{\varphi_0 x \cdot \varphi_1 x}} \log \frac{v_0 x\sqrt{\varphi_0 x} + v_1 x\sqrt{\varphi_1 x}}{v_0 x\sqrt{\varphi_0 x} - v_1 x\sqrt{\varphi_1 x}}\right),$$

où

$$\psi x = \int \frac{fx \cdot dx}{\sqrt{\varphi_0 x \cdot \varphi_1 x}}.$$

Si fx est du $(m-2)^e$ degré, on aura

$$\Sigma \omega \psi x + \Sigma \pi \psi z = C;$$

Si l'on fait $f_2 x = x - \beta$, $fx = 1$, on aura

$$\Sigma \omega \psi x + \Sigma \pi \psi z = C + \frac{1}{\sqrt{\varphi_0 \beta \cdot \varphi_1 \beta}} \log \frac{v_0 \beta \sqrt{\varphi_0 \beta} + v_1 \beta \sqrt{\varphi_1 \beta}}{v_0 \beta \sqrt{\varphi_0 \beta} - v_1 \beta \sqrt{\varphi_1 \beta}},$$

où

$$\psi x = \int \frac{dx}{(x-\beta)\sqrt{\varphi_0 x \cdot \varphi_1 x}}.$$

C) Soit en troisième lieu $n = 3$, $R = r_1^{\frac{1}{3}} r_2^{\frac{2}{3}}$, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$. Alors on aura

$$s_0 = 1, \; s_1 = r_1^{\frac{1}{3}} r_2^{\frac{2}{3}}, \; s_2 = r_1^{\frac{2}{3}} r_2^{\frac{1}{3}}, \; R^{(0)} = s_0, \; R^{(1)} = s_1, \; R^{(2)} = s_2,$$

$$\theta'(x, 0) = v_0 + v_1 r_1^{\frac{1}{3}} r_2^{\frac{2}{3}} + v_2 r_1^{\frac{2}{3}} r_2^{\frac{1}{3}},$$

$$\theta'(x, 1) = v_0 + \omega v_1 r_1^{\frac{1}{3}} r_2^{\frac{2}{3}} + \omega^2 v_2 r_1^{\frac{2}{3}} r_2^{\frac{1}{3}},$$

$$\theta'(x, 2) = v_0 + \omega^2 v_1 r_1^{\frac{1}{3}} r_2^{\frac{2}{3}} + \omega v_2 r_1^{\frac{2}{3}} r_2^{\frac{1}{3}},$$

$$\varphi x = \log \theta'(x, 0) + \omega^m \log \theta'(x, 1) + \omega^{2m} \log \theta'(x, 2),$$

$$\theta'(x, 0)\, \theta'(x, 1)\, \theta'(x, 2) = v_0^3 + v_1^3 r_1 r_2^2 + v_2^3 r_1^2 r_2 - 3 v_0 v_1 v_2 r_1 r_2.$$

En faisant donc $m = 1$, $r_1 = \varphi_0 x$, $r_2 = \varphi_1 x$, $v_0 = v_0(x)$, $v_1 = v_1(x)$, $v_2 = v_2(x)$, la formule (179) deviendra

$$\Sigma \omega \psi x + \Sigma \pi \psi z$$

$$= C - \Pi \frac{fx}{f_2 x \cdot (\varphi_0 x)^{\frac{1}{3}} (\varphi_1 x)^{\frac{2}{3}}} [\log(F_0 x) + \omega \log(F_1 x) + \omega^2 \log(F_2 x)]$$

$$+ \Sigma \nu \frac{d^{\nu-1}}{d\beta^{\nu-1}} \left\{ \frac{f\beta}{f_2^{(\nu)} \beta \cdot (\varphi_0 \beta)^{\frac{1}{3}} (\varphi_1 \beta)^{\frac{2}{3}}} [\log(F_0 \beta) + \omega \log(F_1 \beta) + \omega^2 \log(F_2 \beta)] \right\},$$

où

$$\psi x = \int \frac{fx \cdot dx}{f_2 x \cdot (\varphi_0 x)^{\frac{1}{3}} (\varphi_1 x)^{\frac{2}{3}}},$$

$$F_0x = v_0(x) + v_1(x)(\varphi_0 x)^{\frac{1}{3}}(\varphi_1 x)^{\frac{2}{3}} + v_2(x)(\varphi_0 x)^{\frac{2}{3}}(\varphi_1 x)^{\frac{1}{3}},$$
$$F_1x = v_0(x) + \omega v_1(x)(\varphi_0 x)^{\frac{1}{3}}(\varphi_1 x)^{\frac{2}{3}} + \omega^2 v_2(x)(\varphi_0 x)^{\frac{2}{3}}(\varphi_1 x)^{\frac{1}{3}},$$
$$F_2x = v_0(x) + \omega^2 v_1(x)(\varphi_0 x)^{\frac{1}{3}}(\varphi_1 x)^{\frac{2}{3}} + \omega v_2(x)(\varphi_0 x)^{\frac{2}{3}}(\varphi_1 x)^{\frac{1}{3}}.$$

Pour les mêmes valeurs de $x_1, x_2, x_3, \ldots z_1, z_2, \ldots F_0x, F_1x, F_2x$, on aura aussi

$$\Sigma\omega\psi x + \Sigma\pi\psi z =$$
$$C - \Pi \frac{fx}{f_2 x \cdot (\varphi_0 x)^{\frac{2}{3}}(\varphi_1 x)^{\frac{1}{3}}}\left[\log(F_0x) + \omega^2\log(F_1x) + \omega\log(F_2x)\right]$$
$$+ \Sigma\nu \frac{d^{\nu-1}}{d\beta^{\nu-1}}\left\{\frac{f\beta}{f_2^{(\nu)}\beta \cdot (\varphi_0\beta)^{\frac{2}{3}}(\varphi_1\beta)^{\frac{1}{3}}}\left[\log(F_0\beta) + \omega^2\log(F_1\beta) + \omega\log(F_2\beta)\right]\right\}.$$

Les fonctions $z_1, z_2, \ldots z_\theta$, sont les racines de l'équation

$$\frac{[v_0(z)]^3 + [v_1(z)]^3\varphi_0 z(\varphi_1 z)^2 + [v_2(z)]^3(\varphi_0 z)^2(\varphi_1 z) - 3v_0(z).v_1(z).v_2(z).\varphi_0 z.\varphi_1 z}{(z-x_1)(z-x_2)(z-x_3)\cdots(z-x_{\alpha-1})(z-x_\alpha)} = 0.$$

D'après l'équation (172), la plus petite valeur sera

$$\theta = hr_1 + hr_2 + 1 - \frac{3+n'}{2};$$

en remarquant que $k_1 = 1$, $k_2 = 1$, n' est le plus grand commun diviseur de 3 et $hr_1 + 2hr_2$.

Soit d'abord $hr_1 + 2hr_2 = 3m$, on aura $n' = 3$ et $\theta = h(\varphi_0 x.\varphi_1 x) - 2$.

Si $hr_1 + 2hr_2 = 3m - 1$ ou $3m - 2$, on aura $n' = 1$, et par suite $\theta = h(\varphi_0 x.\varphi_1 x) - 1$.

Ainsi, par exemple, on aura pour

$$h(\varphi_0 x.\varphi_1 x) = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \ldots$$
$$\theta = 0, 1, 2, 3, 4, 5 \ldots \text{ lorsque } h\varphi_0 x + 2h\varphi_1 x = 3m \pm 1$$
$$\text{et } \theta = \quad 0, 1, 2, 3, 4 \ldots \text{ lorsque } h\varphi_0 x + 2h\varphi_1 x = 3m.$$

XIII.

RECHERCHE DE LA QUANTITÉ QUI SATISFAIT A LA FOIS A DEUX ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES DONNÉES.

Annales de Mathématiques pures et appliquées rédigées par M. *J. D. Gergonne,* t. XVII, Paris 1827.

Lorsqu'une quantité satisfait, à la fois, à deux équations algébriques données, ces deux équations ont un facteur commun du premier degré. En supposant quelles n'ont pas d'autre facteur commun que celui-là, on peut toujours, comme l'on sait, exprimer rationnellement l'inconnue en fonction des coefficiens des deux équations. On y parvient d'ordinaire à l'aide de l'élimination; mais je vais faire voir, dans ce qui va suivre, que, dans tous les cas, on peut calculer immédiatement la valeur de l'inconnue, ou, plus généralement encore, la valeur d'une fonction rationnelle quelconque de cette inconnue.

Soient

(1) $$\varphi y = p_0 + p_1 y + p_2 y^2 + \cdots + p_{m-1} y^{m-1} + y^m = 0,$$

(2) $$\psi y = q_0 + q_1 y + q_2 y^2 + \cdots + q_{n-1} y^{n-1} + y^n = 0,$$

les deux équations proposées, la première du $m^{ième}$ et l'autre du $n^{ième}$ degré.

Désignons les n racines de (2) par $y, y_1, y_2, \ldots y_{n-1}$; en les substituant tour à tour dans (1), on aura les n fonctions

(3) $$\varphi y,\ \varphi y_1,\ \varphi y_2,\ \ldots\ \varphi y_{n-1}.$$

Soient

$$(4)\quad \begin{cases} R = \varphi y_1 . \varphi y_2 . \varphi y_3 \ldots\ldots \varphi y_{n-2} . \varphi y_{n-1}, \\ R_1 = \varphi y . \varphi y_2 . \varphi y_3 \ldots\ldots \varphi y_{n-2} . \varphi y_{n-1}, \\ R_2 = \varphi y . \varphi y_1 . \varphi y_3 \ldots\ldots \varphi y_{n-2} . \varphi y_{n-1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ R_{n-2} = \varphi y . \varphi y_1 . \varphi y_2 \ldots\ldots \varphi y_{n-3} . \varphi y_{n-1}, \\ R_{n-1} = \varphi y . \varphi y_1 . \varphi y_2 \ldots\ldots \varphi y_{n-3} . \varphi y_{n-2}. \end{cases}$$

Cela posé, soit fy la fonction rationnelle de y dont on veut déterminer la valeur, et désignons par θy une autre fonction rationnelle quelconque de y. On aura l'équation identique

$$(5)\quad fy . \theta y . R = fy . \theta y . R.$$

Maintenant, ayant $\varphi y = 0$, on aura

$$R_1 = 0,\ \ R_2 = 0,\ \ R_3 = 0,\ \ldots\ldots R_{n-1} = 0,$$

et, par suite,

$$tR + t_1 R_1 + t_2 R_2 + t_3 R_3 + \cdots + t_{n-2} R_{n-2} + t_{n-1} R_{n-1} = tR,$$

où t; t_1, t_2, $\ldots$ t_{n-2}, t_{n-1} sont des quantités quelconques.

En faisant donc d'abord

$$t = \theta y,\ \ t_1 = \theta y_1,\ \ t_2 = \theta y_2,\ \ldots\ t_{n-1} = \theta y_{n-1},$$

et ensuite

$$t = fy . \theta y,\ \ t_1 = fy_1 . \theta y_1,\ \ t_2 = fy_2 . \theta y_2,\ \ldots\ t_{n-1} = fy_{n-1} . \theta y_{n-1},$$

on obtiendra les deux équations

$$(6)\quad \begin{cases} \theta y . R = \theta y . R + \theta y_1 . R_1 + \theta y_2 . R_2 + \cdots + \theta y_{n-1} . R_{n-1}, \\ fy . \theta y . R = fy . \theta y . R + fy_1 . \theta y_1 . R_1 + fy_2 . \theta y_2 . R_2 + \cdots \\ \qquad\qquad\qquad + fy_{n-1} . \theta y_{n-1} . R_{n-1}; \end{cases}$$

par là, l'équation (5) deviendra

$$\begin{aligned} & fy(\theta y . R + \theta y_1 . R_1 + \theta y_2 . R_2 + \cdots + \theta y_{n-1} . R_{n-1}) \\ & \quad = \theta y . fy . R + \theta y_1 . fy_1 . R_1 + \theta y_2 . fy_2 . R_2 + \cdots + \theta y_{n-1} . fy_{n-1} . R_{n-1}; \end{aligned}$$

équation qui, en posant, pour abréger,

$$(7)\quad \begin{cases} \theta y . R + \theta y_1 . R_1 + \theta y_2 . R_2 + \cdots + \theta y_{n-1} . R_{n-1} = \Sigma\, \theta y . R, \\ fy . \theta y . R + fy_1 . \theta y_1 . R_1 + fy_2 . \theta y_2 . R_2 + \cdots \\ \qquad\qquad + fy_{n-1} . \theta y_{n-1} . R_{n-1} = \Sigma fy . \theta y . R, \end{cases}$$

deviendra

$$fy\,\Sigma\,\theta y\,.\,R = \Sigma\,fy\,.\,\theta y\,.\,R,$$

et de là

(8)
$$fy = \frac{\Sigma\,fy\,.\,\theta y\,.\,R}{\Sigma\,\theta y\,.\,R}.$$

Maintenant il est clair que le numérateur et le dénominateur de cette valeur de fy sont des fonctions rationnelles et symétriques des racines y, y_1, y_2, y_3, ... y_{n-1}; on peut donc en vertu des formules connues, les exprimer rationnellement par les coefficiens des équations (1) et (2). Il en est donc de même de la fonction fy.

La fonction rationnelle θy étant arbitraire, on peut en disposer pour simplifier l'expression de fy. Pour cela, soit

$$fy = \frac{Fy}{\chi y},$$

où Fy et χy sont deux fonctions entières; on aura, en substituant,

$$\frac{Fy}{\chi y} = \frac{\Sigma\frac{Fy\,.\,\theta y\,.\,R}{\chi(y)}}{\Sigma\,\theta y\,.\,R};$$

si donc on suppose $\theta y = \chi y$, on aura

(9)
$$\frac{Fy}{\chi y} = \frac{\Sigma\,Fy\,.\,R}{\Sigma\,\chi y\,.\,R};$$

et alors le numérateur et le dénominateur de cette fonction seront des fonctions entières des coefficiens des équations proposées.

Si $\chi y = 1$, on aura, pour une fonction entière quelconque Fy,

(10)
$$Fy = \frac{\Sigma\,Fy\,.\,R}{\Sigma\,R};$$

ou bien

$$Fy = \frac{Fy\,.\,R + Fy_1\,.\,R_1 + Fy_2\,.\,R_2 + \cdots + Fy_{n-1}\,.\,R_{n-1}}{R + R_1 + R_2 + \cdots + R_{n-1}}.$$

Mais on peut encore simplifier beaucoup l'expression de Fy de la manière suivante:

Désignons par $\psi' y$ la dérivée de ψy, par rapport à y, et faisons

$$\theta y = \frac{1}{\psi' y},$$

l'équation (8) donnera

(11) $$Fy = \frac{\Sigma \frac{Fy\,R}{\varphi' y}}{\Sigma \frac{R}{\varphi' y}}.$$

Cela posé, on peut d'abord exprimer R par une fonction entière de y. En effet, si l'on fait

$$(z-y_1)(z-y_2)\cdots(z-y_{n-1}) = z^{n-1} + v_{n-2}z^{n-2} + v_{n-3}z^{n-3} + \cdots + v_0 = 0,$$

on peut transformer R, qui est une fonction entière et symétrique de $y_1, y_2, y_3, \ldots y_{n-1}$, en fonction entière des coefficiens $v_0, v_1, v_2, \ldots v_{n-2}$.

Maintenant, on a

$$\begin{aligned} v_0 + v_1 z + v_2 z^2 + \cdots + v_{n-2}z^{n-2} + z^{n-1})(z-y) \\ = q_0 + q_1 z + q_2 z^2 + \cdots + q_{n-1}z^{n-1} + z^n = z^n + (v_{n-2} - y)z^{n-1} \\ + (v_{n-3} - y\,v_{n-2})z^{n-2} + (v_{n-4} - y\,v_{n-3})z^{n-3} + \cdots \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} v_{n-2} &= q_{n-1} + y, \\ v_{n-3} &= q_{n-2} + y\,.\,v_{n-2}, \\ v_{n-4} &= q_{n-3} + y\,.\,v_{n-3}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

d'où il suit que $v_0, v_1, v_2, \ldots v_{n-2}$ sont des fonctions entières de y; la fonction R l'est donc aussi; elle est donc de la forme

(12) $$R = \varrho_0 + \varrho_1 y + \varrho_2 y^2 + \varrho_3 y^3 + \cdots + \varrho_\mu y^\mu,$$

où il est évident que $\varrho_0, \varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_\mu$ seront des fonctions *entières* des coefficiens des équations (1) et (2).

La fonction R sera d'un degré supérieur à $n-1$; mais il est clair qu'on peut, en vertu de l'équation (2), en éliminer toutes les puissances de y supérieures à la $(n-1)^{ième}$, et de cette manière mettre R sous la forme

$$R = \varrho_0 + \varrho_1 y + \varrho_2 y^2 + \varrho_3 y^3 + \cdots + \varrho_{n-1} y^{n-1},$$

où $\varrho_0, \varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_{n-1}$ sont toujours des fonctions entières de $p_0, p_1, p_2, \ldots p_{m-1}, q_0, q_1, q_2, \ldots q_{n-1}$.

En multipliant R par la fonction entière Fy on aura la fonction $Fy\,.\,R$, qui est de même une fonction entière de y. On peut donc la mettre sous la même forme que R, c'est-à-dire qu'on peut poser

(13) $$Fy\,.\,R = t_0 + t_1 y + t_2 y^2 + t_3 y^3 + \cdots + t_{n-1} y^{n-1},$$

$t_0, t_1, t_2, \ldots t_{n-1}$ étant encore des fonctions entières de $p_0, p_1, p_2 \ldots p_{m-1}$, $q_0, q_1, q_2, \ldots q_{n-1}$.

Dès que R sera déterminé par l'équation (12), il est clair qu'on aura

$$\begin{aligned}
R_1 &= \varrho_0 + \varrho_1 y_1 + \varrho_2 y_1^2 + \varrho_3 y_1^3 + \cdots + \varrho_{n-1} y_1^{n-1},\\
R_2 &= \varrho_0 + \varrho_1 y_2 + \varrho_2 y_2^2 + \varrho_3 y_2^3 + \cdots + \varrho_{n-1} y_2^{n-1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
R_{n-1} &= \varrho_0 + \varrho_1 y_{n-1} + \varrho_2 y_{n-1}^2 + \varrho_3 y_{n-1}^3 + \cdots + \varrho_{n-1} y_{n-1}^{n-1}.
\end{aligned}$$

On aura de même

$$\begin{aligned}
Fy_1 . R_1 &= t_0 + t_1 y_1 + t_2 y_1^2 + t_3 y_1^3 + \cdots + t_{n-1} y_1^{n-1},\\
Fy_2 . R_2 &= t_0 + t_1 y_2 + t_2 y_2^2 + t_3 y_2^3 + \cdots + t_{n-1} y_2^{n-1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
Fy_{n-1} . R_{n-1} &= t_0 + t_1 y_{n-1} + t_2 y_{n-1}^2 + t_3 y_{n-1}^3 + \cdots + t_{n-1} y_{n-1}^{n-1}.
\end{aligned}$$

Maintenant je dis qu'on aura

$$Fy = \frac{t_{n-1}}{\varrho_{n-1}}.$$

En effet, on a d'abord

$$\Sigma \frac{R}{\psi' y} = \frac{R}{\psi' y} + \frac{R_1}{\psi' y_1} + \frac{R_2}{\psi' y_2} + \cdots + \frac{R_{n-1}}{\psi' y_{n-1}};$$

donc, en substituant les valeurs de $R, R_1, R_2, \ldots R_{n-1}$,

$$\begin{aligned}
\Sigma \frac{R}{\psi' y} = \;& \varrho_0 \left(\frac{1}{\psi' y} + \frac{1}{\psi' y_1} + \frac{1}{\psi' y_2} + \cdots + \frac{1}{\psi' y_{n-1}} \right)\\
&+ \varrho_1 \left(\frac{y}{\psi' y} + \frac{y_1}{\psi' y_1} + \frac{y_2}{\psi' y_2} + \cdots + \frac{y_{n-1}}{\psi' y_{n-1}} \right)\\
&+ \varrho_2 \left(\frac{y^2}{\psi' y} + \frac{y_1^2}{\psi' y_1} + \frac{y_2^2}{\psi' y_2} + \cdots + \frac{y_{n-1}^2}{\psi' y_{n-1}} \right)\\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+ \varrho_{n-1} \left(\frac{y^{n-1}}{\psi' y} + \frac{y_1^{n-1}}{\psi' y_1} + \frac{y_2^{n-1}}{\psi' y_2} + \cdots + \frac{y_{n-1}^{n-1}}{\psi' y_{n-1}} \right).
\end{aligned}$$

Or, $y, y_1, y_2, \ldots y_{n-1}$, étant les racines de l'équation (2) on a

$$\begin{aligned}
\psi' y &= (y - y_1)(y - y_2)(y - y_3) \cdots (y - y_{n-1}),\\
\psi' y_1 &= (y_1 - y)(y_1 - y_2)(y_1 - y_3) \cdots (y_1 - y_{n-1}),\\
\psi' y_2 &= (y_2 - y)(y_2 - y_1)(y_2 - y_3) \cdots (y_2 - y_{n-1}),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

$$\psi' y_{n-1} = (y_{n-1} - y)(y_{n-1} - y_1)(y_{n-1} - y_2) \cdots (y_{n-1} - y_{n-2});$$

donc, d'après une formule connue, les coefficiens de $\varrho_0, \varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_{n-1}$, dans l'expression de $\Sigma \frac{R}{\psi' y}$, s'évanouiront tous, excepté celui de ϱ_{n-1}, qui se réduira à l'unité; on aura donc

$$\Sigma \frac{R}{\psi' y} = \varrho_{n-1}.$$

On prouvera exactement de la même manière que

$$\Sigma \frac{R . Fy}{\psi' y} = t_{n-1};$$

donc, en vertu de l'équation (11),

$$Fy = \frac{t_{n-1}}{\varrho_{n-1}},$$

ou bien, en écrivant t et ϱ, au lieu de t_{n-1} et ϱ_{n-1},

$$Fy = \frac{t}{\varrho}. \tag{14}$$

Soit maintenant $F'y$ une autre fonction entière de y; en supposant

$$F'y . R = t' y^{n-1} + t'_{n-2} y^{n-2} + t'_{n-3} y^{n-3} + \cdots + t_1' y + t_0', \tag{15}$$

$t', t'_{n-2}, t'_{n-3}, \ldots t'_0$ étant des fonctions entières des quantités $p_0, p_1, p_2, \ldots p_{m-1}, q_0, q_1, q_2, \ldots q_{n-1}$, on aura

$$F'y = \frac{t'}{\varrho}; \tag{16}$$

d'où, en comparant (14) à (16),

$$\frac{Fy}{F'y} = \frac{t}{t'}. \tag{17}$$

Ainsi on aura la valeur d'une fonction rationnelle quelconque $\frac{Fy}{F'y}$ par le développement des deux fonctions

$$Fy . R \text{ et } F'y . R.$$

La formule (17) peut facilement être traduite en théorème.

Le cas le plus simple est celui où l'on cherche uniquement la valeur de y. Alors on a

$$y = \frac{t}{\varrho}$$

où

$$R = \varrho y^{n-1} + \varrho' y^{n-2} + \cdots \quad \text{et} \quad Ry = t y^{n-1} + t' y^{n-2} + \cdots$$

On peut exprimer t en ϱ et ϱ'. En effet en substituant la valeur de R, il viendra

$$Ry = \varrho y^n + \varrho' y^{n-1} + \cdots;$$

or, en vertu de l'équation (2), on a

$$y^n = -q_{n-1}y^{n-1} - q_{n-2}y^{n-2} - \cdots;$$

donc, en substituant

$$Ry = (\varrho' - \varrho q_{n-1})\, y^{n-1} + \cdots.$$

Dans le développement de Ry, le coefficient de y^{n-1} est donc

$$\varrho' - \varrho q_{n-1} = t;$$

donc

$$y = \frac{\varrho' - \varrho q_{n-1}}{\varrho},$$

ou bien

(18) $$y = -q_{n-1} + \frac{\varrho'}{\varrho}.$$

De cette manière, on n'a besoin de connaître que les coefficiens de y^{n-1} et y^{n-2} dans le développement de

$$R = \varrho y^{n-1} + \varrho' y^{n-2} + \cdots = \varphi y_1 \cdot \varphi y_2 \cdot \varphi y_3 \cdots \varphi y_{n-1}.$$

Paris, le 2 novembre 1826

XIV.

RECHERCHES SUR LA SÉRIE $1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1.2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^3+\cdots$

Journal für die reine und angewandte Mathematik, herausgegeben von *Crelle*, Bd. I, Berlin 1826.

1.

Si l'on fait subir au raisonnement dont on se sert en général quand il s'agit des séries infinies, un examen plus exact, on trouvera qu'il est, à tout prendre, peu satisfaisant, et que par conséquent le nombre des théorèmes, concernant les séries infinies, qui peuvent être considérés comme rigoureusement fondés, est très limité. On applique ordinairement les opérations de l'analyse aux séries infinies de la même manière que si les séries étaient finies, ce qui ne me semble pas permis sans démonstration particulière. Si par exemple on doit multiplier deux séries infinies l'une par l'autre, on pose

$$(u_0+u_1+u_2+u_3+\cdots)(v_0+v_1+v_2+v_3+\cdots)=u_0v_0+(u_0v_1+u_1v_0)$$
$$+(u_0v_2+u_1v_1+u_2v_0)+\cdots+(u_0v_n+u_1v_{n-1}+u_2v_{n-2}+\cdots+u_nv_0)+\cdots$$

Cette équation est très juste lorsque les séries $u_0+u_1+\cdots$ et $v_0+v_1+\cdots$ sont finies. Mais si elles sont infinies, il est d'abord nécessaire qu'elles convergent, car une série divergente n'a pas de somme; ensuite la série du second membre doit de même converger. C'est seulement avec cette restriction que l'expression ci-dessus est juste; mais, si je ne me trompe, jusqu'à présent on n'y a pas eu égard. C'est ce qu'on se propose de faire dans ce mémoire. Il y a encore plusieurs opérations semblables à justifier p. ex.

le procédé ordinaire pour diviser une quantité par une série infinie, celui de l'élévation d'une série infinie à une puissance, celui de la détermination de son logarithme, de son sinus, de son cosinus, etc.

Un autre procédé qu'on trouve fréquemment dans l'analyse, et qui assez souvent conduit à des contradictions, c'est qu'on se sert des séries divergentes pour l'évaluation des valeurs numériques des séries. Une série divergente ne peut jamais être égale à une quantité déterminée; c'est seulement une expression jouissant de certaines propriétés qui se rapportent aux opérations auxquelles la série est soumise.

Les séries divergentes peuvent quelquefois servir avec succès de symboles pour exprimer telle ou telle proposition d'une manière abrégée; mais on ne saurait jamais les mettre à la place de quantités déterminées. Par un tel procédé on peut démontrer tout ce qu'on veut, l'impossible aussi bien que le possible.

Une des séries les plus remarquables dans l'analyse algébrique est celle-ci:

$$1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1.2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^3+\cdots$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)\cdots[m-(n-1)]}{1.2.3\ldots n}x^n+\cdots$$

Lorsque m est un nombre entier positif, on sait que la somme de cette série, qui dans ce cas est finie, peut s'exprimer par $(1+x)^m$. Lorsque m n'est pas un nombre entier, la série ira à l'infini, et elle sera convergente ou divergente, selon les différentes valeurs qu'on attribuera à m et à x. Dans ce cas on pose de même l'équation

$$(1+x)^m=1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1.2}x^2+\cdots,$$

mais alors l'égalité exprime seulement que les deux expressions

$$(1+x)^m \quad \text{et} \quad 1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1.2}x^2+\cdots$$

ont certaines propriétés communes desquelles, pour certaines valeurs de m et de x, dépend l'égalité numérique des expressions. On suppose que l'égalité numérique aura toujours lieu, lorsque la série est convergente; mais c'est ce qui jusqu'à présent n'est pas encore démontré. On n'a même pas examiné tous les cas où la série est convergente. Lors même

qu'on suppose l'existence de l'équation ci-dessus, il reste encore à chercher la valeur de $(1+x)^m$, car cette expression a en général une infinité de valeurs différentes, tandis que la série $1+mx+\cdots$ n'en a qu'une seule.

Le but de ce mémoire est d'essayer de remplir une lacune par la solution complète du problème suivant:

"Trouver la somme de la série

$$1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1.2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^3+\cdots$$

"pour toutes les valeurs réelles ou imaginaires de x et de m pour "lesquelles la série est convergente."

2.

Nous allons d'abord établir quelques théorèmes nécessaires sur les séries. L'excellent ouvrage de M. *Cauchy* "Cours d'analyse de l'école polytechnique", qui doit être lu par tout analyste qui aime la rigueur dans les recherches mathématiques, nous servira de guide.

Définition. Une série quelconque

$$v_0+v_1+v_2+\cdots+v_m+\cdots$$

sera dite convergente, si pour des valeurs toujours croissantes de m, la somme $v_0+v_1+\cdots+v_m$ s'approche indéfiniment d'une certaine limite. Cette limite s'appellera *la somme de la série.* Dans le cas contraire la série sera dite divergente, et elle n'a pas de somme. D'après cette définition, pour qu'une série soit convergente, il est nécessaire et il suffit que pour des valeurs toujours croissantes de m, la somme $v_m+v_{m+1}+\cdots+v_{m+n}$ s'approche indéfiniment de zéro, quelle que soit la valeur de n.

Donc, dans une série convergente quelconque, le terme général v_m s'approchera indéfiniment de zéro*).

Théorème I. Si en désignant par ϱ_0, ϱ_1, ϱ_2 ... une série de quantités positives, le quotient $\frac{\varrho_{m+1}}{\varrho_m}$, pour des valeurs toujours croissantes de m, s'approche indéfiniment d'une limite α plus grande que 1, la série

*) Pour abréger, on représentera dans ce mémoire par ω une quantité qui peut être plus petite que toute quantité donnée.

$$\varepsilon_0\varrho_0+\varepsilon_1\varrho_1+\varepsilon_2\varrho_2+\cdots+\varepsilon_m\varrho_m+\cdots,$$

où ε_m est une quantité qui pour des valeurs toujours croissantes de m ne s'approche pas indéfiniment de zéro, sera nécessairement divergente.

Théorème II. Si dans une série de quantités positives $\varrho_0+\varrho_1+\varrho_2+\cdots+\varrho_m+\cdots$ le quotient $\frac{\varrho_{m+1}}{\varrho_m}$, pour des valeurs toujours croissantes de m, s'approche indéfiniment d'une limite α plus petite que 1, la série

$$\varepsilon_0\varrho_0+\varepsilon_1\varrho_1+\varepsilon_2\varrho_2+\cdots+\varepsilon_m\varrho_m+\cdots,$$

où ε_0, ε_1, ε_2 etc. sont des quantités qui ne surpassent pas l'unité, sera nécessairement convergente.

En effet, d'après la supposition, on peut toujours prendre m assez grand pour que $\varrho_{m+1}<\alpha\varrho_m$, $\varrho_{m+2}<\alpha\varrho_{m+1}$, $\ldots$ $\varrho_{m+n}<\alpha\varrho_{m+n-1}$. Il suit de là que $\varrho_{m+k}<\alpha^k\varrho_m$ et par suite

$$\varrho_m+\varrho_{m+1}+\cdots+\varrho_{m+n}<\varrho_m(1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^n)<\frac{\varrho_m}{1-\alpha},$$

donc, à plus forte raison

$$\varepsilon_m\varrho_m+\varepsilon_{m+1}\varrho_{m+1}+\cdots+\varepsilon_{m+n}\varrho_{m+n}<\frac{\varrho_m}{1-\alpha}.$$

Or, puisque $\varrho_{m+k}<\alpha^k\varrho_m$ et $\alpha<1$, il est clair que ϱ_m et par conséquent la somme

$$\varepsilon_m\varrho_m+\varepsilon_{m+1}\varrho_{m+1}+\cdots+\varepsilon_{m+n}\varrho_{m+n}$$

aura zéro pour limite. La série ci-dessus est donc convergente.

Théorème III. En désignant par t_0, t_1, t_2, $\ldots$ t_m $\ldots$ une série de quantités quelconques, si $p_m=t_0+t_1+t_2+\cdots+t_m$ est toujours moindre qu'une quantité déterminée δ, on aura

$$r=\varepsilon_0 t_0+\varepsilon_1 t_1+\varepsilon_2 t_2+\cdots+\varepsilon_m t_m<\delta\varepsilon_0,$$

où ε_0, ε_1, ε_2 $\ldots$ sont des quantités positives décroissantes.

En effet, on a

$$t_0=p_0,\ t_1=p_1-p_0,\ t_2=p_2-p_1 \text{ etc.}$$

donc

$$r=\varepsilon_0 p_0+\varepsilon_1(p_1-p_0)+\varepsilon_2(p_2-p_1)+\cdots+\varepsilon_m(p_m-p_{m-1}),$$

ou bien

$$r=p_0(\varepsilon_0-\varepsilon_1)+p_1(\varepsilon_1-\varepsilon_2)+\cdots+p_{m-1}(\varepsilon_{m-1}-\varepsilon_m)+p_m\varepsilon_m.$$

Or les différences $\varepsilon_0-\varepsilon_1$, $\varepsilon_1-\varepsilon_2$, ... étant positives, la quantité r sera évidemment moindre que $\delta\varepsilon_0$.

Définition. Une fonction fx sera dite *fonction continue* de x entre les limites $x=a$ et $x=b$, si pour une valeur quelconque de x comprise entre ces limites, la quantité $f(x-\beta)$, pour des valeurs toujours décroissantes de β, s'approche indéfiniment de la limite fx.

Théorème IV. Si la série

$$f\alpha=v_0+v_1\alpha+v_2\alpha^2+\cdots+v_m\alpha^m+\cdots$$

est convergente pour une certaine valeur δ de α, elle sera aussi convergente pour toute valeur moindre que δ, et, pour des valeurs toujours décroissantes de β, la fonction $f(\alpha-\beta)$ s'approchera indéfiniment de la limite $f\alpha$, en supposant que α soit égal ou inférieur à δ.

Soit

$$v_0+v_1\alpha+\cdots+v_{m-1}\alpha^{m-1}=\varphi\alpha,$$
$$v_m\alpha^m+v_{m+1}\alpha^{m+1}+\cdots=\psi\alpha,$$

on aura

$$\psi\alpha=\left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^m v_m\delta^m+\left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^{m+1}v_{m+1}\delta^{m+1}+\cdots;$$

donc, d'après le théorème III, $\psi\alpha<\left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^m p$, p désignant la plus grande des quantités $v_m\delta^m$, $v_m\delta^m+v_{m+1}\delta^{m+1}$, $v_m\delta^m+v_{m+1}\delta^{m+1}+v_{m+2}\delta^{m+2}$ etc. On pourra donc pour toute valeur de α, égale ou inférieure à δ, prendre m assez grand pour qu'on ait

$$\psi\alpha=\omega.$$

Or $f\alpha=\varphi\alpha+\psi\alpha$, donc $f\alpha-f(\alpha-\beta)=\varphi\alpha-\varphi(\alpha-\beta)+\omega$.

De plus, $\varphi\alpha$ étant une fonction entière de α, on peut prendre β assez petit pour que

$$\varphi\alpha-\varphi(\alpha-\beta)=\omega;$$

donc on a de même

$$f\alpha-f(\alpha-\beta)=\omega,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Théorème V. Soit

$$v_0+v_1\delta+v_2\delta^2+\cdots$$

une série convergente, dans laquelle v_0, v_1, v_2 ... sont des fonctions conti-

nues d'une même quantité variable x entre les limites $x=a$ et $x=b$, la série

$$fx=v_0+v_1\alpha+v_2\alpha^2+\cdots,$$

où $\alpha<\delta$, sera convergente et fonction continue de x entre les mêmes limites.

Il est déjà démontré que la série fx est convergente. On peut démontrer comme il suit, que la fonction fx est continue.

Soit

$$v_0+v_1\alpha+\cdots+v_{m-1}\alpha^{m-1}=\varphi x,$$
$$v_m\alpha^m+v_{m+1}\alpha^{m+1}+\cdots=\psi x,$$

on aura

$$fx=\varphi x+\psi x.$$

Or

$$\psi x=\left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^m v_m\delta^m+\left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^{m+1} v_{m+1}\delta^{m+1}+\left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^{m+2} v_{m+2}\delta^{m+2}+\cdots;$$

donc en désignant par θx la plus grande des quantités $v_m\delta^m$, $v_m\delta^m+v_{m+1}\delta^{m+1}$, $v_m\delta^m+v_{m+1}\delta^{m+1}+v_{m+2}\delta^{m+2}$ etc., on aura en vertu du théorème III:

$$\psi x<\left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^m\theta x.$$

Il s'ensuit qu'on peut prendre m assez grand pour qu'on ait $\psi x=\omega$, et que par conséquent on ait aussi

$$fx=\varphi x+\omega,$$

où ω est moindre que toute quantité assignable.

On a de même

$$f(x-\beta)=\varphi(x-\beta)+\omega,$$

donc

$$fx-f(x-\beta)=\varphi x-\varphi(x-\beta)+\omega.$$

Or d'après la forme de φx il est clair qu'on peut prendre β assez petit pour qu'on ait

$$\varphi x-\varphi(x-\beta)=\omega,$$

d'où l'on tire

$$fx-f(x-\beta)=\omega.$$

Donc la fonction fx est continue*).

*) Dans l'ouvrage cité de M. *Cauchy* on trouve (p. 131) le théorème suivant: "Lors-"que les différens termes de la série, $u_0+u_1+u_2+\cdots$ sont des fonctions d'une

Théorème VI. Lorsqu'on désigne par ϱ_0, ϱ_1, ϱ_2 etc. ϱ_0', ϱ_1', ϱ_2' etc. les valeurs numériques des membres respectifs des deux séries convergentes

$$v_0+v_1+v_2+\cdots=p,$$
$$v_0'+v_1'+v_2'+\cdots=p',$$

si les séries

$$\varrho_0+\varrho_1+\varrho_2+\cdots$$
$$\varrho_0'+\varrho_1'+\varrho_2'+\cdots$$

sont de même convergentes, la série $r_0+r_1+r_2+\cdots$, dont le terme général est,

$$r_m=v_0v_m'+v_1v'_{m-1}+v_2v'_{m-2}+\cdots+v_mv_0',$$

sera de même convergente, et aura pour somme

$$(v_0+v_1+v_2+\cdots)(v_0'+v_1'+v_2'+\cdots).$$

Démonstration. En faisant,

$$p_m=v_0+v_1+\cdots+v_m,$$
$$p_m'=v_0'+v_1'+\cdots+v_m',$$

on voit aisément que

$$\text{(a)}\quad r_0+r_1+r_2+\cdots+r_{2m}=p_mp_m'+[p_0v_{2m}'+p_1v'_{2m-1}+\cdots+p_{m-1}v'_{m+1}\,(=t)$$
$$+p_0'v_{2m}+p_1'v_{2m-1}+\cdots+p'_{m-1}v_{m+1}\,(=t')].$$

Soit

$$\varrho_0+\varrho_1+\varrho_2+\cdots=u,$$
$$\varrho_0'+\varrho_1'+\varrho_2'+\cdots=u',$$

il est clair que, sans égard au signe, on aura,

$$t<u(\varrho'_{2m}+\varrho'_{2m-1}+\cdots+\varrho'_{m+1})$$
$$t'<u'(\varrho_{2m}+\varrho_{2m-1}+\cdots+\varrho_{m+1}).$$

"même variable x, continues par rapport à cette variable dans le voisinage d'une "valeur particulière pour laquelle la série est convergente, la somme s de la série "est aussi, dans le voisinage de cette valeur particulière, fonction continue de x." Mais il me semble que ce théorème admet des exceptions. Par exemple la série

$$\sin x-\tfrac{1}{2}\sin 2x+\tfrac{1}{3}\sin 3x-\cdots$$

est discontinue pour toute valeur $(2m+1)\pi$ de x, m étant un nombre entier. Il y a, comme on sait, beaucoup de séries de cette espèce.

Or les séries $\rho_0+\rho_1+\rho_2+\cdots$ et $\rho_0'+\rho_1'+\rho_2'+\cdots$ étant convergentes, les quantités t et t', pour des valeurs toujours croissantes de m, s'approcheront indéfiniment de la limite zéro. Donc en faisant dans l'équation (a) m infini, on aura

$$r_0+r_1+r_2+r_3+\cdots=(v_0+v_1+v_2+\cdots)(v_0'+v_1'+v_2'+\cdots).$$

Soient $t_0, t_1, t_2, \ldots, t_0', t_1', t_2' \ldots$ deux séries de quantités positives ou négatives, dont les termes généraux s'approchent indéfiniment de zéro, il suit du théorème II que les séries $t_0+t_1\alpha+t_2\alpha^2+\cdots$ et $t_0'+t_1'\alpha+t_2'\alpha^2+\cdots$, où α désigne une quantité inférieure à l'unité, doivent être convergentes. Il en sera de même en attribuant à chaque terme sa valeur numérique, donc en vertu du théorème précédent:

$$(b)\quad \begin{cases} (t_0+t_1\alpha+t_2\alpha^2+\cdots)(t_0'+t_1'\alpha+t_2'\alpha^2+\cdots) \\ \qquad =t_0t_0'+(t_1t_0'+t_0t_1')\alpha+(t_2t_0'+t_1t_1'+t_0t_2')\alpha^2+\cdots \\ \qquad\quad +(t_mt_0'+t_{m-1}t_1'+t_{m-2}t_2'+\cdots+t_0t_m')\alpha^m+\cdots \end{cases}$$

Maintenant si l'on suppose que les trois séries,

$$t_0+t_1+t_2+\cdots$$
$$t_0'+t_1'+t_2'+\cdots$$
$$t_0t_0'+(t_1t_0'+t_0t_1')+(t_2t_0'+t_1t_1'+t_0t_2')+\cdots$$

soient convergentes, on trouvera, en vertu du théorème IV, en faisant dans l'équation (b) α converger vers l'unité:

$$(t_0+t_1+t_2+\cdots)(t_0'+t_1'+t_2'+\cdots)$$
$$=t_0t_0'+(t_1t_0'+t_0t_1')+(t_2t_0'+t_1t_1'+t_0t_2')+\cdots$$

3.

Examinons maintenant la série proposée,

$$1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1.2}x^2+\cdots.$$

En la désignant par φm, et faisant pour abréger, $1=m_0$, $\frac{m}{1}=m_1$, $\frac{m(m-1)}{1.2}=m_2$, et en général $\frac{m(m-1)\ldots(m-\mu+1)}{1.2\ldots\mu}=m_\mu$, on aura

(1) $$\varphi m = m_0 + m_1 x + m_2 x^2 + \cdots + m_\mu x^\mu + \cdots$$

Il s'agit d'abord de trouver les valeurs de m et de x pour lesquelles la série est convergente.

Les quantités m et x étant généralement imaginaires, soit*)

$$x = a + b\,i,\ \ m = k + k'\,i,$$

où a, b, k, k' sont des quantités réelles. En substituant ces valeurs dans l'équation (1), elle prendra la forme

$$\varphi m = p + q\,i,$$

où p et q sont des séries dont les termes ont des valeurs réelles. On peut trouver ces séries de la manière suivante: Soit

$$(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}} = \alpha,\ \ \frac{a}{\alpha} = \cos\varphi,\ \ \frac{b}{\alpha} = \sin\varphi,$$

l'on aura

$$x = \alpha(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

où α et φ sont des quantités réelles, α étant en outre positif. Si l'on fait de plus

$$\frac{m-\mu+1}{\mu} = \delta_\mu(\cos\gamma_\mu + i\sin\gamma_\mu) = \frac{k+k'i-\mu+1}{\mu},$$

on trouvera

$$\delta_\mu = \left[\left(\frac{k-\mu+1}{\mu}\right)^2 + \left(\frac{k'}{\mu}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}};\ \ \cos\gamma_\mu = \frac{k-\mu+1}{\mu\delta_\mu};\ \ \sin\gamma_\mu = \frac{k'}{\mu\delta_\mu}.$$

Si dans l'expression

$$\frac{m-\mu+1}{\mu} = \delta_\mu(\cos\gamma_\mu + i\sin\gamma_\mu),$$

on fait successivement μ égal à 1, 2, 3, ... μ, on obtiendra μ équations qui multipliées terme à terme donneront

$$m_\mu = \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-\mu+1)}{1.2.3\dots.\mu}$$
$$= \delta_1\delta_2\delta_3\dots\delta_\mu[\cos(\gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_\mu) + i\sin(\gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_\mu)].$$

On tire de là, en multipliant par

*) Pour abréger les formules nous écrivons partout dans ce mémoire i au lieu de $\sqrt{-1}$.

Note des éd.

$$x^\mu = \alpha^\mu(\cos\varphi + i\sin\varphi)^\mu = \alpha^\mu(\cos\mu\varphi + i\sin\mu\varphi):$$

$$m_\mu x^\mu = \alpha^\mu \delta_1\delta_2\delta_3\ldots\delta_\mu[\cos(\mu\varphi+\gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_\mu) + i\sin(\mu\varphi+\gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_\mu)],$$

ou bien en faisant pour abréger

$$\delta_1\delta_2\delta_3\ldots\delta_\mu = \lambda_\mu,\quad \mu\varphi+\gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_\mu = \theta_\mu:$$

$$m_\mu x^\mu = \lambda_\mu\alpha^\mu(\cos\theta_\mu + i\sin\theta_\mu).$$

L'expression (1) se change par là en celle-ci,

$$\varphi m = 1 + \lambda_1\alpha(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) + \lambda_2\alpha^2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) + \cdots + \lambda_\mu\alpha^\mu(\cos\theta_\mu + i\sin\theta_\mu) + \cdots,$$

ou en celle-ci,

$$\varphi m = 1 + \lambda_1\alpha\cos\theta_1 + \lambda_2\alpha^2\cos\theta_2 + \cdots + \lambda_\mu\alpha^\mu\cos\theta_\mu + \cdots + i(\lambda_1\alpha\sin\theta_1 + \lambda_2\alpha^2\sin\theta_2 + \cdots + \lambda_\mu\alpha^\mu\sin\theta_\mu + \cdots).$$

On a donc

$$(2)\quad \begin{cases} p = 1 + \lambda_1\alpha\cos\theta_1 + \lambda_2\alpha^2\cos\theta_2 + \cdots + \lambda_\mu\alpha^\mu\cos\theta_\mu + \cdots \\ q = \quad\lambda_1\alpha\sin\theta_1 + \lambda_2\alpha^2\sin\theta_2 + \cdots + \lambda_\mu\alpha^\mu\sin\theta_\mu + \cdots \end{cases}$$

Or je dis que ces séries seront *divergentes* ou *convergentes*, selon que α est *supérieur* ou *inférieur* à l'unité.

De l'expression de λ_μ on tire $\lambda_{\mu+1} = \delta_{\mu+1}\lambda_\mu$, donc

$$\lambda_{\mu+1}\alpha^{\mu+1} = \alpha\delta_{\mu+1}\lambda_\mu\alpha^\mu,$$

et

$$\frac{\lambda_{\mu+1}\alpha^{\mu+1}}{\lambda_\mu\alpha^\mu} = \alpha\delta_{\mu+1};$$

mais on a

$$\delta_{\mu+1} = \left[\left(\frac{k-\mu}{\mu+1}\right)^2 + \left(\frac{k'}{\mu+1}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

donc pour des valeurs toujours croissantes de μ, δ_μ s'approchera de la limite 1, et par suite $\frac{\lambda_{\mu+1}\alpha^{\mu+1}}{\lambda_\mu\alpha^\mu}$ de la limite α. Donc en vertu des théorèmes I et II du paragraphe précédent les séries p et q seront divergentes ou convergentes, suivant que α est supérieur ou inférieur à l'unité. Il en est donc de même de la série proposée φm.

Le cas où $\alpha = 1$, sera traité plus bas.

Comme la série φm est convergente pour toute valeur de α inférieure

à l'unité, la somme en sera une certaine fonction de m et de x. On peut, comme il suit, établir une propriété de cette fonction à l'aide de laquelle on peut la trouver: On a

$$\varphi m = m_0 + m_1 x + m_2 x^2 + \cdots + m_\mu x^\mu + \cdots,$$
$$\varphi n = n_0 + n_1 x + n_2 x^2 + \cdots + n_\mu x^\mu + \cdots,$$

où n_μ désigne la valeur de m_μ pour $m = n$. On en conclut d'après le théorème VI:

$$\varphi m . \varphi n = t_0 t_0' + (t_0 t_1' + t_1 t_0') + (t_0 t_2' + t_1 t_1' + t_2 t_0') + \cdots$$
$$+ (t_0 t_\mu' + t_1 t'_{\mu-1} + t_2 t'_{\mu-2} + \cdots + t_\mu t_0') + \cdots,$$

où $t_\mu = m_\mu x^\mu$, $t_\mu' = n_\mu x^\mu$, en supposant que la série du second membre soit convergente. En substituant les valeurs de t_μ et t_μ', on aura

$$\varphi m . \varphi n = m_0 n_0 + (m_0 n_1 + m_1 n_0) x + (m_0 n_2 + m_1 n_1 + m_2 n_0) x^2 + \cdots$$
$$+ (m_0 n_\mu + m_1 n_{\mu-1} + m_2 n_{\mu-2} + \cdots + m_\mu n_0) x^\mu + \cdots$$

Or, d'après une propriété connue de la fonction m_μ, on a

$$(m+n)_\mu = m_0 n_\mu + m_1 n_{\mu-1} + m_2 n_{\mu-2} + \cdots + m_\mu n_0,$$

$(m+n)_\mu$ désignant la valeur de m_μ lorsqu'on y substitue $m+n$ pour m. On aura donc par substitution

$$\varphi m . \varphi n = (m+n)_0 + (m+n)_1 x + (m+n)_2 x^2 + \cdots + (m+n)_\mu x^\mu + \cdots$$

Or d'après ce qui précède, le second membre de cette équation est une série convergente et précisément la même chose que $\varphi(m+n)$; donc

$$(3) \qquad \varphi m . \varphi n = \varphi(m+n).$$

Cette équation exprime une propriété fondamentale de la fonction φm. De cette propriété nous déduirons une expression de la fonction sous forme finie à l'aide des fonctions exponentielles, logarithmiques et circulaires.

Comme on l'a vu plus haut, la fonction φm est de la forme $p + q i$, p et q étant toujours réels et fonctions des quantités k, k', α et φ, et $m = k + k' i$, $x = \alpha(\cos\varphi + i \sin\varphi)$. Soit

$$p + q i = r(\cos s + i \sin s),$$

on trouvera

$$(p^2 + q^2)^{\frac{1}{2}} = r, \quad \frac{p}{r} = \cos s, \quad \frac{q}{r} = \sin s,$$

r étant toujours positif et s une quantité réelle. Soit

$$r=f(k,k'),\quad s=\psi(k,k'),$$

on aura

$$(3')\qquad p+qi=\varphi(k+k'i)=f(k,k')[\cos\psi(k,k')+i\sin\psi(k,k')].$$

On en tire, en mettant successivement l, l' et $k+l$, $k'+l'$ à la place de k et k',

$$\varphi(l+l'i)=f(l,l')[\cos\psi(l,l')+i\sin\psi(l,l')],$$
$$\varphi[k+l+(k'+l')i]$$
$$=f(k+l,k'+l')[\cos\psi(k+l,k'+l')+i\sin\psi(k+l,k'+l')].$$

Or en vertu de l'équation $\varphi m.\varphi n=\varphi(m+n)$, on a

$$\varphi[k+l+(k'+l')i]=\varphi(k+k'i)\varphi(l+l'i),$$

en faisant $m=k+k'i$, $n=l+l'i$. Donc en substituant, on obtient

$$f(k+l,k'+l')[\cos\psi(k+l,k'+l')+i\sin\psi(k+l,k'+l')]$$
$$=f(k,k')f(l,l')[\cos(\psi(k,k')+\psi(l,l'))+i\sin(\psi(k,k')+\psi(l,l'))].$$

Cette équation donne, lorsqu'on sépare les termes réels des termes imaginaires,

$$f(k+l,k'+l')\cos\psi(k+l,k'+l')=f(k,k')f(l,l')\cos[\psi(k,k')+\psi(l,l')],$$
$$f(k+l,k'+l')\sin\psi(k+l,k'+l')=f(k,k')f(l,l')\sin[\psi(k,k')+\psi(l,l')].$$

En faisant les carrés et ajoutant les équations membre à membre, on aura

$$[f(k+l,k'+l')]^2=[f(k,k')f(l,l')]^2,$$

d'où

$$(4)\qquad f(k+l,k'+l')=f(k,k')f(l,l').$$

En vertu de cette équation les précédentes se transforment en celles-ci:

$$\cos\psi(k+l,k'+l')=\cos[\psi(k,k')+\psi(l,l')],$$
$$\sin\psi(k+l,k'+l')=\sin[\psi(k,k')+\psi(l,l')],$$

d'où l'on tire,

$$(5)\qquad \psi(k+l,k'+l')=2m\pi+\psi(k,k')+\psi(l,l'),$$

m étant un nombre entier positif ou négatif.

Maintenant il s'agit de tirer les fonctions $f(k,k')$ et $\psi(k,k')$ des

équations (4) et (5). D'abord je dis qu'elles sont des fonctions continues de k et k' entre des limites quelconques de ces variables. En effet, d'après le théorème V, p et q sont évidemment des fonctions continues. Or on a

$$f(k,k')=(p^2+q^2)^{\frac{1}{2}},\quad \cos\psi(k,k')=\frac{p}{f(k,k')},\quad \sin\psi(k,k')=\frac{q}{f(k,k')};$$

donc $f(k,k')$, de même que $\cos\psi(k,k')$ et $\sin\psi(k,k')$, est une fonction continue. On peut donc supposer que $\psi(k,k')$ est aussi une fonction continue. Nous allons d'abord examiner l'équation (5). $\psi(k,k')$ étant une fonction continue, il faut que m ait la même valeur pour toutes les valeurs de k, k', l, l'. En faisant donc successivement $l=0$, $k=0$, on obtient

$$\psi(k,k'+l')=2m\pi+\psi(k,k')+\psi(0,l'),$$
$$\psi(l,k'+l')=2m\pi+\psi(0,k')+\psi(l,l').$$

En éliminant entre ces équations et l'équation (5) les deux quantités $\psi(k,k')$ et $\psi(l,l')$, on trouvera

$$\psi(k,k'+l')+\psi(l,k'+l')=2m\pi+\psi(0,k')+\psi(0,l')+\psi(k+l,k'+l').$$

Soit pour abréger

$$(6)\qquad \begin{cases}\psi(k,k'+l')=\theta k,\\ 2m\pi+\psi(0,k')+\psi(0,l')=a,\end{cases}$$

on aura

$$(7)\qquad \theta k+\theta l=a+\theta(k+l).$$

En faisant ici successivement $l=k, 2k, \ldots \varrho k$, on aura

$$2\theta k=a+\theta(2k),$$
$$\theta k+\theta(2k)=a+\theta(3k),$$
$$\theta k+\theta(3k)=a+\theta(4k),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\theta k+\theta(\varrho-1)k=a+\theta(\varrho k).$$

En ajoutant ces équations, on trouve

$$(7')\qquad \varrho\,\theta k=(\varrho-1)a+\theta(\varrho k).$$

On en tire, en faisant $k=1$,

$$\theta\varrho=\varrho[\theta(1)-a]+a,$$

ou bien en faisant $\theta(1)-a=c$,

(8) $$\theta\varrho=c\varrho+a.$$

Voilà donc la valeur de la fonction θk, lorsque k est un nombre entier. Mais la fonction θk aura la même forme pour toute valeur de k, ce qu'on peut démontrer aisément comme il suit. Si l'on pose dans l'équation (7') $k=\frac{\mu}{\varrho}$, μ étant un nombre entier, on en tire $\varrho.\theta\left(\frac{\mu}{\varrho}\right)=(\varrho-1)a+\theta\mu$. Or en vertu de l'équation (8)

$$\theta\mu=c\mu+a,$$

donc en substituant et divisant par ϱ, on trouve

$$\theta\left(\frac{\mu}{\varrho}\right)=c\left(\frac{\mu}{\varrho}\right)+a.$$

L'équation (8) a donc lieu pour toute valeur positive et rationnelle de ϱ.

Soit $l=-k$, l'équation (7) deviendra,

$$\theta k+\theta(-k)=a+\theta(0).$$

Il s'ensuit, en posant $k=0$,

$$\theta(0)=a,$$

et par conséquent

$$\theta(-k)=2a-\theta k.$$

Or k étant rationnel et positif, on a $\theta k=ck+a$, donc

$$\theta(-k)=-ck+a.$$

L'équation

(9) $$\theta k=ck+a,$$

a donc lieu pour toute valeur rationnelle de k et par conséquent, puisque θk est une fonction continue, pour toute valeur réelle de k.

Or $\theta k=\psi(k,k'+l')$, et $a=2m\pi+\psi(0,k')+\psi(0,l')$; faisant donc $c=\theta(k',l')$, on obtient

(10) $$\psi(k,k'+l')=\theta(k',l').k+2m\pi+\psi(0,k')+\psi(0,l').$$

On tire de là, en faisant $k=0$,

$$\psi(0,k'+l')=2m\pi+\psi(0,k')+\psi(0,l').$$

Cette équation étant de la même forme que l'équation (7), elle donnera de la même manière

$$\psi(0,k')=\beta'k'-2m\pi,$$

β' étant une quantité indépendante de k'.

En mettant l' à la place de k', on obtient $\psi(0,l')=-2m\pi+\beta'l'$. En substituant ces valeurs de $\psi(0,k')$ et de $\psi(0,l')$ dans l'équation (10) on en tirera

$$\psi(k,k'+l')=\theta(k',l').k+\beta'(k'+l')-2m\pi.$$

On voit par là que $\theta(k',l')$ est une fonction de $k'+l'$. En la désignant par $F(k'+l')$, on aura

$$\psi(k,k'+l')=F(k'+l').k+\beta'(k'+l')-2m\pi,$$

et par conséquent, en faisant $l'=0$,

$$\psi(k,k')=Fk'.k+\beta'k'-2m\pi.$$

En remarquant que

$$\psi(k,k'+l')=2m\pi+\psi(k,k')+\psi(0,l'),$$

$$\psi(0,l')=\beta'l'-2m\pi,$$

l'équation précédente donne

$$F(k'+l').k+\beta'(k'+l')-2m\pi=2m\pi+Fk'.k+\beta'k'-2m\pi+\beta'l'-2m\pi,$$

c'est-à-dire:

$$F(k'+l')=Fk'.$$

Donc faisant $k'=0$, on obtient $Fl'=F(0)=\beta=Fk'$. Par suite la valeur de $\psi(k,k')$ prend la forme,

(11) $$\psi(k,k')=\beta k+\beta'k'-2m\pi,$$

β et β' étant deux constantes. Cette valeur de $\psi(k,k')$ satisfera à l'équation (5) dans toute sa généralité comme il est aisé de le voir.

Maintenant, examinons l'équation,

$$f(k+l,k'+l')=f(k,k')f(l,l').$$

Puisque $f(k,k')$ est toujours une quantité positive, on peut poser

$$f(k,k')=e^{F(k,k')},$$

$F(k,k')$ désignant une fonction réelle continue de k et k'. En substituant et en prenant les logarithmes des deux membres, on trouvera

$$F(k+l,k'+l')=F(k,k')+F(l,l').$$

Comme cette équation coïncide avec l'équation (5), en mettant F à la place de ψ, et 0 à la place de m, elle donnera en vertu de l'équation (11)

(12) $$F(k,k')=\delta k+\delta' k',$$

δ et δ', de même que β et β', étant deux quantités indépendantes de k et de k'. La fonction $f(k,k')$ prendra donc la forme,

$$f(k,k')=e^{\delta k+\delta' k'}.$$

Les fonctions $\psi(k,k')$ et $f(k,k')$ étant trouvées de cette manière, on aura, d'après l'équation (3'),

(13) $$\varphi(k+k'i)=e^{\delta k+\delta' k'}[\cos(\beta k+\beta' k')+i\sin(\beta k+\beta' k')],$$

où il reste encore à trouver les quantités δ, δ', β, β', qui ne peuvent être que des fonctions de α et de φ. On a

$$\varphi(k+k'i)=p+qi,$$

p et q étant donnés par les équations (2). En séparant les quantités réelles des imaginaires, on aura

(14) $$\begin{cases} e^{\delta k+\delta' k'}\cos(\beta k+\beta' k')=1+\lambda_1\alpha\cos\theta_1+\lambda_2\alpha^2\cos\theta_2+\cdots \\ \qquad\qquad +\lambda_\mu\alpha^\mu\cos\theta_\mu+\cdots \\ e^{\delta k+\delta' k'}\sin(\beta k+\beta' k') = \lambda_1\alpha\sin\theta_1+\lambda_2\alpha^2\sin\theta_2+\cdots \\ \qquad\qquad +\lambda_\mu\alpha^\mu\sin\theta_\mu+\cdots \end{cases}$$

Nous allons d'abord considérer le cas où m est réel, c'est-à-dire où $k'=0$. Alors les expressions (14) prennent la forme,

(15) $$\begin{cases} e^{\delta k}\cos\beta k=1+\frac{k}{1}\alpha\cos\varphi+\frac{k(k-1)}{1.2}\alpha^2\cos 2\varphi \\ \qquad\qquad +\frac{k(k-1)(k-2)}{1.2.3}\alpha^3\cos 3\varphi+\cdots=f\alpha \\ e^{\delta k}\sin\beta k = \frac{k}{1}\alpha\sin\varphi+\frac{k(k-1)}{1.2}\alpha^2\sin 2\varphi \\ \qquad\qquad +\frac{k(k-1)(k-2)}{1.2.3}\alpha^3\sin 3\varphi+\cdots=\theta\alpha. \end{cases}$$

Pour trouver δ et β, posons $k=1$, on aura

$$e^\delta\cos\beta=1+\alpha\cos\varphi;\ e^\delta\sin\beta=\alpha\sin\varphi.$$

On en tire

$$e^\delta=(1+2\alpha\cos\varphi+\alpha^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$\cos\beta=\frac{1+\alpha\cos\varphi}{(1+2\alpha\cos\varphi+\alpha^2)^{\frac{1}{2}}},\quad \sin\beta=\frac{\alpha\sin\varphi}{(1+2\alpha\cos\varphi+\alpha^2)^{\frac{1}{2}}},$$

$$\tang\beta=\frac{\alpha\sin\varphi}{1+\alpha\cos\varphi}.$$

Cette dernière équation donne, en désignant par s la plus petite de toutes les valeurs de β qui y satisfasse, et qui est toujours renfermée entre les limites $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$,

$$\beta=s+\mu\pi,$$

μ étant un nombre entier positif ou négatif. Donc les équations (15) se changent en celles-ci:

$$f\alpha=e^{\delta k}\cos k(s+\mu\pi)=e^{\delta k}\cos ks\cos k\mu\pi-e^{\delta k}\sin ks.\sin k\mu\pi,$$
$$\theta\alpha=e^{\delta k}\sin k(s+\mu\pi)=e^{\delta k}\sin ks\cos k\mu\pi+e^{\delta k}\cos ks.\sin k\mu\pi.$$

De ces équations on tire

$$\cos k\mu\pi=e^{-\delta k}(f\alpha.\cos ks+\theta\alpha.\sin ks),$$
$$\sin k\mu\pi=e^{-\delta k}(\theta\alpha.\cos ks-f\alpha.\sin ks).$$

Or, d'après le théorème IV, $\theta\alpha$ et $f\alpha$ sont des fonctions continues de α; par conséquent il faut que $\cos k\mu\pi$ et $\sin k\mu\pi$ conservent les mêmes valeurs pour toute valeur de α. Il suffit donc pour les trouver, d'attribuer à α une valeur quelconque. Soit $\alpha=0$, on aura, en remarquant qu'alors $e^{\delta}=1$, $f\alpha=1$, $\theta\alpha=0$, $s=0$,

$$\cos k\mu\pi=1,\ \sin k\mu\pi=0.$$

En substituant ces valeurs dans les expressions de $f\alpha$ et $\theta\alpha$, et en se rappelant que $e^{\delta}=(1+2\alpha\cos\varphi+\alpha^2)^{\frac{1}{2}}$, on obtiendra

$$f\alpha=(1+2\alpha\cos\varphi+\alpha^2)^{\frac{k}{2}}\cos ks,\quad \theta\alpha=(1+2\alpha\cos\varphi+\alpha^2)^{\frac{k}{2}}\sin ks.$$

Donc enfin les expressions (15) deviendront:

$$(16)\quad\begin{cases} 1+\frac{k}{1}\alpha\cos\varphi+\frac{k(k-1)}{1.2}\alpha^2\cos2\varphi+\frac{k(k-1)(k-2)}{1.2.3}\alpha^3\cos3\varphi+\cdots \\ \qquad =(1+2\alpha\cos\varphi+\alpha^2)^{\frac{k}{2}}\cos ks, \\ \frac{k}{1}\alpha\sin\varphi+\frac{k(k-1)}{1.2}\alpha^2\sin2\varphi+\frac{k(k-1)(k-2)}{1.2.3}\alpha^3\sin3\varphi+\cdots \\ \qquad =(1+2\alpha\cos\varphi+\alpha^2)^{\frac{k}{2}}\sin ks, \end{cases}$$

s étant renfermé entre les limites $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$ et satisfaisant à l'équation

$$\operatorname{tang} s=\frac{\alpha\sin\varphi}{1+\alpha\cos\varphi}.$$

Les expressions (16) ont été établies pour la première fois par M. *Cauchy* dans l'ouvrage cité plus haut.

On a supposé ici la quantité α moindre que l'unité. On verra plus bas que α peut aussi être égal à l'unité, lorsqu'on donne à la quantité k une valeur convenable.

Dans ce qui précède nous avons trouvé les quantités δ et β. Maintenant nous allons montrer comment on peut trouver les deux autres quantités inconnues δ' et β'. Faisant à cet effet dans les équations (14) $k=0$ et $k'=n$, on obtiendra

$$e^{\delta' n}\cos\beta' n=1+\lambda_1\alpha\cos\theta_1+\lambda_2\alpha^2\cos\theta_2+\cdots,$$
$$e^{\delta' n}\sin\beta' n=\lambda_1\alpha\sin\theta_1+\lambda_2\alpha^2\sin\theta_2+\cdots,$$

où $\lambda_\mu=\delta_1\delta_2\delta_3\ldots\delta_\mu$, $\theta_\mu=\mu\varphi+\gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_\mu$, δ_μ et γ_μ étant déterminés par les équations

$$\delta_\mu=\left[\left(\frac{\mu-1}{\mu}\right)^2+\left(\frac{n}{\mu}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}},\quad \cos\gamma_\mu=-\frac{\mu-1}{\mu\delta_\mu},\quad \sin\gamma_\mu=\frac{n}{\mu\delta_\mu}.$$

De ces équations on déduit les suivantes:

$$\frac{e^{\delta' n}\cos\beta' n-1}{n}=\frac{\lambda_1}{n}\alpha\cos\theta_1+\frac{\lambda_2}{n}\alpha^2\cos\theta_2+\cdots,$$
$$\frac{e^{\delta' n}\sin\beta' n}{n}=\frac{\lambda_1}{n}\alpha\sin\theta_1+\frac{\lambda_2}{n}\alpha^2\sin\theta_2+\cdots.$$

Or en supposant n positif on a $\lambda_1=\delta_1=n$, donc $\frac{\lambda_\mu}{n}=\delta_2\delta_3\ldots\delta_\mu$, et par suite

$$\frac{e^{\delta' n}\cos\beta' n-1}{n}=\alpha\cos\theta_1+\delta_2\alpha^2\cos\theta_2+\delta_2\delta_3\alpha^3\cos\theta_3+\cdots,$$
$$\frac{e^{\delta' n}\sin\beta' n}{n}=\alpha\sin\theta_1+\delta_2\alpha^2\sin\theta_2+\delta_2\delta_3\alpha^3\sin\theta_3+\cdots.$$

Ces séries sont convergentes pour toute valeur de n, zéro y compris, ce qu'on voit aisément par le théorème II. En faisant donc converger n vers la limite zéro, et remarquant que, d'après le théorème V, les séries sont des fonctions continues, on obtient

$$\delta' = \alpha\cos\theta_1' + \delta_2'\alpha^2\cos\theta_2' + \delta_2'\delta_3'\alpha^3\cos\theta_3' + \cdots,$$
$$\beta' = \alpha\sin\theta_1' + \delta_2'\alpha^2\sin\theta_2' + \delta_2'\delta_3'\alpha^3\sin\theta_3' + \cdots,$$

puisque δ' et β' sont les limites des quantités $\frac{e^{\delta' n}\cos\beta' n - 1}{n}$ et $\frac{e^{\delta' n}\sin\beta' n}{n}$; θ_μ' est la limite de θ_μ et δ_μ' celle de δ_μ. Or, d'après l'expression de δ_μ, on a $\delta_\mu' = \frac{\mu-1}{\mu}$; donc $\cos\gamma_\mu = -1$; $\sin\gamma_\mu = 0$ (lorsque $\mu > 1$), donc

$$\cos\theta_\mu' = \cos(\mu\varphi + \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_\mu) = +\sin\mu\varphi\,.\,(-1)^\mu,$$
$$\sin\theta_\mu' = \sin(\mu\varphi + \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_\mu) = -\cos\mu\varphi\,.\,(-1)^\mu,$$

où il faut se rappeler qu'en vertu de l'équation

$$\alpha i = \delta_1(\cos\gamma_1 + i\sin\gamma_1),$$

on a $\cos\gamma_1 = 0$, $\sin\gamma_1 = 1$. Donc les valeurs de β' et δ' seront celles-ci:

$$\beta' = \alpha\cos\varphi - \tfrac{1}{2}\alpha^2\cos 2\varphi + \tfrac{1}{3}\alpha^3\cos 3\varphi - \cdots,$$
$$\delta' = -\alpha\sin\varphi - \tfrac{1}{2}\alpha^2\sin 2\varphi + \tfrac{1}{3}\alpha^3\sin 3\varphi - \cdots.$$

De cette manière on a trouvé les quantités β' et δ' par des séries infinies. On peut aussi les exprimer sous forme finie. Car on tire de l'équation (15):

$$\frac{e^{\delta k}\cos\beta k - 1}{k} = \alpha\cos\varphi + \frac{k-1}{1\,.\,2}\alpha^2\cos 2\varphi + \frac{(k-1)(k-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\alpha^3\cos 3\varphi + \cdots,$$
$$\frac{e^{\delta k}\sin\beta k}{k} = \alpha\sin\varphi + \frac{k-1}{1\,.\,2}\alpha^2\sin 2\varphi + \frac{(k-1)(k-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\alpha^3\sin 3\varphi + \cdots.$$

On en déduit, en faisant converger k vers zéro,

$$(17)\quad \begin{cases} \delta = \alpha\cos\varphi - \tfrac{1}{2}\alpha^2\cos 2\varphi + \tfrac{1}{3}\alpha^3\cos 3\varphi - \cdots, \\ \beta = \alpha\sin\varphi - \tfrac{1}{2}\alpha^2\sin 2\varphi + \tfrac{1}{3}\alpha^3\sin 3\varphi - \cdots, \end{cases}$$

donc $\beta' = \delta$, $\delta' = -\beta$. Donc les expressions (14) prennent la forme

$$(18)\quad \begin{cases} 1 + \lambda_1\alpha\cos\theta_1 + \lambda_2\alpha^2\cos\theta_2 + \cdots + \lambda_\mu\alpha^\mu\cos\theta_\mu + \cdots \\ \qquad\qquad = e^{\delta k - \beta k'}\cos(\beta k + \delta k') = p, \\ \lambda_1\alpha\sin\theta_1 + \lambda_2\alpha^2\sin\theta_2 + \cdots + \lambda_\mu\alpha^\mu\sin\theta_\mu + \cdots \\ \qquad\qquad = e^{\delta k - \beta k'}\sin(\beta k + \delta k') = q, \end{cases}$$

où

$$\delta = \tfrac{1}{2}\log(1 + 2\alpha\cos\varphi + \alpha^2),\quad \beta = \text{arc.\,tang}\,\frac{\alpha\sin\varphi}{1+\alpha\cos\varphi};$$

or la somme de la série proposée étant égale à $p+qi$, on aura

$$1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1.2}x^2+\cdots+\frac{m(m-1)\ldots(m-\mu+1)}{1.2\ldots\mu}x^\mu+\cdots$$
$$=e^{\delta k-\beta k'}[\cos(\beta k+\delta k')+i\sin(\beta k+\delta k')].$$

Maintenant on a

$$m=k+k'i,\ x=\alpha(\cos\varphi+i\sin\varphi)=a+bi;$$

donc

$$\alpha=\sqrt{a^2+b^2},\ \alpha\cos\varphi=a,\ \alpha\sin\varphi=b,$$

$$\delta=\tfrac{1}{2}\log(1+2a+a^2+b^2)=\tfrac{1}{2}\log[(1+a)^2+b^2],\ \beta=\text{arc tang}\frac{b}{1+a}.$$

En substituant et en écrivant m pour k et n pour k', l'expression ci-dessus prend la forme:

(19)

$$1+\frac{m+ni}{1}(a+bi)+\frac{(m+ni)(m-1+ni)}{1\ .\ 2}(a+bi)^2$$
$$+\frac{(m+ni)(m-1+ni)(m-2+ni)}{1\ .\ 2\ .\ 3}(a+bi)^3+\cdots$$
$$+\frac{(m+ni)(m-1+ni)(m-2+ni)\ldots(m-\mu+1+ni)}{1\ .\ 2\ .\ 3\ .\ .\ .\ \mu}(a+bi)^\mu+\cdots$$
$$=\left[\cos\left(m\,\text{arc tang}\frac{b}{1+a}+\tfrac{1}{2}n\log[(1+a)^2+b^2]\right)+i\sin\left(m\,\text{arc tang}\frac{b}{1+a}+\tfrac{1}{2}n\log[(1+a)^2+b^2]\right)\right]$$
$$\times[(1+a)^2+b^2]^{\frac{m}{2}}e^{-n\,\text{arc tang}\frac{b}{1+a}}.$$

Cette expression a lieu comme nous l'avons vu, de même que l'expression (18), pour toute valeur de $\alpha=\sqrt{a^2+b^2}$ inférieure à l'unité.

En faisant p. ex. $b=0$, $n=0$, on a l'expression

$$(20)\qquad 1+\frac{m}{1}a+\frac{m(m-1)}{1.2}a^2+\cdots=(1+a)^m,$$

de laquelle nous tirerons parti ci-après.

4.

Dans ce qui précède on a trouvé la somme de la série proposée toutes les fois que $\alpha=\sqrt{a^2+b^2}$ est inférieur à l'unité. Il reste encore à examiner le cas où cette quantité est égale à 1.

Nous avons vu par le théorème IV que lorsque α s'approche indéfiniment de l'unité, la série

$$v_0+v_1\alpha+v_2\alpha^2+\cdots$$

s'approchera en même temps de la limite $v_0+v_1+v_2+\cdots$, en supposant que cette dernière série soit convergente. En faisant donc converger α vers l'unité dans les équations (18), on aura

$$(21)\quad\begin{cases}1+\lambda_1\cos\theta_1+\lambda_2\cos\theta_2+\cdots+\lambda_\mu\cos\theta_\mu+\cdots=e^{\delta_1k-\beta_1k'}\cos(\beta_1k+\delta_1k'),\\ \qquad\lambda_1\sin\theta_1+\lambda_2\sin\theta_2+\cdots+\lambda_\mu\sin\theta_\mu+\cdots=e^{\delta_1k-\beta_1k'}\sin(\beta_1k+\delta_1k'),\end{cases}$$

où δ_1 et β_1 sont les limites des quantités δ et β, en supposant que les séries, contenues dans ces équations, soient convergentes. Or il est clair que $\frac{1}{2}\log(2+2\cos\varphi)$ est la limite de δ, et que

$$\text{arc tang}\frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi}=\text{arc tang}\frac{2\cos\frac{1}{2}\varphi\sin\frac{1}{2}\varphi}{2(\cos\frac{1}{2}\varphi)^2}=\text{arc tang}(\text{tang}\tfrac{1}{2}\varphi)$$

est celle de β; on a donc

$$(22)\qquad \delta_1=\tfrac{1}{2}\log(2+2\cos\varphi),\quad \beta_1=\text{arc tang}(\text{tang}\tfrac{1}{2}\varphi).$$

Nous n'avons donc qu'à examiner dans quels cas les séries sont convergentes. A cet effet il faut distinguer trois cas: lorsque k est égal à -1, ou compris entre -1 et $-\infty$; lorsque k est égal à zéro ou compris entre 0 et $+\infty$, et lorsque k est compris entre 0 et -1.

Premier cas, lorsque k est égal à -1 ou compris entre -1 et $-\infty$. On a

$$\delta_\mu=\left[\left(\frac{k-\mu+1}{\mu}\right)^2+\left(\frac{k'}{\mu}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

En faisant donc $k=-1-n$, on a

$$\delta_\mu=\left[\left(\frac{n+\mu}{\mu}\right)^2+\left(\frac{k'}{\mu}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

d'où l'on voit que δ_μ est toujours égal ou supérieur à l'unité. Or on a $\lambda_\mu=\delta_1\delta_2\delta_3\ldots\delta_\mu$, donc pour des valeurs toujours croissantes de μ, λ_μ ne convergera pas vers zéro, donc en vertu du théorème I les séries (21) sont divergentes.

Deuxième cas, lorsque k est positif. Supposons que c soit une quantité positive inférieure à k, on aura

$$(\mu-k-1+c)^2=(\mu-k-1)^2+2c(\mu-k-1)+c^2,$$

donc

$$(\mu-k-1)^2+k'^2=(\mu-k-1+c)^2+k'^2-c^2-2c(\mu-k-1).$$

Si l'on fait

$$\mu>k+1-\tfrac{1}{2}c+\frac{k'^2}{2c},$$

il s'ensuit que $k'^2-c^2-2c(\mu-k-1)$ est négatif; par conséquent

$$(\mu-k-1)^2+k'^2<(\mu-k-1+c)^2,$$

c'est-à-dire:

$$\delta_\mu<\frac{\mu-k-1+c}{\mu},\quad \delta_\mu<1-\frac{1+k-c}{\mu}.$$

Si dans l'équation (20) on fait $\alpha=\frac{1}{\mu}$, $m=-n$, on aura

$$\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^{-n}=1-\frac{n}{\mu}+\frac{n(1+n)}{1.2}\frac{1}{\mu^2}-\cdots$$
$$=1-\frac{n}{\mu}+\frac{n(n+1)}{1.2}\frac{1}{\mu^2}\left(1-\frac{2+n}{3\mu}\right)+\cdots$$

Donc en faisant $n=1+k-c$, on voit aisément que

$$\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^{-1-k+c}>1-\frac{1+k-c}{\mu};$$

par conséquent

$$\delta_\mu<\left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)^{1+k-c},\quad \text{où}\quad \mu>k+1-\tfrac{1}{2}c+\frac{k'^2}{2c}\ (=\varrho),$$

donc

$$\delta_{\varrho+\mu}<\left(\frac{\varrho+\mu}{\varrho+\mu+1}\right)^{1+k-c},\quad \text{où}\quad \mu>0.$$

En posant successivement $\mu=1, 2, 3\ldots\mu$, et en faisant le produit des résultats, on obtiendra

$$\delta_{\varrho+1}\,\delta_{\varrho+2}\ldots\delta_{\varrho+\mu}<\left(\frac{\varrho+1}{\varrho+\mu+1}\right)^{1+k-c};$$

or $\lambda_{\mu+\varrho}=\delta_1\,\delta_2\,\delta_3\ldots\delta_{\mu+\varrho}$, donc

$$\lambda_{\mu+\varrho}<\delta_1\,\delta_2\ldots\delta_\varrho\left(\frac{\varrho+1}{\varrho+\mu+1}\right)^{1+k-c},$$

par conséquent lorsqu'on fait $\mu=0,\ 1,\ 2\ldots\mu$,

$$\lambda_\varrho+\lambda_{\varrho+1}+\cdots+\lambda_{\varrho+\mu}<\delta_1\,\delta_2\ldots\delta_\varrho(\varrho+1)^{1+k-c}\left(\frac{1}{(\varrho+1)^{1+k-c}}+\frac{1}{(\varrho+2)^{1+k-c}}+\cdots+\frac{1}{(\varrho+\mu+1)^{1+k-c}}\right).$$

Si maintenant dans l'expression (20) on fait $a=-\frac{1}{\varrho+\mu+1}$, $m=-k+c$, on aura

$$\left(1-\frac{1}{\varrho+\mu+1}\right)^{c-k}=1+\frac{k-c}{\varrho+\mu+1}+\frac{(k-c)(k-c+1)}{1.2(\varrho+\mu+1)^2}+\cdots,$$

donc en se rappelant que $k>c$:

$$\left(\frac{\varrho+\mu}{\varrho+\mu+1}\right)^{c-k}>1+\frac{k-c}{\varrho+\mu+1}.$$

Il s'ensuit, en divisant par $(k-c)(\varrho+\mu+1)^{k-c}$,

$$\frac{1}{(\varrho+\mu+1)^{1+k-c}}<\frac{1}{k-c}\left(\frac{1}{(\varrho+\mu)^{k-c}}-\frac{1}{(\varrho+\mu+1)^{k-c}}\right).$$

Cela donne, en faisant $\mu=0,\ 1,\ 2\ldots\mu$ et ajoutant,

$$\frac{1}{(\varrho+1)^{1+k-c}}+\frac{1}{(\varrho+2)^{1+k-c}}+\cdots+\frac{1}{(\varrho+\mu+1)^{1+k-c}}<\frac{1}{k-c}\left(\frac{1}{\varrho^{k-c}}-\frac{1}{(\varrho+\mu+1)^{k-c}}\right)<\frac{1}{k-c}\cdot\frac{1}{\varrho^{k-c}}.$$

Il s'ensuit que

$$\lambda_\varrho+\lambda_{\varrho+1}+\cdots+\lambda_{\varrho+\mu}<\delta_1\,\delta_2\,\delta_3\ldots\delta_\varrho\frac{(\varrho+1)^{1+k-c}}{(k-c)\varrho^{k-c}},$$

pour toute valeur de μ. Donc la série $1+\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2+\cdots$, dont tous les termes sont positifs, est convergente, et par conséquent, d'après le théorème II, les séries

$$1+\lambda_1\cos\theta_1+\lambda_2\cos\theta_2+\cdots+\lambda_\mu\cos\theta_\mu+\cdots$$
$$\lambda_1\sin\theta_1+\lambda_2\sin\theta_2+\cdots+\lambda_\mu\sin\theta_\mu+\cdots$$

seront de même convergentes.

Troisième cas, lorsque k est égal à zéro ou compris entre zéro et -1. Dans ce cas les séries ci-dessus seront convergentes pour toute valeur de k, pourvu que φ ne soit pas égal à $(2n+1)\pi$. Cela peut se démontrer comme il suit: Soit

$$m=k+k'i,\quad x=\cos\varphi+i\sin\varphi,$$

$$1+m_1x+m_2x^2+m_3x^3+\cdots+m_nx^n=p_n.$$

En multipliant par $1+x$, on obtient

$$1+(m_1+1)x+(m_2+m_1)x^2+\cdots+(m_n+m_{n-1})x^n+m_nx^{n+1}=p_n(1+x).$$

Or on sait que

$$m_1+1=(m+1)_1,\ m_2+m_1=(m+1)_2\ \ldots,\ m_n+m_{n-1}=(m+1)_n,$$

donc en substituant:

$$1+(m+1)_1x+(m+1)_2x^2+\cdots+(m+1)_nx^n=-m_nx^{n+1}+p_n(1+x).$$

Maintenant, si l'on fait $n=\infty$, le premier membre de cette équation sera, d'après le cas précédent, une série convergente. En la désignant par s, on aura

$$s=p_n(1+x)-m_n[\cos(n+1)\varphi+i\sin(n+1)\varphi],$$

où n est infini. Or on peut démontrer comme dans le deuxième cas que $m_n=0$ pour $n=\infty$. On a donc

$$s=p(1+x),\ \text{où}\ p=1+m_1x+m_2x^2+\cdots$$

Cette équation donne, si $x+1$ n'est pas égal à zéro,

$$p=\frac{s}{1+x}.$$

La série p est donc alors convergente, et par conséquent les séries ci-dessus le sont également.

Si $x+1=0$, on a $1+\cos\varphi+i\sin\varphi=0$, donc $\sin\varphi=0$, $1+\cos\varphi=0$, d'où $\varphi=(2n+1)\pi$, n étant un nombre entier positif ou négatif. Donc les séries en question sont convergentes pour toute valeur de k égale à zéro ou comprise entre 0 et -1, si φ n'est pas égal à $(2n+1)\pi$.

Lorsque $\varphi=(2n+1)\pi$, les séries sont nécessairement divergentes, car si elles étaient convergentes, elles auraient pour somme les limites des fonctions

$$e^{k\delta-k'\beta}[\cos(k\beta+k'\delta)+i\sin(k\beta+k'\delta)],$$

en y faisant converger α vers l'unité, et faisant $\varphi=(2n+1)\pi$. Or

$$\delta=\tfrac{1}{2}\log(1+2\alpha\cos\varphi+\alpha^2),\ \beta=\text{arc. tang}\,\frac{\alpha\sin\varphi}{1+\alpha\cos\varphi},$$

donc pour $\varphi=(2n+1)\pi$ on a

$$\delta=\log(1-\alpha),\ \beta=0.$$

La fonction en question prendra donc la forme

$$(1-\alpha)^k[\cos(k'\log(1-\alpha))+i\sin(k'\log(1-\alpha))].$$

Or, k étant égal à zéro ou négatif, il est clair qu'en faisant converger α vers l'unité, on n'obtiendra pas pour cette fonction une limite finie et déterminée. Donc les séries sont divergentes.

De ce qui précède il s'ensuit, que les séries (21) ont lieu pour toute valeur de φ, lorsque k est positif, et pour toute valeur de φ pour laquelle $\cos\frac{\varphi}{2}$ n'est pas zéro, lorsque k est égal à zéro ou compris entre -1 et 0, quelle que soit d'ailleurs la valeur de k'. Dans tout autre cas les séries sont divergentes. Dans le cas que nous examinons, la série générale (19), lorsqu'on y fait $b^2+a^2=1$, ou $b=\sqrt{1-a^2}$, prend la forme:

$$(23)\left\{\begin{aligned}&1+\frac{m+ni}{1}(a+\sqrt{a^2-1})+\frac{(m+ni)(m-1+ni)}{1\ .\ 2}(a+\sqrt{a^2-1})^2\\&\quad+\frac{(m+ni)(m-1+ni)(m-2+ni)}{1\ .\ 2\ .\ 3}(a+\sqrt{a^2-1})^3+\cdots\\&=(2+2a)^{\frac{m}{2}}e^{-n\,\text{arc. tang}\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}}\Big[\cos\Big(m\,\text{arc. tang}\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}+\tfrac{1}{2}n\log(2+2a)\Big)\\&\qquad+i\sin\Big(m\,\text{arc. tang}\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}+\tfrac{1}{2}n\log(2+2a)\Big)\Big].\end{aligned}\right.$$

Voici un résumé des résultats précédents:

I. Lorsque la série,

$$1+\frac{m+ni}{1}(a+bi)+\frac{(m+ni)(m-1+ni)}{1\ .\ 2}(a+bi)^2+\cdots$$

est convergente, elle a pour somme

$$[(1+a)^2+b^2]^{\frac{m}{2}}e^{-n\,\text{arc. tang}\frac{b}{1+a}}\Big[\cos\Big(m\,\text{arc. tang}\frac{b}{1+a}+\frac{n}{2}\log[(1+a)^2+b^2]\Big)$$
$$+i\sin\Big(m\,\text{arc. tang}\frac{b}{1+a}+\frac{n}{2}\log[(1+a)^2+b^2]\Big)\Big].$$

II. La série est convergente pour toute valeur de m et n, lorsque la quantité $\sqrt{a^2+b^2}$ est inférieure à l'unité. Si $\sqrt{a^2+b^2}$ est égal à l'unité, la série est convergente pour toute valeur de m comprise entre -1 et $+\infty$, si l'on n'a pas en même temps $a=-1$. Si $a=-1$, m doit être positif. Dans tout autre cas la série proposée est divergente.

Comme cas particuliers on doit considérer les suivants:

A. Lorsque $n=0$. On a alors

$$(24)\quad \begin{cases} 1+\frac{m}{1}(a+bi)+\frac{m(m-1)}{1.2}(a+bi)^2+\cdots \\ =[(1+a)^2+b^2]^{\frac{m}{2}}\left[\cos\left(m\,\text{arc.tang}\frac{b}{1+a}\right)+i\sin\left(m\,\text{arc.tang}\frac{b}{1+a}\right)\right]. \end{cases}$$

Cette expression donne, en faisant $a=\alpha\cos\varphi$, $b=\alpha\sin\varphi$ et en séparant les termes réels des imaginaires:

$$(25)\quad \begin{cases} 1+\frac{m}{1}\alpha\cos\varphi+\frac{m(m-1)}{1.2}\alpha^2\cos 2\varphi+\cdots \\ \qquad =(1+2\alpha\cos\varphi+\alpha^2)^{\frac{m}{2}}\cos\left(m\,\text{arc.tang}\frac{\alpha\sin\varphi}{1+\alpha\cos\varphi}\right), \\ \frac{m}{1}\alpha\sin\varphi+\frac{m(m-1)}{1.2}\alpha^2\sin 2\varphi+\cdots \\ \qquad =(1+2\alpha\cos\varphi+\alpha^2)^{\frac{m}{2}}\sin\left(m\,\text{arc.tang}\frac{\alpha\sin\varphi}{1+\alpha\cos\varphi}\right). \end{cases}$$

B. Lorsque $b=0$.

Dans ce cas l'expression générale prend la forme suivante:

$$(26)\quad \begin{cases} 1+\frac{m+ni}{1}a+\frac{(m+ni)(m-1+ni)}{1\;.\;2}a^2+\cdots \\ \qquad =(1+a)^m[\cos(n.\log(1+a))+i\sin(n.\log(1+a))]. \end{cases}$$

C. Lorsque $n=0$, $b=0$.

Alors on a

$$(27)\quad 1+\frac{m}{1}a+\frac{m(m-1)}{1.2}a^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}a^3+\cdots=(1+a)^m.$$

Cette expression a lieu pour toute valeur de m lorsque la valeur numérique de a est inférieure à l'unité, de plus pour toute valeur de m comprise entre

-1 et $+\infty$, lorsque $a=1$, et pour toute valeur positive de m, lorsque $a=-1$. Pour toute autre valeur de a et de m le premier membre est une série divergente.

Faisant p. ex. $a=1$, $a=-1$, on a

$$1+\frac{m}{1}+\frac{m(m-1)}{1.2}+\cdots=2^m,$$

$$1-\frac{m}{1}+\frac{m(m-1)}{1.2}-\cdots=0.$$

La première équation a lieu pour toute valeur de m comprise entre -1 et $+\infty$, et la seconde pour toute valeur positive de m.

D. Lorsque $\sqrt{a^2+b^2}=1$.

Alors on a

$$(28)\quad\begin{cases} 1+\frac{m+ni}{1}(a+\sqrt{a^2-1})+\frac{(m+ni)(m-1+ni)}{1\;.\;2}(a+\sqrt{a^2-1})^2+\cdots \\ =(2+2a)^{\frac{m}{2}}e^{-n\,\text{arc. tang}\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}}\Big[\cos\Big(m\,\text{arc. tang}\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}+\frac{n}{2}\log(2+2a)\Big), \\ \qquad +i\sin\Big(m\,\text{arc. tang}\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}+\frac{n}{2}\log(2+2a)\Big)\Big]. \end{cases}$$

Si l'on fait ici $a=\cos\varphi$, on obtient

$$(29)\quad\begin{cases} 1+\frac{m+ni}{1}(\cos\varphi+i\sin\varphi)+\frac{(m+ni)(m-1+ni)}{1\;.\;2}(\cos 2\varphi+i\sin 2\varphi)+\cdots \\ =(2+2\cos\varphi)^{\frac{m}{2}}e^{-n(\frac{1}{2}\varphi-\varrho\pi)}\Big[\cos\Big(m(\tfrac{1}{2}\varphi-\varrho\pi)+\frac{n}{2}\log(2+2\cos\varphi)\Big) \\ \qquad +i\sin\Big(m(\tfrac{1}{2}\varphi-\varrho\pi)+\frac{n}{2}\log(2+2\cos\varphi)\Big)\Big], \end{cases}$$

en remarquant qu'on a

$$\text{arc. tang}\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}=\text{arc. tang}\sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi}}=\text{arc. tang}(\text{tang}\tfrac{1}{2}\varphi)=\tfrac{1}{2}\varphi-\varrho\pi,$$

si l'on suppose $\frac{1}{2}\varphi$ compris entre $\varrho\pi-\frac{\pi}{2}$ et $\varrho\pi+\frac{\pi}{2}$.

E. Lorsque $\sqrt{a^2+b^2}=1$, $a=\cos\varphi$, $b=\sin\varphi$, $n=0$.

Dans ce cas l'expression précédente donne

$$(30)\quad \begin{cases} 1+\frac{m}{1}(\cos\varphi+i\sin\varphi)+\frac{m(m-1)}{1.2}(\cos 2\varphi+i\sin 2\varphi)+\cdots \\ =(2+2\cos\varphi)^{\frac{m}{2}}[\cos m(\tfrac{1}{2}\varphi-\varrho\pi)+i\sin m(\tfrac{1}{2}\varphi-\varrho\pi)] \\ \text{depuis } \tfrac{1}{2}\varphi=\varrho\pi-\frac{\pi}{2} \text{ jusqu'à } \tfrac{1}{2}\varphi=\varrho\pi+\frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

ou, en séparant la partie réelle de l'imaginaire,

$$(31)\quad \begin{cases} 1+\frac{m}{1}\cos\varphi+\frac{m(m-1)}{1.2}\cos 2\varphi+\cdots=(2+2\cos\varphi)^{\frac{m}{2}}\cos m(\tfrac{1}{2}\varphi-\varrho\pi) \\ \frac{m}{1}\sin\varphi+\frac{m(m-1)}{1.2}\sin 2\varphi+\cdots=(2+2\cos\varphi)^{\frac{m}{2}}\sin m(\tfrac{1}{2}\varphi-\varrho\pi) \\ \text{depuis } \tfrac{1}{2}\varphi=\varrho\pi-\frac{\pi}{2} \text{ jusqu'à } \tfrac{1}{2}\varphi=\varrho\pi+\frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

F. Lorsque $a=0$, $b=\operatorname{tang}\varphi$.

Dans ce cas on obtient, lorsque φ est compris entre $+\frac{\pi}{4}$ et $-\frac{\pi}{4}$,

$$(32)\quad \begin{cases} 1+\frac{m+ni}{1}i\operatorname{tang}\varphi+\frac{(m+ni)(m-1+ni)}{1\;.\;2}(i\operatorname{tang}\varphi)^2+\cdots \\ =(\cos\varphi)^{-m}e^{-n\varphi}[\cos(m\varphi-n\log\cos\varphi)+i\sin(m\varphi-n\log\cos\varphi)]. \end{cases}$$

5.

Des expressions précédentes on peut, par des transformations convenables, en déduire plusieurs autres, parmi lesquelles il s'en trouve de très remarquables. Nous allons en développer quelques unes. Pour plus de détail on peut consulter l'ouvrage cité de M. *Cauchy*.

A.

Sommation des séries $\alpha\cos\varphi-\frac{1}{2}\alpha^2\cos 2\varphi+\frac{1}{3}\alpha^3\cos 3\varphi-\cdots$,
$\alpha\sin\varphi-\frac{1}{2}\alpha^2\sin 2\varphi+\frac{1}{3}\alpha^3\sin 3\varphi-\cdots$.

Lorsque α est supérieur à l'unité, on voit aisément que ces séries sont divergentes. Si α est inférieur à l'unité, nous avons vu plus haut qu'elles

sont convergentes; leurs sommes sont les quantités β et δ du § 3, c'est-à-dire, en mettant pour β et δ leurs valeurs données par les équations (18),

$$(33)\begin{cases} \frac{1}{2}\log(1+2\alpha\cos\varphi+\alpha^2)=\alpha\cos\varphi-\frac{1}{2}\alpha^2\cos 2\varphi+\frac{1}{3}\alpha^3\cos 3\varphi-\cdots, \\ \text{arc. tang}\,\frac{\alpha\sin\varphi}{1+\alpha\cos\varphi}=\alpha\sin\varphi-\frac{1}{2}\alpha^2\sin 2\varphi+\frac{1}{3}\alpha^3\sin 3\varphi-\cdots \end{cases}$$

Pour avoir les sommes de ces séries lorsque $\alpha=+1$ ou -1, il faut seulement faire converger α vers cette limite. La première expression donne de cette manière

$$(34)\begin{cases} \frac{1}{2}\log(2+2\cos\varphi)=\cos\varphi-\frac{1}{2}\cos 2\varphi+\frac{1}{3}\cos 3\varphi-\cdots, \\ \frac{1}{2}\log(2-2\cos\varphi)=-\cos\varphi-\frac{1}{2}\cos 2\varphi-\frac{1}{3}\cos 3\varphi-\cdots, \end{cases}$$

en supposant que les seconds membres de ces équations soient des séries convergentes, ce qui a lieu, d'après le théorème II, pour toute valeur de φ, excepté pour $\varphi=(2\mu+1)\pi$ dans la première expression, et pour $\varphi=2\mu\pi$ dans la seconde, μ étant un nombre entier quelconque positif ou négatif.

La seconde formule donne, en supposant φ compris entre π et $-\pi$, et en se rappelant qu'on a alors

$$\text{arc. tang}\,\frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi}=\text{arc. tang}\,(\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\varphi)=\tfrac{1}{2}\varphi:$$

(35) $\frac{1}{2}\varphi=\sin\varphi-\frac{1}{2}\sin 2\varphi+\frac{1}{3}\sin 3\varphi-\cdots$ (depuis $\varphi=+\pi$ jusqu'à $\varphi=-\pi$).

Lorsque $\varphi=\pi$ ou $=-\pi$, la série se réduit à zéro, comme on le voit aisément. Il s'ensuit que la fonction:

$$\sin\varphi-\tfrac{1}{2}\sin 2\varphi+\tfrac{1}{3}\sin 3\varphi-\cdots$$

a la propriété remarquable d'être discontinue pour les valeurs $\varphi=\pi$ et $\varphi=-\pi$. En effet, lorsque $\varphi=\pm\pi$, la fonction se réduit à zéro; si au contraire $\varphi=\pm(\pi-\alpha)$, α étant positif et moindre que π, la valeur de la fonction est

$$\pm\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right).$$

La formule (33) contient comme cas particulier la suivante:

$$(36)\qquad \text{arc. tang}\,\alpha=\alpha-\tfrac{1}{3}\alpha^3+\tfrac{1}{5}\alpha^5-\cdots$$

ce qu'on trouve en faisant $\varphi=\frac{\pi}{2}\cdot$ Cette formule sera applicable pour toute valeur de α, depuis -1 jusqu'à $+1$, les limites y comprises.

B.

Développement de $\cos m\varphi$ et de $\sin m\varphi$ suivant les puissances de $\tang \varphi$.

On peut déduire ces développemens de l'expression (32). En effet, en faisant $n=0$, et séparant les parties réelles des parties imaginaires, on obtient, après avoir multiplié par $(\cos\varphi)^m$,

$$(37)\quad\begin{cases}\cos m\varphi=(\cos\varphi)^m\left(1-\frac{m(m-1)}{1.2}(\tang\varphi)^2\right.\\ \qquad\qquad\left.+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}(\tang\varphi)^4-\cdots\right),\\ \sin m\varphi=(\cos\varphi)^m\left(m(\tang\varphi)-\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}(\tang\varphi)^3+\cdots\right),\end{cases}$$

depuis $\varphi=\frac{\pi}{4}$ jusqu'à $\varphi=-\frac{\pi}{4}$, et ces équations ont lieu pour toute valeur de m lorsque $\tang\varphi$ est moindre que 1. Si $\tang\varphi=\pm1$, elles ont lieu pour tout m compris entre -1 et $+\infty$. Elles sont alors:

$$(38)\quad\begin{cases}\cos\left(m\frac{\pi}{4}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{m}{2}}\left(1-\frac{m(m-1)}{1.2}+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}-\cdots\right)\\ \sin\left(m\frac{\pi}{4}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{m}{2}}\left(m-\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}+\cdots\right).\end{cases}$$

C.

Développement de $(\cos x)^n$ et $(\sin x)^n$ en séries ordonnées suivant les cosinus et les sinus des arcs multiples.

Depuis quelque temps plusieurs analystes se sont occupés du développement de $(\cos x)^n$ et $(\sin x)^n$. Mais jusqu'à présent, si je ne me trompe, ces efforts n'ont pas entièrement réussi. On est bien parvenu à des expressions justes sous certaines restrictions, mais ces expressions n'ont pas été rigoureusement fondées. On peut les déduire assez simplement des expressions démontrées ci-dessus. En effet, si l'on ajoute les deux équations (31), après avoir multiplié la première par $\cos\alpha$ et la seconde par $\sin\alpha$, on obtient

$$\cos\alpha+\frac{m}{1}\cos(\alpha-\varphi)+\frac{m(m-1)}{1.2}\cos(\alpha-2\varphi)+\cdots$$
$$=(2+2\cos\varphi)^{\frac{m}{2}}\cos\left(\alpha-\frac{m\varphi}{2}+m\varrho\pi\right)$$
$$\left(\text{depuis } \tfrac{1}{2}\varphi=\varrho\pi-\frac{\pi}{2} \text{ jusqu'à } \tfrac{1}{2}\varphi=\varrho\pi+\frac{\pi}{2}\right).$$

Or puisque $2+2\cos\varphi=4(\cos\frac{1}{2}\varphi)^2$, on aura, en faisant $\varphi=2x$,

$$\cos\alpha+\frac{m}{1}\cos(\alpha-2x)+\frac{m(m-1)}{1.2}\cos(\alpha-4x)+\cdots=(2\cos x)^m\cos(\alpha-mx+2m\varrho\pi)$$
$$\text{depuis } x=2\varrho\pi-\frac{\pi}{2} \text{ jusqu'à } x=2\varrho\pi+\frac{\pi}{2}$$
$$\cos\alpha+\frac{m}{1}\cos(\alpha-2x)+\frac{m(m-1)}{1.2}\cos(\alpha-4x)+\cdots=(-2\cos x)^m\cos[\alpha-mx+m(2\varrho+1)\pi]$$
$$\text{depuis } x=2\varrho\pi+\frac{\pi}{2} \text{ jusqu'à } x=2\varrho\pi+\frac{3\pi}{2}.$$

Si l'on fait ici 1) $\alpha=mx$; 2) $\alpha=mx+\frac{\pi}{2}$; 3) $\alpha=my$, $x=y-\frac{\pi}{2}$; 4) $\alpha=my-\frac{\pi}{2}$, $x=y-\frac{\pi}{2}$, on obtiendra

1) $(2\cos x)^m\cos 2m\varrho\pi=\cos mx+\frac{m}{1}\cos(m-2)x+\frac{m(m-1)}{1.2}\cos(m-4)x+\cdots,$

2) $(2\cos x)^m\sin 2m\varrho\pi=\sin mx+\frac{m}{1}\sin(m-2)x+\frac{m(m-1)}{1.2}\sin(m-4)x+\cdots,$

$$\text{depuis } x=2\varrho\pi-\frac{\pi}{2} \text{ jusqu'à } x=2\varrho\pi+\frac{\pi}{2};$$

3) $(2\sin x)^m\cos m(2\varrho+\frac{1}{2})\pi=\cos mx-\frac{m}{1}\cos(m-2)x+\frac{m(m-1)}{1.2}\cos(m-4)x-\cdots,$

4) $(2\sin x)^m\sin m(2\varrho+\frac{1}{2})\pi=\sin mx-\frac{m}{1}\sin(m-2)x+\frac{m(m-1)}{1.2}\sin(m-4)x-\cdots,$

$$\text{depuis } x=2\varrho\pi \text{ jusqu'à } x=(2\varrho+1)\pi;$$

5) $(-2\cos x)^m\cos m(2\varrho+1)\pi=\cos mx+\frac{m}{1}\cos(m-2)x+\frac{m(m-1)}{1.2}\cos(m-4)x+\cdots,$

6) $(-2\cos x)^m\sin m(2\varrho+1)\pi=\sin mx+\frac{m}{1}\sin(m-2)x+\frac{m(m-1)}{1.2}\sin(m-4)x+\cdots,$

$$\text{depuis } x=(2\varrho+\tfrac{1}{2})\pi \text{ jusqu'à } x=(2\varrho+\tfrac{3}{2})\pi;$$

7) $(-2\sin x)^m\cos m(2\varrho+\frac{3}{2})\pi=\cos mx-\frac{m}{1}\cos(m-2)x+\frac{m(m-1)}{1.2}\cos(m-4)x-\cdots,$

8) $(-2\sin x)^m\sin m(2\varrho+\frac{3}{2})\pi=\sin mx-\frac{m}{1}\sin(m-2)x+\frac{m(m-1)}{1.2}\sin(m-4)x-\cdots,$

$$\text{depuis } x=(2\varrho+1)\pi \text{ jusqu'à } x=(2\varrho+2)\pi.$$

Ces formules ont encore lieu pour les valeurs limites de x, lorsque m est positif. Lorsque m est compris entre -1 et 0 ces valeurs sont exclues.

Comme cas particuliers on peut considérer les deux suivants:

$$(2\cos x)^m = \cos mx + \frac{m}{1}\cos(m-2)x + \frac{m(m-1)}{1.2}\cos(m-4)x + \cdots,$$

$$0 = \sin mx + \frac{m}{1}\sin(m-2)x + \frac{m(m-1)}{1.2}\sin(m-4)x + \cdots,$$

$$\left(\text{depuis } x = -\frac{\pi}{2} \text{ jusqu'à } x = \frac{\pi}{2}\right).$$

XV.

SUR QUELQUES INTÉGRALES DÉFINIES.

Journal für die reine und angewandte Mathematik, herausgegeben von *Crelle*, Bd. II, Berlin 1827.

Lorsque une intégrale définie contient une quantité constante indéterminée, on peut souvent en déduire, par différentiation, une équation différentielle par laquelle l'intégrale définie peut se déterminer en fonction de la quantité constante. Le plus souvent cette équation différentielle est linéaire; si elle est en même temps du premier ordre, elle peut, comme on sait, s'intégrer. Quoique cela n'ait pas lieu en général, lorsque l'équation est du second ordre ou d'un ordre plus élevé, on peut pourtant quelquefois déduire de ces équations plusieurs relations intéressantes entre les intégrales définies. Montrer cela sera l'objet de ce mémoire.

Soit $\frac{d^2y}{da^2}+p\frac{dy}{da}+qy=0$ une équation différentielle linéaire du second ordre entre y et a, p et q étant deux fonctions de a. Supposons qu'on connaisse deux intégrales particulières de cette équation, savoir $y=y_1$ et $y=y_2$, on aura

$$\frac{d^2y_1}{da^2}+p\frac{dy_1}{da}+qy_1=0;\quad \frac{d^2y_2}{da^2}+p\frac{dy_2}{da}+qy_2=0.$$

De ces équations on tire, en éliminant q,

$$y_2\frac{d^2y_1}{da^2}-y_1\frac{d^2y_2}{da^2}=\frac{d\left(y_2\frac{dy_1}{da}-y_1\frac{dy_2}{da}\right)}{da}=-p\left(y_2\frac{dy_1}{da}-y_1\frac{dy_2}{da}\right),$$

donc en intégrant

$$(0)\qquad y_2\frac{dy_1}{da}-y_1\frac{dy_2}{da}=e^{-\int p\,da},$$

e étant la base des logarithmes Népériens.

Supposons que les deux fonctions y_1 et y_2 soient exprimées en intégrales définies, de sorte que $y_1=\int v\,dx$, $y_2=\int u\,dx$, v et u étant des fonctions de x et de a, cette relation entre y_1 et y_2 donne en substituant,

$$(1)\qquad \int u\,dx\int\frac{dv}{da}\,dx-\int v\,dx\int\frac{du}{da}\,dx=e^{-\int p\,da}.$$

Cette équation exprime, comme on le voit, une relation entre les quatre intégrales $\int u\,dx$, $\int v\,dx$, $\int\frac{du}{da}\,dx$, $\int\frac{dv}{da}\,dx$. Il s'agit maintenant de trouver des intégrales qui puissent satisfaire à une équation différentielle du second ordre. Il y a plusieurs intégrales qui jouissent de cette propriété, et que nous allons considérer successivement.

I. Soit $v=\frac{(x+a)^{\gamma+1}}{x^{1-\alpha}(1-x)^{1-\beta}}$ et $y=\int_0^1\frac{(x+a)^{\gamma+1}\,dx}{x^{1-\alpha}(1-x)^{1-\beta}}$,

$$\frac{dy}{da}=(\gamma+1)\int_0^1\frac{(x+a)^{\gamma}\,dx}{x^{1-\alpha}(1-x)^{1-\beta}},\quad \frac{d^2y}{da^2}=\gamma(\gamma+1)\int_0^1\frac{(x+a)^{\gamma-1}\,dx}{x^{1-\alpha}(1-x)^{1-\beta}},$$

le signe $\int_0^1$ dénotant que l'intégrale est prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$. En différentiant la quantité $(x+a)^\gamma x^\alpha(1-x)^\beta=r$ par rapport à x, on obtient

$$dr=dx\,.\,x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}(x+a)^{\gamma-1}[\gamma x(1-x)+\alpha(x+a)(1-x)-\beta(x+a)x].$$

Or

$$\begin{aligned}&\gamma x(1-x)+\alpha(x+a)(1-x)-\beta(x+a)x\\=&-\gamma(a^2+a)+[a(\beta+\gamma)+(a+1)(\alpha+\gamma)](x+a)-(\alpha+\beta+\gamma)(x+a)^2,\end{aligned}$$

donc en intégrant entre les limites $x=0$, $x=1$, on obtient

$$\begin{aligned}0=&-\gamma(a^2+a)\int_0^1\frac{(x+a)^{\gamma-1}\,dx}{x^{1-\alpha}(1-x)^{1-\beta}}\\&+[(\beta+\gamma)a+(\alpha+\gamma)(a+1)]\int_0^1\frac{(x+a)^{\gamma}\,dx}{x^{1-\alpha}(1-x)^{1-\beta}}-(\alpha+\beta+\gamma)\int_0^1\frac{(x+a)^{\gamma+1}\,dx}{x^{1-\alpha}(1-x)^{1-\beta}}.\end{aligned}$$

De cette équation on tire, en divisant par $\frac{a^2+a}{\gamma+1}$ et substituant à la place des intégrales leurs valeurs en y,

(2) $$\frac{d^2y}{da^2}-\left(\frac{\alpha+\gamma}{a}+\frac{\beta+\gamma}{1+a}\right)\frac{dy}{da}+\frac{(\gamma+1)(\alpha+\beta+\gamma)}{a(a+1)}y=0.$$

Si l'on met à la place de α, β, γ respectivement $1-\beta$, $1-\alpha$, $\alpha+\beta+\gamma-1$, on aura la même équation, donc

(3) $$y_1=\int_0^1\frac{(x+a)^{\gamma+1}dx}{x^{1-\alpha}(1-x)^{1-\beta}} \quad \text{et} \quad y_2=\int_0^1\frac{(x+a)^{\alpha+\beta+\gamma}dx}{x^{\beta}(1-x)^{\alpha}}$$

sont deux intégrales particulières de cette équation.

Or $p=-\frac{\alpha+\gamma}{a}-\frac{\beta+\gamma}{1+a}$, et par conséquent $e^{-\int p\,da}=Ca^{\alpha+\gamma}(1+a)^{\beta+\gamma}$, donc l'équation (0) donne

(4) $$y_2\frac{dy_1}{da}-y_1\frac{dy_2}{da}=Ca^{\alpha+\gamma}(1+a)^{\beta+\gamma}.$$

Pour déterminer la quantité constante C, soit $a=\infty$, on trouvera facilement

$$C=-(\alpha+\beta-1)\int_0^1 dx\,.\,x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,.\int_0^1 dx\,.\,x^{-\beta}(1-x)^{-\alpha},$$

c'est-à-dire

$$C=\pi\left[\cot(\alpha\pi)+\cot(\beta\pi)\right].$$

Par suite l'équation (4) donne

(5) $$\left\{\begin{aligned}&(\alpha+\beta+\gamma)\int_0^1\frac{dx(x+a)^{\gamma+1}}{x^{1-\alpha}(1-x)^{1-\beta}}\,.\int_0^1\frac{dx(x+a)^{\alpha+\beta+\gamma-1}}{x^{\beta}(1-x)^{\alpha}}\\&-(\gamma+1)\int_0^1\frac{dx(x+a)^{\gamma}}{x^{1-\alpha}(1-x)^{1-\beta}}\,.\int_0^1\frac{dx(x+a)^{\alpha+\beta+\gamma}}{x^{\beta}(1-x)^{\alpha}}\\&=-\pi\left[\cot(\alpha\pi)+\cot(\beta\pi)\right]a^{\alpha+\gamma}(1+a)^{\beta+\gamma}.\end{aligned}\right.$$

Le cas où $\gamma=-\alpha-\beta$ mérite d'être remarqué. On a alors, comme on le voit aisément,

$$\int_0^1\frac{dx}{x^{1-\alpha}(1-x)^{1-\beta}(x+a)^{\alpha+\beta}}=\frac{1}{a^{\beta}(1+a)^{\alpha}}\int_0^1\frac{dx}{x^{1-\alpha}(1-x)^{1-\beta}}.$$

Or

$$\int_0^1\frac{dx}{x^{1-\alpha}(1-x)^{1-\beta}}=\frac{\Gamma\alpha\,.\,\Gamma\beta}{\Gamma(\alpha+\beta)},$$

Γm étant égal à $\int_0^\infty x^{m-1} e^{-x} dx$, donc

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^{1-\alpha}(1-x)^{1-\beta}(x+a)^{\alpha+\beta}} = \frac{\Gamma\alpha . \Gamma\beta}{\Gamma(\alpha+\beta)} \frac{1}{a^\beta(1+a)^\alpha}.$$

Soit p. ex. $\beta = 1-\alpha$, on aura

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1-x)^\alpha x^{1-\alpha}(x+a)} = \frac{\Gamma\alpha . \Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(1)} \frac{1}{a^{1-\alpha}(1+a)^\alpha},$$

or $\Gamma(1)=1$, $\Gamma\alpha . \Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin \alpha\pi}$, donc

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x+a)x^{1-\alpha}(1-x)^\alpha} = \frac{\pi}{\sin \alpha\pi} \frac{1}{a^{1-\alpha}(1+a)^\alpha}.$$

II. Soit $y = \int_0^\infty \frac{x^{-\alpha}dx}{(1+x)^\beta(x+a)^\gamma}$. En différentiant on obtient

$$\frac{dy}{da} = -\gamma \int_0^\infty \frac{x^{-\alpha}dx}{(1+x)^\beta(x+a)^{\gamma+1}},$$

$$\frac{d^2y}{da^2} = \gamma(\gamma+1)\int_0^\infty \frac{x^{-\alpha}dx}{(1+x)^\beta(x+a)^{\gamma+2}}.$$

Lorsqu'on différentie la fonction $x^{1-\alpha}(1+x)^{1-\beta}(x+a)^{-\gamma-1} = r$, on obtient

$$dr = \frac{x^{-\alpha}dx}{(1+x)^\beta(x+a)^{\gamma+2}}[(1-\alpha)(1+x)(x+a)+(1-\beta)x(x+a)-(\gamma+1)x(1+x)]$$
$$= \frac{x^{-\alpha}dx}{(1+x)^\beta(x+a)^{\gamma+2}} q,$$

donc, puisque

$$q = (\gamma+1)(1-a)a - [(\alpha+\gamma)(1-a)-(\gamma+\beta)a](x+a)$$
$$+(1-\alpha-\beta-\gamma)(x+a)^2:$$

$$dr = (\gamma+1)a(1-a)\frac{x^{-\alpha}dx}{(1+x)^\beta(x+a)^{\gamma+2}}$$

$$-[(\alpha+\gamma)(1-a)-(\beta+\gamma)a]\frac{x^{-\alpha}dx}{(1+x)^\beta(x+a)^{\gamma+1}} + (1-\alpha-\beta-\gamma)\frac{x^{-\alpha}dx}{(1+x)^\beta(x+a)^\gamma}.$$

On tire de là en intégrant

$$(6) \qquad \frac{d^2y}{da^2} + \left(\frac{\alpha+\gamma}{a} - \frac{\beta+\gamma}{1-a}\right)\frac{dy}{da} + \frac{\gamma(1-\alpha-\beta-\gamma)}{a(1-a)} y = 0.$$

En mettant respectivement $1-\beta$, $1-\alpha$, $\gamma+\alpha+\beta-1$ à la place de α, β, γ, il en résulte la même équation, donc

$$y_1 = \int_0^\infty \frac{x^{-\alpha}\,dx}{(1+x)^\beta (x+a)^\gamma} \quad \text{et} \quad y_2 = \int_0^\infty \frac{x^{\beta-1}\,dx}{(1+x)^{1-\alpha}(x+a)^{\alpha+\beta+\gamma-1}},$$

sont deux intégrales particulières de cette équation.

Or, puisque $p = \frac{\alpha+\gamma}{a} - \frac{\beta+\gamma}{1-a}$ et par suite $e^{-\int p\,da} = \frac{C}{a^{\alpha+\gamma}(1-a)^{\beta+\gamma}}$, on a en vertu de l'équation (0)

$$y_2 \frac{dy_1}{da} - y_1 \frac{dy_2}{da} = \frac{C}{a^{\alpha+\gamma}(1-a)^{\beta+\gamma}}.$$

En faisant $a = 1$, on trouve $C = 0$, et par conséquent

$$y_2 \frac{dy_1}{da} - y_1 \frac{dy_2}{da} = 0,$$

c'est-à-dire $y_1 = C y_2$, C étant une constante. Pour la trouver on fera $a = 1$; on aura

$$\int_0^\infty \frac{x^{-\alpha}\,dx}{(1+x)^{\beta+\gamma}} = C \int_0^\infty \frac{x^{\beta-1}\,dx}{(1+x)^{\beta+\gamma}}.$$

Or

$$\int_0^\infty \frac{x^{-\alpha}\,dx}{(1+x)^{\beta+\gamma}} = \frac{\Gamma(1-\alpha)\,\Gamma(\alpha+\beta+\gamma-1)}{\Gamma(\beta+\gamma)}$$

$$\int_0^\infty \frac{x^{\beta-1}\,dx}{(1+x)^{\beta+\gamma}} = \frac{\Gamma\beta\,.\,\Gamma\gamma}{\Gamma(\beta+\gamma)},$$

donc

$$C = \frac{\Gamma(1-\alpha)\,\Gamma(\alpha+\beta+\gamma-1)}{\Gamma\beta\,.\,\Gamma\gamma}.$$

Par conséquent l'équation $y_1 = C y_2$ donne

$$\int_0^\infty \frac{x^{-\alpha}\,dx}{(1+x)^\beta (x+a)^\gamma} = \frac{\Gamma(1-\alpha)\,\Gamma(\alpha+\beta+\gamma-1)}{\Gamma\beta\,.\,\Gamma\gamma} \int_0^\infty \frac{x^{\beta-1}\,dx}{(1+x)^{1-\alpha}(x+a)^{\alpha+\beta+\gamma-1}}.$$

Si dans l'équation (6) on met $(1-a)$ à la place de a, β et α à la place de α et β, elle ne change pas de forme.

Il s'ensuit que

$$y_3 = \int_0^\infty \frac{x^{-\beta}\,dx}{(1+x)^\alpha (x+1-a)^\gamma}$$

est de même une intégrale particulière de la même équation. On a donc

$$y_3 \frac{dy_1}{da} - y_1 \frac{dy_3}{da} = \frac{C}{a^{\alpha+\gamma}(1-a)^{\beta+\gamma}}.$$

En mettant xa à la place de x dans l'expression de y_1, on obtient

$$y_1 = a^{-\alpha-\gamma+1}\int_0^\infty \frac{x^{-\alpha}dx}{(1+x)^\gamma(1+ax)^\beta}; \quad \frac{dy_1}{da} = -\gamma a^{-\alpha-\gamma}\int_0^\infty \frac{x^{-\alpha}dx}{(1+x)^{\gamma+1}(1+ax)^\beta}.$$

On trouve de même, en mettant $(1-a)x$ à la place de x,

$$y_3 = (1-a)^{-\beta-\gamma+1}\int_0^\infty \frac{x^{-\beta}dx}{(1+x)^\gamma[1+(1-a)x]^\alpha},$$

$$\frac{dy_3}{da} = \gamma(1-a)^{-\beta-\gamma}\int_0^\infty \frac{x^{-\beta}dx}{(1+x)^{\gamma+1}[1+(1-a)x]^\alpha}.$$

En substituant ces valeurs, multipliant par $a^{\alpha+\gamma}(1-a)^{\beta+\gamma}$ et écrivant C au lieu de $-\frac{C}{\gamma}$, on trouve

$$(7)\quad \begin{cases} C = a\int_0^\infty \frac{x^{-\alpha}dx}{(1+x)^\gamma(1+ax)^\beta}\cdot\int_0^\infty \frac{x^{-\beta}dx}{(1+x)^{\gamma+1}[1+(1-a)x]^\alpha} \\ +(1-a)\int_0^\infty \frac{x^{-\beta}dx}{(1+x)^\gamma[1+(1-a)x]^\alpha}\cdot\int_0^\infty \frac{x^{-\alpha}dx}{(1+x)^{\gamma+1}(1+ax)^\beta}. \end{cases}$$

Pour trouver C, soit $a=0$, on aura

$$C = \int_0^\infty \frac{x^{-\beta}dx}{(1+x)^{\gamma+\alpha}}\cdot\int_0^\infty \frac{x^{-\alpha}dx}{(1+x)^{\gamma+1}} = \frac{\Gamma(1-\alpha)\,\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(\gamma+1)}\,\Gamma(\alpha+\beta+\gamma-1).$$

Si l'on fait p. ex. $\beta = 1-\alpha$, on aura en remarquant que

$$\Gamma(1-\alpha)\,\Gamma\alpha = \frac{\pi}{\sin\alpha\pi}, \quad \Gamma(\gamma+1) = \gamma.\Gamma\gamma:$$

$$\frac{\pi}{\gamma.\sin\alpha\pi} = a\int_0^\infty \frac{x^{-\alpha}dx}{(1+x)^\gamma(1+ax)^{1-\alpha}}\cdot\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}dx}{(1+x)^{\gamma+1}[1+(1-a)x]^\alpha}$$
$$+(1-a)\int_0^\infty \frac{x^{-\alpha}dx}{(1+x)^{\gamma+1}(1+ax)^{1-\alpha}}\cdot\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}dx}{(1+x)^\gamma[1+(1-a)x]^\alpha}.$$

Lorsque $\alpha=\gamma=\frac{1}{2}$ on a

$$2\pi = a\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)(1+ax)}\cdot\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)^3[1+(1-a)x]}$$
$$+(1-a)\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)[1+(1-a)x]}\cdot\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)^3(1+ax)}.$$

Toutes ces intégrales peuvent s'exprimer par des fonctions elliptiques. En effet, soit $x=(\tang \varphi)^2$, on aura après quelques transformations légères

$$\frac{\pi}{2}=a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-(1-a)\sin^2\varphi}}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi\,.\cos^2\varphi}{\sqrt{1-a\,.\sin^2\varphi}}$$
$$+(1-a)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-a\sin^2\varphi}}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi\,.\cos^2\varphi}{\sqrt{1-(1-a)\sin^2\varphi}},$$

c'est-à-dire, lorsqu'on fait $a=c^2$, $b^2=1-c^2$,

$$\frac{\pi}{2}=F^1(c)\,E^1(b)+F^1(b)\,E^1(c)-F^1(c)\,F^1(b),$$

où, d'après la notation de M. *Legendre*,

$$F^1(c)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi}},\quad E^1(c)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\,.\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi}.$$

La formule ci-dessus se trouve dans les *Exercices de Calcul intégral par M. Legendre*, t. I, p. 61.

Dans la formule générale (7) les intégrales peuvent s'exprimer par d'autres dont les limites sont 0 et 1. Soit à cet effet $x=\frac{y}{1-y}$; on aura

$$(8)\quad\left\{\begin{aligned}&\frac{\Gamma(1-\alpha)\,\Gamma(1-\beta)\,\Gamma(\alpha+\beta+\gamma-1)}{\Gamma(\gamma+1)}=a\int_0^1\frac{dy(1-y)^{\alpha+\beta+\gamma-2}}{y^\alpha[1-(1-a)y]^\beta}\cdot\int_0^1\frac{dy(1-y)^{\alpha+\beta+\gamma-1}}{y^\beta(1-ay)^\alpha}\\&\qquad+(1-a)\int_0^1\frac{dy(1-y)^{\alpha+\beta+\gamma-1}}{y^\alpha[1-(1-a)y]^\beta}\cdot\int_0^1\frac{dy(1-y)^{\alpha+\beta+\gamma-2}}{y^\beta(1-ay)^\alpha}.\end{aligned}\right.$$

Nous avons vu plus haut que

$$\int_0^1\frac{dx}{x^{1-\alpha}(1-x)^{1-\beta}(x+a)^{\alpha+\beta}}=\frac{\Gamma\alpha\,.\,\Gamma\beta}{\Gamma(\alpha+\beta)}\cdot\frac{1}{a^\beta(1+a)^\alpha}.$$

On peut trouver, comme il suit, une expression plus générale de laquelle celle-ci est un cas particulier. En différentiant l'intégrale

$$y=\int_0^x\frac{dx\,.\,x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{(x+a)^{\alpha+\beta}}$$

par rapport à a, on obtient

$$\frac{dy}{da}=-(\alpha+\beta)\int_0^x\frac{dx\,.\,x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{(x+a)^{\alpha+\beta+1}}.$$

Il s'ensuit que

$$\frac{dy}{da}+\left(\frac{\alpha}{1+a}+\frac{\beta}{a}\right)y=-\frac{x^\alpha(1-x)^\beta}{a(1+a)(x+a)^{\alpha+\beta}}.$$

En multipliant cette équation par $a^\beta(1+a)^\alpha$, le premier membre devient une différentielle complète, égale à $d[y.a^\beta(1+a)^\alpha]$, on aura donc en intégrant

$$y.a^\beta(1+a)^\alpha=C-x^\alpha(1-x)^\beta\int_0^a\frac{da.a^{\beta-1}(1+a)^{\alpha-1}}{(a+x)^{\alpha+\beta}}.$$

Pour trouver C, qui peut être une fonction de x, nous ferons $a=\infty$. On aura

$$y.a^\beta(1+a)^\alpha=\int_0^x dx.x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1},$$

et par conséquent,

$$C=\int_0^x dx.x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}+x^\alpha(1-x)^\beta\int_0^\infty\frac{da.a^{\beta-1}(1+a)^{\alpha-1}}{(a+x)^{\alpha+\beta}}.$$

Si l'on fait $a=\frac{x-xy}{y-x}$, et par suite $y=\frac{x+ax}{a+x}$, on trouvera

$$\int_0^\infty\frac{da.a^{\beta-1}(1+a)^{\alpha-1}}{(a+x)^{\alpha+\beta}}=-x^{-\alpha}(1-x)^{-\beta}\int_1^x dy.y^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-1}$$

$$=x^{-\alpha}(1-x)^{-\beta}\left(-\int_0^x dx.x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}+\int_0^1 dx.x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\right).$$

En substituant cette valeur, on obtient

$$C=\int_0^1 dx.x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}=\frac{\Gamma\alpha.\Gamma\beta}{\Gamma(\alpha+\beta)},$$

et par conséquent

$$\frac{\Gamma\alpha.\Gamma\beta}{\Gamma(\alpha+\beta)}=a^\beta(1+a)^\alpha\int_0^x\frac{dx.x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{(x+a)^{\alpha+\beta}}+x^\alpha(1-x)^\beta\int_0^a\frac{da.a^{\beta-1}(1+a)^{\alpha-1}}{(x+a)^{\alpha+\beta}}.$$

Si p. ex. $\alpha+\beta=1$, on aura

$$\frac{\pi}{\sin\alpha\pi}=\frac{(1+a)^\alpha}{a^{\alpha-1}}\int_0^x\frac{dx.x^{\alpha-1}(1-x)^{-\alpha}}{x+a}+\frac{x^\alpha}{(1-x)^{\alpha-1}}\int_0^a\frac{da.a^{-\alpha}(1+a)^{\alpha-1}}{x+a}.$$

Si de plus $\alpha=\frac{1}{2}$, on obtient

$$\pi=\sqrt{a+a^2}\int_0^x\frac{dx}{(x+a)\sqrt{x-x^2}}+\sqrt{x-x^2}\int_0^a\frac{da}{(a+x)\sqrt{a+a^2}},$$

ce qui est juste, car

$$\int_0^x \frac{dx}{(x+a)\sqrt{x-x^2}} = \frac{2}{\sqrt{a+a^2}} \text{ arc. tang } \sqrt{\frac{x+xa}{a-ax}},$$

$$\int_0^a \frac{da}{(a+x)\sqrt{a+a^2}} = \frac{2}{\sqrt{x-x^2}} \text{ arc. tang } \sqrt{\frac{a-ax}{x+xa}};$$

et $\text{arc. tang } z + \text{arc. tang } \frac{1}{z} = \frac{\pi}{2}$.

III. Soit $y = \int_0^1 e^{-ax} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx$, où $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

En différentiant par rapport à a on obtient

$$\frac{dy}{da} = -\int_0^1 e^{-ax} x^{\alpha} (1-x)^{\beta-1} dx,$$

$$\frac{d^2y}{da^2} = \int_0^1 e^{-ax} x^{\alpha+1} (1-x)^{\beta-1} dx.$$

Lorsqu'on différentie la fonction $r = e^{-ax} x^{\alpha} (1-x)^{\beta}$ par rapport à x on obtient

$$dr = \alpha e^{-ax} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx - (\alpha+\beta+a) e^{-ax} x^{\alpha} (1-x)^{\beta-1} dx$$
$$+ a e^{-ax} x^{\alpha+1} (1-x)^{\beta-1} dx,$$

donc en intégrant depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$, et substituant pour les intégrales leurs valeurs en y, $\frac{dy}{da}$ et $\frac{d^2y}{da^2}$:

$$\frac{d^2y}{da^2} + \left(\frac{\alpha+\beta}{a} + 1\right) \frac{dy}{da} + \frac{\alpha}{a} y = 0.$$

On satisfait aussi à cette équation en faisant

$$y = y_1 = \int_1^{\infty} e^{-ax} x^{\alpha-1} (x-1)^{\beta-1} dx,$$

a étant positif. Or on a $p = \frac{\alpha+\beta}{a} + 1$, donc $e^{-\int p\,da} = \frac{C}{e^a a^{\alpha+\beta}}$. Donc l'équation (0) donne

$$y_1 \frac{dy}{da} - y \frac{dy_1}{da} = \frac{C}{e^a a^{\alpha+\beta}}.$$

Si dans l'expression de y_1 on met $x+1$ à la place de x, on trouve

$$y_1 = e^{-a}\int_0^{\infty} e^{-ax} x^{\beta-1}(1+x)^{\alpha-1}\,dx,$$

$$\frac{dy_1}{da} = -e^{-a}\int_0^{\infty} e^{-ax} x^{\beta-1}(1+x)^{\alpha}\,dx,$$

ou bien, en mettant $\frac{x}{a}$ à la place de x,

$$y_1 = e^{-a} a^{-\alpha-\beta+1}\int_0^{\infty} e^{-x} x^{\beta-1}(a+x)^{\alpha-1}\,dx,$$

$$\frac{dy_1}{da} = -e^{-a} a^{-\alpha-\beta}\int_0^{\infty} e^{-x} x^{\beta-1}(a+x)^{\alpha}\,dx.$$

En substituant ces valeurs de y_1, $\frac{dy_1}{da}$ de même que celles de y, $\frac{dy}{da}$, en multipliant par $e^a a^{\alpha+\beta}$, et faisant $a=0$, on trouvera

$$C = \int_0^{\infty} e^{-x}\,dx\,.\,x^{\beta+\alpha-1}\,.\int_0^1 dx\,.\,x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1},$$

c'est-à-dire

$$C = \Gamma(\alpha+\beta)\frac{\Gamma\alpha\,.\,\Gamma\beta}{\Gamma(\alpha+\beta)} = \Gamma\alpha\,.\,\Gamma\beta.$$

On aura donc

$$\Gamma\alpha\,.\,\Gamma\beta = \int_0^1 e^{-ax}\,dx\,.\,x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,.\int_0^{\infty} e^{-x}\,dx\,.\,x^{\beta-1}(a+x)^{\alpha}$$
$$-a\int_0^1 e^{-ax}\,dx\,.\,x^{\alpha}(1-x)^{\beta-1}\,.\int_0^{\infty} e^{-x}\,dx\,.\,x^{\beta-1}(a+x)^{\alpha-1}.$$

Lorsque $\beta = 1-\alpha$, on a

$$\frac{\pi}{\sin\alpha\pi} = \int_0^1 \frac{dx}{x}\,e^{-ax}\left(\frac{x}{1-x}\right)^{\alpha}\,.\int_0^{\infty} e^{-x}\,dx\left(1+\frac{a}{x}\right)^{\alpha}$$
$$-a\int_0^1 dx\,.\,e^{-ax}\left(\frac{x}{1-x}\right)^{\alpha}\,.\int_0^{\infty}\frac{dx}{x+a}\,e^{-x}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{\alpha}.$$

IV. Soit

$$y = \int_0^{\infty} e^{ax-x^2} x^{\alpha-1}\,dx, \text{ où } \alpha > 0.$$

En différentiant on aura

$$\frac{dy}{da}=\int_0^\infty e^{ax-x^2}x^\alpha\,dx,\quad \frac{d^2y}{da^2}=\int_0^\infty e^{ax-x^2}x^{\alpha+1}\,dx.$$

Or

$$d(e^{ax-x^2}x^\alpha)=dx\,.\,e^{ax-x^2}x^{\alpha-1}(\alpha+ax-2x^2);$$

donc en intégrant depuis $x=0$, jusqu'à $x=\infty$, en substituant les valeurs des intégrales en y, $\frac{dy}{da}$ et $\frac{d^2y}{da^2}$, et divisant par -2, on aura

$$\frac{d^2y}{da^2}-\tfrac{1}{2}a\frac{dy}{da}-\tfrac{1}{2}\alpha y=0.$$

Cette équation conserve la même forme lorsqu'on remplace a par $-a$, donc

$$y=y_1=\int_0^\infty e^{-ax-x^2}x^{\alpha-1}\,dx$$

est de même une intégrale particulière de cette équation. Puisque p est égal à $-\frac{1}{2}a$, on a $e^{-\int p\,da}=Ce^{\frac{a^2}{4}}$, et par conséquent,

$$y_1\frac{dy}{da}-y\frac{dy_1}{da}=Ce^{\frac{a^2}{4}}.$$

Si, pour trouver la quantité constante C, on fait $a=0$, on trouvera

$$y=\int_0^\infty e^{-x^2}x^{\alpha-1}\,dx=\tfrac{1}{2}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right),$$

$$\frac{dy}{da}=\int_0^\infty e^{-x^2}x^\alpha\,dx=\tfrac{1}{2}\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right),$$

$$y_1=\int_0^\infty e^{-x^2}x^{\alpha-1}\,dx=\tfrac{1}{2}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right),$$

$$\frac{dy_1}{da}=-\int_0^\infty e^{-x^2}x^\alpha\,dx=-\tfrac{1}{2}\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right),$$

donc en substituant:

$$C=\tfrac{1}{2}\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right),$$

et par suite

$$\tfrac{1}{2}\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)e^{\frac{a^2}{4}}=\int_0^\infty e^{ax-x^2}dx\,.\,x^{\alpha-1}\,.\int_0^\infty e^{-ax-x^2}dx\,.\,x^\alpha$$
$$+\int_0^\infty e^{ax-x^2}dx\,.\,x^\alpha\,.\int_0^\infty e^{-ax-x^2}dx\,.\,x^{\alpha-1}.$$

Si l'on met $a\sqrt{-1}$ à la place de a, on obtient la formule suivante:

$$\tfrac{1}{4}\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)e^{\frac{a^2}{4}}=\int_0^\infty dx\,.\,e^{-x^2}\cos ax\,.\,x^{\alpha-1}\,.\int_0^\infty dx\,.\,e^{-x^2}\cos ax\,.\,x^{\alpha}$$
$$+\int_0^\infty dx\,.\,e^{-x^2}\sin ax\,x^{\alpha-1}\,.\int_0^\infty dx\,.\,e^{-x^2}\sin ax\,.\,x^{\alpha}.$$

Note. Les quantités constantes (exposants), qui se trouvent dans les intégrales de ce mémoire, doivent avoir des valeurs telles que les intégrales ne deviennent pas infinies. Ces valeurs sont faciles à trouver.

XVI.

RECHERCHES SUR LES FONCTIONS ELLIPTIQUES.

Journal für die reine und angewandte Mathematik, herausgegeben von *Crelle*, Bd. 2, 3. Berlin 1827, 1828.

Depuis longtemps les fonctions logarithmiques, et les fonctions exponentielles et circulaires, ont été les seules fonctions transcendantes, qui ont attiré l'attention des géomètres. Ce n'est que dans ces derniers temps, qu'on a commencé à en considérer quelques autres. Parmi celles-ci il faut distinguer les fonctions nommées elliptiques, tant pour leur belles propriétés analytiques, que pour leur application dans les diverses branches des mathématiques. La première idée de ces fonctions à été donnée par l'immortel *Euler*, en démontrant, que l'équation séparée

$$\frac{dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4}}+\frac{dy}{\sqrt{\alpha+\beta y+\gamma y^2+\delta y^3+\varepsilon y^4}}=0$$

est intégrable algébriquement. Après *Euler*, *Lagrange* y a ajouté quelque chose, en donnant son élégante théorie de la transformation de l'intégrale $\int\frac{R\,.\,dx}{\sqrt{(1-p^2.x^2)(1-q^2.x^2)}}$, où R est une fonction rationnelle de x. Mais le premier et, si je ne me trompe, le seul, qui ait approfondi la nature de ces fonctions, est M. *Legendre*, qui, d'abord dans un mémoire sur les fonctions elliptiques, et ensuite dans ses excellents Exercices de mathématiques, a développé nombre de propriétés élégantes de ces fonctions, et en a montré l'application. Depuis la publication de cet ouvrage, rien n'a été ajouté à la

théorie de M. *Legendre*. Je crois qu'on ne verra pas ici sans plaisir des recherches ultérieures sur ces fonctions.

En général on comprend sous la dénomination de fonctions elliptiques, toute fonction comprise dans l'intégrale

$$\int \frac{R\,dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4}},$$

où R est une fonction rationnelle et α, β, γ, δ, ε sont des quantités constantes et *réelles*. M. *Legendre* a démontré que par des substitutions convenables on peut toujours ramener cette intégrale à la forme

$$\int \frac{P\,dy}{\sqrt{a+by^2+cy^4}},$$

où P est une fonction rationnelle de y^2. Par des réductions convenables, cette intégrale peut être ensuite ramenée à la forme

$$\int \frac{A+By^2}{C+Dy^2}\frac{dy}{\sqrt{a+by^2+cy^4}},$$

et celle-ci à

$$\int \frac{A+B\sin^2\theta}{C+D\sin^2\theta}\frac{d\theta}{\sqrt{1-c^2\sin^2\theta}},$$

où c est réel et moindre que l'unité.

Il suit de là, que toute fonction elliptique peut être réduite à l'une des trois formes:

$$\int \frac{d\theta}{\sqrt{1-c^2\sin^2\theta}};\quad \int d\theta\sqrt{1-c^2\sin^2\theta},\quad \int \frac{d\theta}{(1+n\sin^2\theta)\sqrt{1-c^2\sin^2\theta}},$$

auxquelles M. *Legendre* donne les noms de fonctions elliptiques de la première, seconde et troisième espèce. Ce sont ces trois fonctions que M. *Legendre* a considérées, surtout la première, qui a les propriétés les plus remarquables et les plus simples.

Je me propose, dans ce mémoire, de considérer la fonction inverse, c'est-à-dire la fonction $\varphi\alpha$, déterminée par les équations

$$\alpha=\int \frac{d\theta}{\sqrt{1-c^2\sin^2\theta}},$$

$$\sin\theta=\varphi\alpha=x.$$

La dernière équation donne

$$d\theta\sqrt{1-\sin^2\theta}=d(\varphi\alpha)=dx,$$

donc

$$\alpha = \int_0 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}}.$$

M. *Legendre* suppose c^2 positif, mais j'ai remarqué que les formules deviennent plus simples, en supposant c^2 négatif, égal à $-e^2$. De même j'écris pour plus de symétrie $1-c^2x^2$ au lieu de $1-x^2$, en sorte que la fonction $\varphi\alpha = x$ sera donnée par l'équation

$$\alpha = \int_0 \frac{dx}{\sqrt{(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)}},$$

ou bien

$$\varphi'\alpha = \sqrt{(1-c^2\varphi^2\alpha)(1+e^2\varphi^2\alpha)}.$$

Pour abréger, j'introduis deux autres fonctions de α, savoir

$$f\alpha = \sqrt{1-c^2\varphi^2\alpha}; \quad F\alpha = \sqrt{1+e^2\varphi^2\alpha}.$$

Plusieurs propriétés de ces fonctions se déduisent immédiatement des propriétés connues de la fonction elliptique de la première espèce, mais d'autres sont plus cachées. Par exemple on démontre que les équations $\varphi\alpha = 0$, $f\alpha = 0$, $F\alpha = 0$ ont un nombre infini de racines, qu'on peut trouver toutes. Une des propriétés les plus remarquables est qu'on peut exprimer rationnellement $\varphi(m\alpha)$, $f(m\alpha)$, $F(m\alpha)$ (m étant un nombre entier) en $\varphi\alpha$, $f\alpha$, $F\alpha$. Aussi rien n'est plus facile que de trouver $\varphi(m\alpha)$, $f(m\alpha)$, $F(m\alpha)$, lorsqu'on connaît $\varphi\alpha$, $f\alpha$, $F\alpha$; mais le problème inverse, savoir de déterminer $\varphi\alpha$, $f\alpha$, $F\alpha$ en $\varphi(m\alpha)$, $f(m\alpha)$, $F(m\alpha)$, est plus difficile, parcequ'il dépend d'une équation d'un degré élevé (savoir du degré m^2).

La résolution de cette équation est l'objet principal de ce mémoire. D'abord on fera voir, comment on peut trouver toutes les racines, au moyen des fonctions φ, f, F. On traitera ensuite de la résolution algébrique de l'équation en question, et on parviendra à ce résultat remarquable, que $\varphi\frac{\alpha}{m}$, $f\frac{\alpha}{m}$, $F\frac{\alpha}{m}$ peuvent être exprimés en $\varphi\alpha$, $f\alpha$, $F\alpha$, par une formule qui, par rapport à α, ne contient d'autres irrationnalités que des radicaux. Cela donne une classe très générale d'équations qui sont résolubles algébriquement. Il est à remarquer que les expressions des racines contiennent des quantités constantes qui, en général, ne sont pas exprimables par des quantités algébriques. Ces quantités constantes dépendent d'une équation du degré m^2-1. On fera voir comment, au moyen de fonctions algébriques,

on peut en ramener la résolution à celle d'une équation du degré $m+1$. On donnera plusieurs expressions des fonctions $\varphi(2n+1)\alpha$, $f(2n+1)\alpha$, $F(2n+1)\alpha$ en fonction de $\varphi\alpha$, $f\alpha$, $F\alpha$. On en déduira ensuite les valeurs de $\varphi\alpha$, $f\alpha$, $F\alpha$ en fonction de α. On démontrera, que ces fonctions peuvent être décomposées en un nombre infini de facteurs, et même en une infinité de fractions partielles.

§ I.

Propriétés fondamentales des fonctions $\varphi\alpha$, $f\alpha$, $F\alpha$.

1.

En supposant que

(1) $$\varphi\alpha = x,$$

on aura en vertu de ce qui précède

(2) $$\alpha = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)}}.$$

Par là on voit que α, considéré comme fonction de x, est positif depuis $x=0$ jusqu'à $x=\frac{1}{c}$. En faisant donc

(3) $$\frac{\omega}{2} = \int_0^{\frac{1}{c}} \frac{dx}{\sqrt{(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)}},$$

il est évident que $\varphi\alpha$ est positif et va en augmentant depuis $\alpha=0$ jusqu'à $\alpha=\frac{\omega}{2}$, et qu'on aura

(4) $$\varphi(0)=0,\quad \varphi\left(\frac{\omega}{2}\right)=\frac{1}{c}.$$

Comme α change de signe, lorsqu'on écrit $-x$ à la place de x, il en est de même de la fonction $\varphi\alpha$ par rapport à α, et par conséquent on aura l'équation

(5) $$\varphi(-\alpha) = -\varphi\alpha.$$

En mettant dans (1) xi au lieu de x (où i, pour abréger, représente la quantité imaginaire $\sqrt{-1}$) et désignant la valeur de α par βi, il viendra

(6) $$xi=\varphi(\beta i) \quad \text{et} \quad \beta = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1+c^2x^2)(1-e^2x^2)}}.$$



β est réel et positif depuis $x=0$ jusqu'à $x=\frac{1}{e}$, donc en faisant

(7) $$\frac{\varpi}{2}=\int_0^{\frac{1}{e}}\frac{dx}{\sqrt{(1-e^2x^2)(1+c^2x^2)}},$$

x sera positif, depuis $\beta=0$ jusqu'à $\beta=\frac{\varpi}{2}$, c'est-à-dire que la fonction $\frac{1}{i}\,\varphi(\beta i)$ sera positive entre les mêmes limites. En faisant $\beta=\alpha$ et $y=\frac{\varphi(\alpha i)}{i}$, on a

$$\alpha=\int_0^y\frac{dy}{\sqrt{(1-e^2y^2)(1+c^2y^2)}},$$

donc on voit, qu'en supposant c au lieu de e et e au lieu de c,

$$\frac{\varphi(\alpha i)}{i} \text{ se changera en } \varphi\alpha.$$

Et comme

$$f\alpha=\sqrt{1-c^2\varphi^2\alpha},$$
$$F\alpha=\sqrt{1+e^2\varphi^2\alpha},$$

on voit que par le changement de c en e et e en c, $f(\alpha i)$ et $F(\alpha i)$ se changeront respectivement en $F\alpha$ et $f\alpha$. Enfin les équations (3) et (7) font voir que par la même transformation ω et ϖ se changeront respectivement en ϖ et ω.

D'après la formule (7) on aura $x=\frac{1}{e}$ pour $\beta=\frac{\varpi}{2}$, donc en vertu de l'équation $xi=\varphi(\beta i)$, il viendra

(8) $$\varphi\left(\frac{\varpi i}{2}\right)=i\cdot\frac{1}{e}.$$

2.

En vertu de ce qui précède, on aura les valeurs de $\varphi\alpha$ pour toute valeur réelle de α, comprise entre $-\frac{\omega}{2}$ et $+\frac{\omega}{2}$, et pour toute valeur imaginaire de la forme βi de cette quantité, si β est une quantité contenue entre les limites $-\frac{\varpi}{2}$ et $+\frac{\varpi}{2}$. Il s'agit maintenant de trouver la valeur de cette fonction pour une valeur quelconque, réelle ou imaginaire, de la

variable. Pour y parvenir, nous allons d'abord établir les propriétés fondamentales des fonctions φ, f et F.

Ayant

$$f^2\alpha = 1 - c^2\varphi^2\alpha,$$
$$F^2\alpha = 1 + e^2\varphi^2\alpha,$$

on aura, en différentiant

$$f\alpha . f'\alpha = -c^2\varphi\alpha . \varphi'\alpha,$$
$$F\alpha . F'\alpha = e^2\varphi\alpha . \varphi'\alpha.$$

Or d'après (2) on a

$$\varphi'\alpha = \sqrt{(1 - c^2\varphi^2\alpha)(1 + e^2\varphi^2\alpha)} = f\alpha . F\alpha,$$

donc, en substituant cette valeur de $\varphi'\alpha$ dans les deux équations précédentes, on trouvera que les fonctions $\varphi\alpha$, $f\alpha$, $F\alpha$ sont liées entre elles par les équations

$$(9) \qquad \begin{cases} \varphi'\alpha = f\alpha . F\alpha, \\ f'\alpha = -c^2\varphi\alpha . F\alpha, \\ F'\alpha = e^2\varphi\alpha . f\alpha. \end{cases}$$

Cela posé, je dis qu'en désignant par α et β deux indéterminées, on aura

$$(10) \qquad \begin{cases} \varphi(\alpha+\beta) = \dfrac{\varphi\alpha . f\beta . F\beta + \varphi\beta . f\alpha . F\alpha}{1 + e^2c^2\varphi^2\alpha . \varphi^2\beta}, \\ f(\alpha+\beta) = \dfrac{f\alpha . f\beta - c^2\varphi\alpha . \varphi\beta . F\alpha . F\beta}{1 + e^2c^2\varphi^2\alpha . \varphi^2\beta}, \\ F(\alpha+\beta) = \dfrac{F\alpha . F\beta + e^2\varphi\alpha . \varphi\beta . f\alpha . f\beta}{1 + e^2c^2\varphi^2\alpha . \varphi^2\beta}. \end{cases}$$

Ces formules peuvent être déduites sur le champ des propriétés connues des fonctions elliptiques (*Legendre* Exercices de Calcul intégral); mais on peut aussi les vérifier aisément de la manière suivante.

En désignant par r le second membre de la première des équations (10), on aura, en différentiant par rapport à α,

$$\frac{dr}{d\alpha} = \frac{\varphi'\alpha . f\beta . F\beta + \varphi\beta . F\alpha . f'\alpha + \varphi\beta . f\alpha . F'\alpha}{1 + e^2c^2\varphi^2\alpha . \varphi^2\beta}$$
$$- \frac{(\varphi\alpha . f\beta . F\beta + \varphi\beta . f\alpha . F\alpha)\, 2e^2c^2\varphi\alpha . \varphi^2\beta . \varphi'\alpha}{(1 + e^2c^2\varphi^2\alpha . \varphi^2\beta)^2}.$$

En substituant pour $\varphi'\alpha$, $f'\alpha$, $F'\alpha$ leurs valeurs données par les équations (9), il viendra

$$\frac{dr}{d\alpha} = \frac{f\alpha . F\alpha . f\beta . F\beta}{1+e^2c^2\varphi^2\alpha . \varphi^2\beta} - \frac{2e^2c^2\varphi^2\alpha . \varphi^2\beta . f\alpha . f\beta . F\alpha . F\beta}{(1+e^2c^2\varphi^2\alpha . \varphi^2\beta)^2}$$
$$+ \frac{\varphi\alpha . \varphi\beta . (1+e^2c^2\varphi^2\alpha . \varphi^2\beta)(-c^2F^2\alpha + e^2f^2\alpha) - 2e^2c^2\varphi\alpha . \varphi\beta . \varphi^2\beta . f^2\alpha . F^2\alpha}{(1+e^2c^2\varphi^2\alpha . \varphi^2\beta)^2},$$

d'où, en substituant pour $f^2\alpha$ et $F^2\alpha$ leurs valeurs $1-c^2\varphi^2\alpha$, $1+e^2\varphi^2\alpha$, et en réduisant, on tire

$$\frac{dr}{d\alpha} = \frac{(1-e^2c^2\varphi^2\alpha . \varphi^2\beta)[(e^2-c^2)\varphi\alpha . \varphi\beta + f\alpha . f\beta . F\alpha . F\beta] - 2e^2c^2\varphi\alpha . \varphi\beta(\varphi^2\alpha + \varphi^2\beta)}{(1+e^2c^2\varphi^2\alpha . \varphi^2\beta)^2}.$$

Maintenant α et β entrent symétriquement dans l'expression de r; donc on aura la valeur de $\frac{dr}{d\beta}$, en permutant α et β dans la valeur de $\frac{dr}{d\alpha}$. Or par là l'expression de $\frac{dr}{d\alpha}$ ne change pas de valeur, donc on aura

$$\frac{dr}{d\alpha} = \frac{dr}{d\beta}.$$

Cette équation aux différentielles partielles fait voir que r est fonction de $\alpha+\beta$; donc on aura

$$r = \psi(\alpha+\beta).$$

La forme de la fonction ψ se trouvera en donnant à β une valeur particulière. En supposant par exemple $\beta=0$, et en remarquant que $\varphi(0)=0$, $f(0)=1$, $F(0)=1$, les deux valeurs de r deviendront

$$r = \varphi\alpha \quad \text{et} \quad r = \psi\alpha,$$

donc

$$\psi\alpha = \varphi\alpha,$$

d'où

$$r = \psi(\alpha+\beta) = \varphi(\alpha+\beta).$$

La première des formules (10) a donc effectivement lieu.

On vérifiera de la même manière les deux autres formules.

3.

Des formules (10) on peut déduire une foule d'autres. Je vais rapporter quelques-unes des plus remarquables. Pour abréger je fais

$$(11) \qquad 1+e^2c^2\varphi^2\alpha . \varphi^2\beta = R.$$

En changeant d'abord le signe de β, on obtiendra

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned}
&\varphi(\alpha+\beta)+\varphi(\alpha-\beta)=\frac{2\varphi\alpha.f\beta.F\beta}{R},\\
&\varphi(\alpha+\beta)-\varphi(\alpha-\beta)=\frac{2\varphi\beta.f\alpha.F\alpha}{R},\\
&f(\alpha+\beta)+f(\alpha-\beta)=\frac{2f\alpha.f\beta}{R},\\
&f(\alpha+\beta)-f(\alpha-\beta)=\frac{-2c^2.\varphi\alpha.\varphi\beta.F\alpha.F\beta}{R},\\
&F(\alpha+\beta)+F(\alpha-\beta)=\frac{2F\alpha.F\beta}{R},\\
&F(\alpha+\beta)-F(\alpha-\beta)=\frac{2e^2.\varphi\alpha.\varphi\beta.f\alpha.f\beta}{R}.
\end{aligned}\right.$$

En formant le produit de $\varphi(\alpha+\beta)$ et $\varphi(\alpha-\beta)$, on trouvera

$$\begin{aligned}
\varphi(\alpha+\beta).\varphi(\alpha-\beta)&=\frac{\varphi\alpha.f\beta.F\beta+\varphi\beta.f\alpha.F\alpha}{R}.\frac{\varphi\alpha.f\beta.F\beta-\varphi\beta.f\alpha.F\alpha}{R}\\
&=\frac{\varphi^2\alpha.f^2\beta.F^2\beta-\varphi^2\beta.f^2\alpha.F^2\alpha}{R^2},
\end{aligned}$$

ou, en substituant les valeurs de $f^2\beta$, $F^2\beta$, $f^2\alpha$, $F^2\alpha$ en $\varphi\beta$ et $\varphi\alpha$,

$$\begin{aligned}
\varphi(\alpha+\beta).\varphi(\alpha-\beta)&=\frac{\varphi^2\alpha-\varphi^2\beta-e^2c^2\varphi^2\alpha.\varphi^4\beta+e^2c^2\varphi^2\beta.\varphi^4\alpha}{R^2}\\
&=\frac{(\varphi^2\alpha-\varphi^2\beta)(1+e^2c^2\varphi^2\alpha.\varphi^2\beta)}{R^2};
\end{aligned}$$

or $R=1+e^2c^2\varphi^2\alpha.\varphi^2\beta$, donc

$$(13)\qquad \varphi(\alpha+\beta).\varphi(\alpha-\beta)=\frac{\varphi^2\alpha-\varphi^2\beta}{R}.$$

On trouvera de même

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned}
f(\alpha+\beta).f(\alpha-\beta)&=\frac{f^2\alpha-c^2\varphi^2\beta.F^2\alpha}{R}=\frac{f^2\beta-c^2\varphi^2\alpha.F^2\beta}{R}\\
&=\frac{1-c^2\varphi^2\alpha-c^2\varphi^2\beta-c^2e^2\varphi^2\alpha.\varphi^2\beta}{R}=\frac{f^2\alpha.f^2\beta-c^2(c^2+e^2)\varphi^2\alpha.\varphi^2\beta}{R},\\
F(\alpha+\beta).F(\alpha-\beta)&=\frac{F^2\alpha+e^2\varphi^2\beta.f^2\alpha}{R}=\frac{F^2\beta+e^2\varphi^2\alpha.f^2\beta}{R}\\
&=\frac{1+e^2\varphi^2\alpha+e^2\varphi^2\beta-e^2c^2\varphi^2\alpha.\varphi^2\beta}{R}=\frac{F^2\alpha.F^2\beta-e^2(c^2+e^2)\varphi^2\alpha.\varphi^2\beta}{R}.
\end{aligned}\right.$$

4.

En faisant dans les formules (10) $\beta = \pm\frac{\omega}{2}$, $\beta = \pm\frac{\varpi}{2}i$, et en remarquant que $f\left(\pm\frac{\omega}{2}\right) = 0$, $F\left(\pm\frac{\varpi}{2}i\right) = 0$, on aura

$$(15)\quad \begin{cases} \varphi\left(\alpha \pm \frac{\omega}{2}\right) = \pm\varphi\frac{\omega}{2}\cdot\frac{f\alpha}{F\alpha};\ f\left(\alpha\pm\frac{\omega}{2}\right) = \mp\frac{F\frac{\omega}{2}}{\varphi\frac{\omega}{2}}\cdot\frac{\varphi\alpha}{F\alpha}; \\ F\left(\alpha\pm\frac{\omega}{2}\right) = \frac{F\frac{\omega}{2}}{F\alpha}; \\ \varphi\left(\alpha\pm\frac{\varpi}{2}i\right) = \pm\varphi\left(\frac{\varpi}{2}i\right)\cdot\frac{F\alpha}{f\alpha};\ F\left(\alpha\pm\frac{\varpi}{2}i\right) = \mp\frac{f\left(\frac{\varpi}{2}i\right)}{\varphi\left(\frac{\varpi}{2}i\right)}\cdot\frac{\varphi\alpha}{f\alpha}; \\ f\left(\alpha\pm\frac{\varpi}{2}i\right) = \frac{f\left(\frac{\varpi}{2}i\right)}{f\alpha}; \end{cases}$$

ou bien:

$$(16)\quad \begin{cases} \varphi\left(\alpha\pm\frac{\omega}{2}\right) = \pm\frac{1}{c}\frac{f\alpha}{F\alpha};\ f\left(\alpha\pm\frac{\omega}{2}\right) = \mp\sqrt{e^2+c^2}\frac{\varphi\alpha}{F\alpha}; \\ F\left(\alpha\pm\frac{\omega}{2}\right) = \frac{\sqrt{e^2+c^2}}{c}\frac{1}{F\alpha}; \\ \varphi\left(\alpha\pm\frac{\varpi}{2}i\right) = \pm\frac{i}{e}\frac{F\alpha}{f\alpha};\ F\left(\alpha\pm\frac{\varpi}{2}i\right) = \pm i\sqrt{e^2+c^2}\frac{\varphi\alpha}{f\alpha}; \\ f\left(\alpha\pm\frac{\varpi}{2}i\right) = \frac{\sqrt{e^2+c^2}}{e}\frac{1}{f\alpha}. \end{cases}$$

De là on tire sur le champ

$$(17)\quad \begin{cases} \varphi\left(\frac{\omega}{2}+\alpha\right) = \varphi\left(\frac{\omega}{2}-\alpha\right);\ f\left(\frac{\omega}{2}+\alpha\right) = -f\left(\frac{\omega}{2}-\alpha\right); \\ F\left(\frac{\omega}{2}+\alpha\right) = F\left(\frac{\omega}{2}-\alpha\right); \\ \varphi\left(\frac{\varpi}{2}i+\alpha\right) = \varphi\left(\frac{\varpi}{2}i-\alpha\right);\ F\left(\frac{\varpi}{2}i+\alpha\right) = -F\left(\frac{\varpi}{2}i-\alpha\right); \\ f\left(\frac{\varpi}{2}i+\alpha\right) = f\left(\frac{\varpi}{2}i-\alpha\right). \end{cases}$$

$$(18) \quad \begin{cases} \varphi\left(\alpha \pm \frac{\omega}{2}\right)\varphi\left(\alpha + \frac{\varpi}{2}i\right) = \pm\frac{i}{ce}; \quad F\left(\alpha \pm \frac{\omega}{2}\right)F\alpha = \frac{\sqrt{e^2+c^2}}{c}; \\ f\left(\alpha \pm \frac{\varpi}{2}i\right)f\alpha = \frac{\sqrt{e^2+c^2}}{e}. \end{cases}$$

En faisant $\alpha = \frac{\omega}{2}$ et $\frac{\varpi}{2}i$, on en déduit

$$\varphi\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\varpi}{2}i\right) = \frac{1}{0}, \quad f\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\varpi}{2}i\right) = \frac{1}{0}, \quad F\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\varpi}{2}i\right) = \frac{1}{0}.$$

En mettant ensuite dans les trois premières équations (17) $\alpha + \frac{\omega}{2}$ au lieu de α, et dans les trois dernières $\alpha + \frac{\varpi}{2}i$ au lieu de α, on obtiendra les suivantes

$$(19) \quad \begin{cases} \varphi(\alpha+\omega) = -\varphi\alpha; \quad f(\alpha+\omega) = -f\alpha; \quad F(\alpha+\omega) = \quad F\alpha; \\ \varphi(\alpha+\varpi i) = -\varphi\alpha; \quad f(\alpha+\varpi i) = \quad f\alpha; \quad F(\alpha+\varpi i) = -F\alpha; \end{cases}$$

et en mettant $\alpha+\omega$ et $\alpha+\varpi i$ au lieu de α:

$$(20) \quad \begin{cases} \varphi(2\omega+\alpha) = \varphi\alpha; \quad \varphi(2\varpi i+\alpha) = \varphi\alpha; \quad \varphi(\omega+\varpi i+\alpha) = \varphi\alpha; \\ f(2\omega+\alpha) = f\alpha; \quad f(\varpi i+\alpha) = f\alpha; \\ F(\omega+\alpha) = F\alpha; \quad F(2\varpi i+\alpha) = F\alpha. \end{cases}$$

Ces équations font voir que les fonctions $\varphi\alpha$, $f\alpha$, $F\alpha$ sont des fonctions *périodiques*. On en déduira sans peine les suivantes, où m et n sont deux nombres entiers positifs ou négatifs:

$$(21) \quad \begin{cases} \varphi[(m+n)\omega + (m-n)\varpi i + \alpha] = \varphi\alpha; \\ \varphi[(m+n)\omega + (m-n+1)\varpi i + \alpha] = -\varphi\alpha; \\ f(2m\omega + n\varpi i + \alpha) = f\alpha; \quad f[(2m+1)\omega + n\varpi i + \alpha] = -f\alpha. \\ F(m\omega + 2n\varpi i + \alpha) = F\alpha; \quad F[m\omega + (2n+1)\varpi i + \alpha] = -F\alpha. \end{cases}$$

Ces formules peuvent aussi s'écrire comme il suit:

$$(22) \quad \begin{cases} \varphi(m\omega + n\varpi i \pm \alpha) = \pm(-1)^{m+n}\varphi\alpha, \\ f(m\omega + n\varpi i \pm \alpha) = (-1)^m f\alpha, \\ F(m\omega + n\varpi i \pm \alpha) = (-1)^n F\alpha. \end{cases}$$

On peut remarquer comme cas particuliers:

$$(22') \quad \begin{cases} \varphi(m\omega \pm \alpha) = \pm(-1)^m \varphi\alpha; & \varphi(n\varpi i \pm \alpha) = \pm(-1)^n \varphi\alpha; \\ f(m\omega \pm \alpha) = (-1)^m f\alpha; & f(n\varpi i \pm \alpha) = f\alpha; \\ F(m\omega \pm \alpha) = F\alpha; & F(n\varpi i \pm \alpha) = (-1)^n F\alpha. \end{cases}$$

5.

Les formules qu'on vient d'établir font voir qu'on aura les valeurs des fonctions $\varphi\alpha$, $f\alpha$, $F\alpha$ pour toutes les valeurs réelles ou imaginaires de la variable, si on les connaît pour les valeurs réelles de cette quantité, comprises entre $\frac{\omega}{2}$ et $-\frac{\omega}{2}$ et pour les valeurs imaginaires de la forme βi, où β est compris entre $\frac{\varpi}{2}$ et $-\frac{\varpi}{2}$.

En effet, supposons qu'on demande la valeur des fonctions $\varphi(\alpha+\beta i)$, $f(\alpha+\beta i)$, $F(\alpha+\beta i)$, où α et β sont des quantités réelles quelconques. En mettant dans les formules (10) βi à la place de β, il est clair qu'on aura les trois fonctions dont il s'agit, exprimées par les fonctions $\varphi\alpha$, $f\alpha$, $F\alpha$, $\varphi(\beta i)$, $f(\beta i)$, $F(\beta i)$. Il ne reste donc qu'à déterminer ces dernières. Or, quelles que soient les valeurs de α et β, on peut toujours trouver deux nombres entiers m et n, tels que $\alpha = m\omega \pm \alpha'$, $\beta = n\varpi \pm \beta'$, où α' est une quantité comprise entre 0 et $+\frac{\omega}{2}$, et β' entre 0 et $+\frac{\varpi}{2}$. Donc on aura, en vertu des équations (22'), en substituant les valeurs précédentes de α et β,

$$\begin{aligned} \varphi\alpha &= \varphi(m\omega \pm \alpha') = \pm(-1)^m \varphi\alpha', \\ f\alpha &= f(m\omega \pm \alpha') = (-1)^m f\alpha', \\ F\alpha &= F(m\omega \pm \alpha') = F\alpha', \\ \varphi(\beta i) &= \varphi(n\varpi i \pm \beta' i) = \pm(-1)^n \varphi(\beta' i), \\ f(\beta i) &= f(n\varpi i \pm \beta' i) = f(\beta' i), \\ F(\beta i) &= F(n\varpi i \pm \beta' i) = (-1)^n F(\beta' i). \end{aligned}$$

Donc les fonctions $\varphi\alpha$, $f\alpha$, $F\alpha$, $\varphi(\beta i)$, $f(\beta i)$, $F(\beta i)$ seront exprimées comme on vient de le dire, et par suite aussi les fonctions $\varphi(\alpha+\beta i)$, $f(\alpha+\beta i)$, $F(\alpha+\beta i)$.

Nous avons vu précédemment, que $\varphi\alpha$ est réel depuis $\alpha = -\frac{\omega}{2}$ jusqu'à

$\alpha = +\frac{\omega}{2}$, et que $\frac{\varphi(\alpha i)}{i}$ est réel dépuis $\alpha = -\frac{\varpi}{2}$ jusqu'à $\alpha = +\frac{\varpi}{2}$. Donc en vertu des équations (22) il est clair

1) que $\varphi\alpha$ et $\frac{\varphi(\alpha i)}{i}$ sont réels pour toute valeur réelle de α; $\varphi\alpha$ est compris entre $-\frac{1}{c}$ et $+\frac{1}{c}$, et $\frac{\varphi(\alpha i)}{i}$ entre $-\frac{1}{e}$ et $+\frac{1}{e}$;

2) que $\varphi\alpha$ s'évanouit pour $\alpha = m\omega$, et $\frac{\varphi(\alpha i)}{i}$ pour $\alpha = m\varpi$, m étant un nombre entier positif ou négatif; mais $\varphi\alpha$ n'est pas nul pour aucune autre valeur réelle de α.

En remarquant, que $f\alpha = \sqrt{1-c^2\varphi^2\alpha}$, $F\alpha = \sqrt{1+e^2\varphi^2\alpha}$, il suit de ce que nous venons de dire

1) que les fonctions $f\alpha$, $F\alpha$, $f(\alpha i)$, $F(\alpha i)$ sont réelles pour toute valeur de α;

2) que $f\alpha$ est compris entre les limites -1 et $+1$ et $F\alpha$ entre les limites $+1$ et $+\sqrt{1+\frac{e^2}{c^2}}$, de sorte que $F\alpha$ est positif pour toute valeur réelle de α;

3) que $f(\alpha i)$ est positif et compris entre les limites $+1$ et $\sqrt{1+\frac{c^2}{e^2}}$ et $F(\alpha i)$ entre les limites -1 et $+1$ pour toute valeur réelle de α;

4) que $f\alpha$ s'évanouit pour $\alpha = (m+\frac{1}{2})\omega$ et $F(\alpha i)$ pour $\alpha = (m+\frac{1}{2})\varpi$; mais que ces fonctions ne s'annulent pour aucune autre valeur de α.

On remarquera ce qui suit, comme corollaires des formules (22):

1) Soit $\alpha = 0$. Dans ce cas, en remarquant que $\varphi(0) = 0$, $f(0) = 1$, $F(0) = 1$, on aura

$$(23) \qquad \begin{cases} \varphi(m\omega + n\varpi i) = 0, \\ f(m\omega + n\varpi i) = (-1)^m, \\ F(m\omega + n\varpi i) = (-1)^n. \end{cases}$$

2) Soit $\alpha = \frac{\omega}{2}$. En vertu des équations:

$$\varphi\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{1}{c}, \quad f\left(\frac{\omega}{2}\right) = 0, \quad F\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{\sqrt{e^2+c^2}}{c} = \frac{b}{c},$$

on aura

$$(24) \qquad \begin{cases} \varphi[(m+\frac{1}{2})\omega + n\varpi i] = (-1)^{m+n}\frac{1}{c}, \\ f[(m+\frac{1}{2})\omega + n\varpi i] = 0, \\ F[(m+\frac{1}{2})\omega + n\varpi i] = (-1)^n\frac{b}{c}. \end{cases}$$

3) Soit $\alpha = \frac{\varpi}{2} i$. En vertu des équations

$$\varphi\left(\frac{\varpi}{2} i\right) = \frac{i}{e}, \quad f\left(\frac{\varpi}{2} i\right) = \frac{b}{e}, \quad F\left(\frac{\varpi}{2} i\right) = 0,$$

on aura

$$(25) \quad \begin{cases} \varphi[m\omega + (n + \frac{1}{2})\varpi i] = (-1)^{m+n} \frac{i}{e}, \\ f[m\omega + (n + \frac{1}{2})\varpi i] = (-1)^m \frac{b}{e}, \\ F[m\omega + (n + \frac{1}{2})\varpi i] = 0. \end{cases}$$

4) Soit $\alpha = \frac{\omega}{2} + \frac{\varpi}{2} i$. En vertu des équations ci-dessus on aura

$$(26) \quad \begin{cases} \varphi[(m + \frac{1}{2})\omega + (n + \frac{1}{2})\varpi i] = \frac{1}{0}, \\ f[(m + \frac{1}{2})\omega + (n + \frac{1}{2})\varpi i] = \frac{1}{0}, \\ F[(m + \frac{1}{2})\omega + (n + \frac{1}{2})\varpi i] = \frac{1}{0}. \end{cases}$$

6.

Les équations (23), (24), (25) font voir que la fonction $\varphi\alpha$ s'évanouit, toutes les fois que α est de la forme $\alpha = m\omega + n\varpi i$; que $f\alpha$ s'évanouit toutes les fois que α est de la forme $\alpha = (m + \frac{1}{2})\omega + n\varpi i$, et que $F\alpha$ s'évanouit toutes les fois que α est de la forme $\alpha = m\omega + (n + \frac{1}{2})\varpi i$. Or je dis que pour toute autre valeur de α, les fonctions $\varphi\alpha$, $f\alpha$, $F\alpha$ auront nécessairement une valeur différente de zéro. Supposons en effet qu'on ait

$$\varphi(\alpha + \beta i) = 0,$$

α et β étant des quantités réelles. En vertu de la première des formules (10), cette équation peut s'écrire comme il suit:

$$\frac{\varphi\alpha \, . \, f(\beta i) \, F(\beta i) + \varphi(\beta i) f\alpha \, . \, F\alpha}{1 + e^2 c^2 \varphi^2 \alpha \, . \, \varphi^2(\beta i)} = 0.$$

Maintenant les quantités $\varphi\alpha$, $f(\beta i)$, $F(\beta i)$ sont réelles et $\varphi(\beta i)$ est de la forme iA, où A est réel; donc cette équation ne peut subsister à moins qu'on n'ait séparément

$$\varphi\alpha \, . \, f(\beta i) \, F(\beta i) = 0; \quad \varphi(\beta i) f\alpha \, . \, F\alpha = 0.$$

Ces équations ne peuvent être satisfaites que de deux manières, savoir en faisant

$$\varphi\alpha = 0,\quad \varphi(\beta i) = 0,$$

ou

$$f(\beta i)F(\beta i) = 0,\quad f\alpha . F\alpha = 0.$$

Les deux premières équations donnent $\alpha = m\omega$; $\beta = n\varpi$. Les deux dernières, en remarquant que $F\alpha$ et $f(\beta i)$ ne peuvent jamais s'évanouir, donnent

$$f\alpha = 0,\quad F(\beta i) = 0,$$

d'où

$$\alpha = (m + \tfrac{1}{2})\omega,\quad \beta = (n + \tfrac{1}{2})\varpi.$$

Mais pour ces valeurs de α et β, la valeur de $\varphi(\alpha + \beta i)$ deviendra infinie; donc les seules valeurs de α et β sont $\alpha = m\omega$ et $\beta = n\varpi$, et par conséquent toutes les racines de l'équation

$$\varphi x = 0,$$

peuvent être représentées par

(27) $$x = m\omega + n\varpi i.$$

De la même manière on trouvera que toutes les racines de l'équation

$$fx = 0,$$

peuvent être représentées par

(28) $$x = (m + \tfrac{1}{2})\omega + n\varpi i,$$

et celles de l'équation

$$Fx = 0,$$

par

(29) $$x = m\omega + (n + \tfrac{1}{2})\varpi i.$$

7.

Les formules (26) font voir qu'on satisfait aux trois équations

$$\varphi x = \tfrac{1}{0},\quad fx = \tfrac{1}{0},\quad Fx = \tfrac{1}{0},$$

en donnant à x une des valeurs de la forme

(30) $$x = (m + \tfrac{1}{2})\omega + (n + \tfrac{1}{2})\varpi i.$$

Or on peut démontrer que les équations en question n'ont pas d'autres racines. En effet, ayant

$$\varphi x = \frac{i}{ec} \frac{1}{\varphi\left(x - \frac{\omega}{2} - \frac{\varpi}{2} i\right)}, \quad fx = \frac{b}{e} \frac{1}{f\left(x - \frac{\varpi}{2} i\right)}, \quad Fx = \frac{b}{c} \frac{1}{F\left(x - \frac{\omega}{2}\right)},$$

les équations en question entraîneront celles-ci:

$$\varphi\left(x - \frac{\omega}{2} - \frac{\varpi}{2} i\right) = 0, \quad f\left(x - \frac{\varpi}{2} i\right) = 0, \quad F\left(x - \frac{\omega}{2}\right) = 0;$$

mais en vertu de ce qu'on vient de voir dans le numéro précédent, ces équations donnent respectivement

$$x - \frac{\omega}{2} - \frac{\varpi}{2} i = m\omega + n\varpi i; \quad x - \frac{\varpi}{2} i = (m + \tfrac{1}{2})\omega + n\varpi i,$$

$$x - \frac{\omega}{2} = m\omega + (n + \tfrac{1}{2})\varpi i;$$

ces trois équations sont équivalentes à la suivante:

$$x = (m + \tfrac{1}{2})\omega + (n + \tfrac{1}{2})\varpi i,$$

c. q. f. d.

8.

Ayant trouvé comme ci-dessus toutes les racines des équations

$$\varphi x = 0, \quad fx = 0, \quad Fx = 0,$$
$$\varphi x = \tfrac{1}{0}, \quad fx = \tfrac{1}{0}, \quad Fx = \tfrac{1}{0};$$

je vais maintenant chercher les racines des équations plus générales

$$\varphi x = \varphi a, \quad fx = fa, \quad Fx = Fa,$$

où a est une quantité quelconque réelle ou imaginaire. Considérons d'abord l'équation

$$\varphi x - \varphi a = 0.$$

En faisant dans la seconde des formules (12)

$$\alpha = \frac{x + a}{2}, \quad \beta = \frac{x - a}{2},$$

on trouvera

$$\varphi x - \varphi a = \frac{2\varphi\left(\frac{x-a}{2}\right) f\left(\frac{x+a}{2}\right) F\left(\frac{x+a}{2}\right)}{1 + e^2c^2 . \varphi^2\left(\frac{x+a}{2}\right) \varphi^2\left(\frac{x-a}{2}\right)} = 0.$$

Cette équation ne peut subsister que dans l'un des cinq cas suivants:

1) si $\varphi\left(\frac{x-a}{2}\right)=0$, d'où $x=a+2m\omega+2n\varpi i$,

2) si $f\left(\frac{x+a}{2}\right)=0$, d'où $x=-a+(2m+1)\omega+2n\varpi i$,

3) si $F\left(\frac{x+a}{2}\right)=0$, d'où $x=-a+2m\omega+(2n+1)\varpi i$,

4) si $\varphi\left(\frac{x-a}{2}\right)=\frac{1}{0}$, d'où $x=a+(2m+1)\omega+(2n+1)\varpi i$,

5) si $\varphi\left(\frac{x+a}{2}\right)=\frac{1}{0}$, d'où $x=-a+(2m+1)\omega+(2n+1)\varpi i$.

La résolution de ces cinq équations est contenue dans les formules (27), (28), (29), (30).

Des valeurs trouvées de x il faut rejeter celles que donne la formule

$$x=-a+(2m+1)\omega+(2n+1)\varpi i,$$

car une telle valeur de x donne, en vertu de l'équation (22),

$$\varphi x=-\varphi a,$$

tandis qu'on doit avoir $\varphi x=\varphi a$; mais les autres valeurs de x, exprimées par les quatre premières formules, peuvent être admises. Elles sont, comme on le voit, contenues dans la seule formule:

(31) $$x=(-1)^{m+n}a+m\omega+n\varpi i.$$

Telle est donc l'expression générale de toutes les racines de l'équation

$$\varphi x=\varphi a.$$

On trouvera de la même manière que toutes les racines de l'équation

$$fx=fa$$

sont représentées par la formule

(32) $$x=\pm a+2m\omega+n\varpi i,$$

et toutes celles de l'équation

$$Fx=Fa$$

par la formule

(33) $$x=\pm a+m\omega+2n\varpi i.$$

§ II.

Formules qui donnent les valeurs de $\varphi(n\alpha)$, $f(n\alpha)$, $F(n\alpha)$ exprimées en fonctions rationnelles de $\varphi\alpha$, $f\alpha$, $F\alpha$.

9.

Reprenons les formules (12). En faisant dans la 1ʳ, la 3ᵉ et la 5ᵉ $\alpha = n\beta$, il viendra

$$(34)\quad \begin{cases} \varphi(n+1)\beta = -\varphi(n-1)\beta + \dfrac{2\varphi(n\beta)\, f\beta \,.\, F\beta}{R}, \\ f(n+1)\beta = -f(n-1)\beta + \dfrac{2f(n\beta)\, f\beta}{R}, \\ F(n+1)\beta = -F(n-1)\beta + \dfrac{2F(n\beta)\, F\beta}{R}, \end{cases}$$

où $R = 1 + c^2e^2\varphi^2(n\beta)\varphi^2\beta$.

Ces formules donnent la valeur de $\varphi(n+1)\beta$ en $\varphi(n-1)\beta$ et $\varphi(n\beta)$; celle de $f(n+1)\beta$ en $f(n-1)\beta$ et $f(n\beta)$, et celle de $F(n+1)\beta$ en $F(n-1)\beta$ et $F(n\beta)$. Donc en faisant successivement $n = 1, 2, 3 \ldots$, on trouvera successivement les valeurs des fonctions:

$$\begin{array}{l} \varphi(2\beta),\ \varphi(3\beta),\ \varphi(4\beta) \ldots \varphi(n\beta), \\ f(2\beta),\ f(3\beta),\ f(4\beta) \ldots f(n\beta), \\ F(2\beta),\ F(3\beta),\ F(4\beta) \ldots F(n\beta), \end{array}$$

exprimées en fonctions rationnelles des trois quantités

$$\varphi\beta,\ f\beta,\ F\beta.$$

En faisant p. ex. $n = 1$, on aura

$$(35)\quad \begin{cases} \varphi(2\beta) = \dfrac{2\varphi\beta \,.\, f\beta \,.\, F\beta}{1 + e^2c^2\varphi^4\beta}, \\ f(2\beta) = -1 + \dfrac{2f^2\beta.}{1 + e^2c^2\varphi^4\beta}, \\ F(2\beta) = -1 + \dfrac{2F^2\beta}{1 + e^2c^2\varphi^4\beta}. \end{cases}$$

Les fonctions $\varphi(n\beta)$, $f(n\beta)$, $F(n\beta)$ étant des fonctions rationnelles de $\varphi\beta$, $f\beta$, $F\beta$, on peut toujours les réduire à la forme $\dfrac{P}{Q}$, où P et Q sont

des fonctions entières de $\varphi\beta$, $f\beta$, $F\beta$. De même il est clair que le dénominateur Q aura la même valeur pour les trois fonctions que l'on considère. Soit donc

(35′) $$\varphi(n\beta)=\frac{P_n}{Q_n},\quad f(n\beta)=\frac{P_n'}{Q_n},\quad F(n\beta)=\frac{P_n''}{Q_n},$$

on aura également

$$\varphi(n+1)\beta=\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}},\quad f(n+1)\beta=\frac{P'_{n+1}}{Q_{n+1}},\quad F(n+1)\beta=\frac{P''_{n+1}}{Q_{n+1}},$$
$$\varphi(n-1)\beta=\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}},\quad f(n-1)\beta=\frac{P'_{n-1}}{Q_{n-1}},\quad F(n-1)\beta=\frac{P''_{n-1}}{Q_{n-1}}.$$

En substituant ces valeurs, la première des formules (34) deviendra

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}=-\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}+\frac{2f\beta.F\beta\dfrac{P_n}{Q_n}}{1+c^2e^2\varphi^2\beta\dfrac{P_n^2}{Q_n^2}},$$

ou bien

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}=\frac{-P_{n-1}(Q_n^2+c^2e^2\varphi^2\beta.P_n^2)+2P_nQ_nQ_{n-1}f\beta.F\beta}{Q_{n-1}(Q_n^2+e^2c^2\varphi^2\beta.P_n^2)}.$$

En égalant les numérateurs et les dénominateurs de ces deux fractions, on aura

(36) $$P_{n+1}=-P_{n-1}(Q_n^2+c^2e^2\varphi^2\beta.P_n^2)+2f\beta.F\beta.P_nQ_nQ_{n-1},$$

(37) $$Q_{n+1}=\quad Q_{n-1}(Q_n^2+e^2c^2\varphi^2\beta.P_n^2).$$

La seconde et la troisième des équations (34) donneront de la même manière

(38) $$P'_{n+1}=-P'_{n-1}(Q_n^2+c^2e^2\varphi^2\beta.P_n^2)+2f\beta.P_n'Q_nQ_{n-1},$$

(39) $$P''_{n+1}=-P''_{n-1}(Q_n^2+c^2e^2\varphi^2\beta.P_n^2)+2F\beta.P_n''Q_nQ_{n-1}.$$

En faisant dans ces quatre formules $n=1, 2, 3\ldots$, et remarquant qu'on aura

$$Q_0=1,\quad Q_1=1,\quad P_0=0,\quad P_1=\varphi\beta,$$
$$P_0'=1,\quad P_1'=f\beta,\quad P_0''=1,\quad P_1''=F\beta,$$

on trouvera successivement les fonctions entières Q_n, P_n, P_n', P_n'', pour toutes les valeurs de n.

Soient pour abréger:

(40) $$\varphi\beta=x,\quad f\beta=y,\quad F\beta=z,$$

(41) $$R_n=Q_n^2+e^2c^2x^2P_n^2,$$

les formules précédentes donneront

$$(42)\quad \begin{cases} Q_{n+1} = Q_{n-1} R_n, \\ P_{n+1} = -P_{n-1} R_n + 2yz P_n Q_n Q_{n-1}, \\ P'_{n+1} = -P'_{n-1} R_n + 2y P_n' Q_n Q_{n-1}, \\ P''_{n+1} = -P''_{n-1} R_n + 2z P_n'' Q_n Q_{n-1}. \end{cases}$$

En posant $n = 1, 2$, on aura

$$(43)\quad \begin{cases} R_1 = Q_1^2 + e^2c^2x^2P_1^2 = 1 + e^2c^2x^4, \\ Q_2 = Q_0 R_1 = 1 + e^2c^2x^4, \\ P_2 = -P_0R_1 + 2yzP_1Q_1Q_0 = 2xyz, \\ P_2' = -P_0'R_1 + 2yP_1'Q_1Q_0 = -1 - e^2c^2x^4 + 2y^2, \\ P_2'' = -P_0''R_1 + 2zP_1''Q_1Q_0 = -1 - e^2c^2x^4 + 2z^2. \end{cases}$$

$$(44)\quad \begin{cases} R_2 = Q_2^2 + e^2c^2x^2P_2^2 = (1 + e^2c^2x^4)^2 + e^2c^2x^2.4x^2y^2z^2, \\ Q_3 = Q_1R_2 = R_2, \\ P_3 = -P_1R_2 + 2yzP_2Q_2Q_1 = -xR_2 + 4y^2z^2xQ_2 \\ \qquad = x(4y^2z^2Q_2 - R_2), \\ P_3' = -P_1'R_2 + 2yP_2'Q_2Q_1 = -yR_2 + 2yP_2'Q_2 \\ \qquad = y(2Q_2P_2' - R_2), \\ P_3'' = z(2Q_2P_2'' - R_2). \end{cases}$$

En continuant de la sorte, et en remarquant que $y^2 = 1 - c^2x^2$, $z^2 = 1 + e^2x^2$, on verra aisément que les quantités

$$Q_n,\ \frac{P_{2n}}{xyz},\ \frac{P_{2n+1}}{x},\ P_{2n}',\ \frac{P''_{2n+1}}{y},\ P_{2n}'',\ \frac{P''_{2n+1}}{z}$$

sont des fonctions entières des trois quantités x^2, y^2, z^2, et par conséquent aussi de l'une quelconque de ces quantités, pour une valeur entière quelconque de n.

Cela fait voir que les expressions de $\varphi(n\beta)$, $f(n\beta)$, $F(n\beta)$ seront de la forme suivante:

$$(45)\quad \begin{cases} \varphi(2n\beta) = \varphi\beta.f\beta.F\beta.T, & \varphi(2n+1)\beta = \varphi\beta.T', \\ f(2n\beta) = T_1, & f(2n+1)\beta = f\beta.T'', \\ F(2n\beta) = T_2, & F(2n+1)\beta = F\beta.T''', \end{cases}$$

où T etc. représentent des fonctions rationnelles des quantités $(\varphi\beta)^2$, $(f\beta)^2$, $(F\beta)^2$.

§ III.

Résolution des équations

$$\varphi(n\beta)=\frac{P_n}{Q_n},\quad f(n\beta)=\frac{P_n'}{Q_n},\quad F(n\beta)=\frac{P_n''}{Q_n}.$$

10.

D'après ce qu'on a vu, les fonctions $\varphi(n\beta)$, $f(n\beta)$, $F(n\beta)$ s'expriment rationnellement en x, y, z. La réciproque n'a pas lieu, car les équations (35') sont en général d'un degré très-élevé. Elles ont par cette raison un certain nombre de racines. Nous allons voir comment on peut aisément exprimer toutes ces racines au moyen des fonctions φ, f, F.

A. Considérons d'abord l'équation $\varphi(n\beta)=\frac{P_n}{Q_n}$, ou $Q_n.\varphi(n\beta)=P_n$, et cherchons toutes les valeurs de x. Il faut distinguer deux cas, selon que n est pair ou impair:

1) *Si n est un nombre pair.*

D'après ce qu'on a vu dans le paragraphe précédent (45), on aura dans ce cas

$$\varphi(2n\beta)=xyz.\psi(x^2),$$

ou, en vertu des formules

$$y=\sqrt{1-c^2x^2},\quad z=\sqrt{1+e^2x^2}:$$

$$\varphi(2n\beta)=x.\psi(x^2)\sqrt{(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)}.$$

Donc l'équation en x deviendra,

$$\varphi^2(2n\beta)=x^2(\psi x^2)^2(1-c^2x^2)(1+e^2x^2).$$

En désignant le second membre par $\theta(x^2)$, on aura

$$\varphi^2(2n\beta)=\theta(x^2).$$

$\varphi\beta$ étant une des valeurs de x, on aura

(46) $$\varphi^2(2n\beta)=\theta(\varphi^2\beta),$$

équation qui a lieu, quelle que soit la valeur de β. On trouvera comme il suit les autres valeurs de x. Soit $x=\varphi\alpha$ une racine quelconque, on doit avoir

$$\varphi^2(2n\beta)=\theta(\varphi^2\alpha).$$

Or, en mettant dans (46) α au lieu de β, il viendra

$$\varphi^2(2n\alpha) = \theta(\varphi^2\alpha),$$

donc

(47) $$\varphi^2(2n\beta) = \varphi^2(2n\alpha),$$

équation qui revient à ces deux que voici:

$$\varphi(2n\alpha) = \varphi(2n\beta) \quad \text{et} \quad \varphi(2n\alpha) = -\varphi(2n\beta).$$

La première donne, en vertu de (31),

$$2n\alpha = (-1)^{m+\mu} 2n\beta + m\omega + \mu\varpi i,$$

où m et μ sont deux nombres entiers quelconques, positifs ou négatifs, zéro y compris.

La seconde donne les mêmes valeurs de $2n\alpha$, mais de signe contraire, comme il est aisé de le voir, en l'écrivant comme il suit:

$$\varphi(-2n\alpha) = \varphi(2n\beta).$$

Toute valeur de $2n\alpha$ qui satisfait à l'équation (47) peut donc être représentée par

$$2n\alpha = \pm[(-1)^{m+\mu} 2n\beta + m\omega + \mu\varpi i].$$

De là on tire la valeur de α, en divisant par $2n$, savoir

$$\alpha = \pm\left((-1)^{m+\mu}\beta + \frac{m}{2n}\omega + \frac{\mu}{2n}\varpi i\right).$$

Ayant la valeur de α, on aura

(48) $$\varphi\alpha = \pm\varphi\left((-1)^{m+\mu}\beta + \frac{m}{2n}\omega + \frac{\mu}{2n}\varpi i\right) = x.$$

Donc toutes les valeurs de x sont contenues dans cette expression, et on les trouvera en donnant aux nombres m et μ toutes les valeurs entières depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$. Or pour avoir toutes celles qui sont différentes entre elles, il suffit de donner à m et μ des valeurs entières moindres que $2n$. En effet, quels que soient ces nombres, on peut toujours les supposer réduits à la forme:

$$m = 2nk + m', \quad \mu = 2nk' + \mu',$$

où k, k' sont des nombres entiers, et m', μ' des nombres entiers moindres que $2n$. En substituant ces valeurs dans l'expression de x, elle deviendra:

$$x = \pm\varphi\left((-1)^{m'+\mu'}\beta + \frac{m'}{2n}\omega + \frac{\mu'}{2n}\varpi i + k\omega + k'\varpi i\right);$$

or en vertu de (22) cette expression se réduit à

$$(49) \qquad x = \pm\varphi\left((-1)^{m'+\mu'}\beta + \frac{m'}{2n}\omega + \frac{\mu'}{2n}\varpi i\right).$$

Cette valeur de x est de la même forme que la précédente (48), seulement m et μ sont remplacés par m' et μ', qui, tous les deux, sont positifs et moindres que $2n$; donc on obtiendra toutes les valeurs différentes de x, en donnant seulement à m et μ toutes les valeurs entières depuis zéro jusqu'à $2n$ exclusivement. Toutes ces valeurs sont nécessairement différentes entre elles. En effet, supposons par exemple qu'on ait

$$\pm\varphi\left((-1)^{m'+\mu'}\beta + \frac{m'}{2n}\omega + \frac{\mu'}{2n}\varpi i\right)$$
$$= \pm\varphi\left((-1)^{m+\mu}\beta + \frac{m}{2n}\omega + \frac{\mu}{2n}\varpi i\right),$$

il s'ensuivrait, d'après (31),

$$(-1)^{m'+\mu'}\beta + \frac{m'}{2n}\omega + \frac{\mu'}{2n}\varpi i = \pm\left((-1)^{m+\mu}\beta + \frac{m}{2n}\omega + \frac{\mu}{2n}\varpi i\right) + k\omega + k'\varpi i,$$

k et k' étant des entiers. Cette équation donne

$$\mu' = k'.2n \pm \mu, \quad m' = k.2n \pm m, \quad (-1)^{m'+\mu'} = \pm(-1)^{m+\mu}.$$

Les deux premières équations ne peuvent subsister à moins qu'on n'ait $k'=1$, $k=1$, $\mu'=2n-\mu$, $m'=2n-m$, et alors la dernière deviendra

$$(-1)^{4n-m-\mu} = -(-1)^{m+\mu},$$

d'où l'on tire

$$(-1)^{2m+2\mu} = -1,$$

résultat absurde. Donc toutes les valeurs de x, contenues dans la formule (48) sont différentes entre elles, si m et μ sont positifs et moindres que $2n$.

Le nombre total des valeurs de x est, comme il est aisé de le voir, égal à $2(2n)^2 = 8n^2$; or l'équation $\varphi^2(2n\beta) = \theta(x^2)$ ne peut avoir de racines égales, car dans ce cas on aurait $\frac{d\theta(x^2)}{dx} = 0$, ce qui donnerait pour x une valeur indépendante de β. Donc le degré de l'équation $\varphi^2(2n\beta)) = \theta(x^2)$ est égal au nombre des racines, c'est-à-dire à $8n^2$. Si par exemple $n=1$, on aura l'équation

$$\varphi^2(2\beta) = \theta(x^2) = \frac{4x^2(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)}{(1+e^2c^2x^4)^2},$$

ou bien

$$(1+e^2c^2x^4)^2\varphi^2(2\beta)=4x^2(1-c^2x^2)(1+e^2x^2),$$

et, d'après la formule (48), les racines de cette équation, au nombre de huit, seront:

$$x=\pm\varphi\beta,\quad x=\pm\varphi\left(-\beta+\frac{\omega}{2}\right),$$

$$x=\pm\varphi\left(-\beta+\frac{\varpi}{2}i\right),\quad x=\pm\varphi\left(\beta+\frac{\omega}{2}+\frac{\varpi}{2}i\right).$$

2) *Si n est un nombre impair, égal à* $2n+1$.

Dans ce cas $\frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}}$ est, comme nous l'avons vu, une fonction rationnelle de x, et par conséquent l'équation en x sera:

$$\varphi(2n+1)\beta=\frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}}. \tag{50}$$

On trouvera, précisément comme dans le cas précédent, que toutes les racines de cette équation peuvent être représentées par

$$x=\varphi\left((-1)^{m+\mu}\beta+\frac{m}{2n+1}\omega+\frac{\mu}{2n+1}\varpi i\right), \tag{51}$$

où il faut donner à m et μ toutes les valeurs entières depuis $-n$ jusqu'à $+n$ inclusivement. Donc le nombre des racines différentes est $(2n+1)^2$. C'est aussi le degré de l'équation en question. On peut aussi exprimer les racines par

$$x=(-1)^{m+\mu}.\varphi\left(\beta+\frac{m}{2n+1}\omega+\frac{\mu}{2n+1}\varpi i\right).$$

Si par exemple $n=1$, on aura une équation du degré $3^2=9$. La formule (51) donne pour x les 9 valeurs suivantes:

$$\varphi(\beta);$$
$$\varphi\left(-\beta-\frac{\omega}{3}\right),$$
$$\varphi\left(-\beta+\frac{\omega}{3}\right),$$
$$\varphi\left(-\beta-\frac{\varpi}{3}i\right),$$
$$\varphi\left(-\beta+\frac{\varpi}{3}i\right),$$

$$\varphi\left(\beta-\frac{\omega}{3}-\frac{\varpi}{3}i\right),$$

$$\varphi\left(\beta-\frac{\omega}{3}+\frac{\varpi}{3}i\right),$$

$$\varphi\left(\beta+\frac{\omega}{3}-\frac{\varpi}{3}i\right),$$

$$\varphi\left(\beta+\frac{\omega}{3}+\frac{\varpi}{3}i\right).$$

B. Considérons maintenant l'équation

(52) $$f(n\beta)=\frac{P_n'}{Q_n},$$

et cherchons les valeurs de y qui satisfont à cette équation. La fonction $\frac{P_n'}{Q_n}$ étant, comme on l'a vu plus haut, rationnelle en y, l'équation en y, en faisant $\frac{P_n'}{Q_n}=\psi y$, sera

$$f(n\beta)=\psi y.$$

Une des racines de cette équation est $y=f\beta$, donc, quelle que soit la valeur de β,

(53) $$f(n\beta)=\psi(f\beta).$$

Pour trouver les autres valeurs de y, désignons par α une nouvelle inconnue, telle que $y=f\alpha$; on aura

$$f(n\beta)=\psi(f\alpha);$$

or, en vertu de (53) le second membre est égal à $f(n\alpha)$; donc pour déterminer α, on aura l'équation

$$f(n\alpha)=f(n\beta).$$

En vertu de la formule (32) cette équation donne pour expression générale de $n\alpha$:

$$n\alpha=\pm n\beta+2m\omega+\mu\varpi i,$$

m et μ étant deux nombres entiers positifs ou négatifs, zéro y compris. De là on tire

$$\alpha=\pm\beta+\frac{2m}{n}\omega+\frac{\mu}{n}\varpi i$$

et par conséquent:

$$f\alpha=f\left(\pm\beta+\frac{2m}{n}\omega+\frac{\mu}{n}\varpi i\right)=y.$$

C'est la valeur générale de y.

Maintenant pour avoir les valeurs différentes de y, je dis qu'il suffit de prendre β avec le signe $+$ et de donner à m et μ toutes les valeurs entières, moindres que n. En effet, comme on a $f(+\alpha)=f(-\alpha)$, on aura d'abord

$$f\left(-\beta+\frac{2m}{n}\omega+\frac{\mu}{n}\varpi i\right)=f\left(\beta-\frac{2m}{n}\omega-\frac{\mu}{n}\varpi i\right).$$

Donc on peut toujours dans l'expression de y prendre β avec le signe $+$. Ainsi toutes les valeurs de y sont contenues dans l'expression

$$(54)\qquad y=f\left(\beta+\frac{2m}{n}\omega+\frac{\mu}{n}\varpi i\right).$$

Maintenant, quels que soient les nombres m et μ, on peut toujours supposer

$$m=k.n+m',\quad \mu=k'.n+\mu',$$

où k, k', m', μ' sont des nombres entiers, les deux derniers étant en même temps positifs et moindres que n.

En substituant, il viendra

$$y=f\left(\beta+\frac{2m'}{n}\omega+\frac{\mu'}{n}\varpi i+2k\omega+k'\varpi i\right).$$

Or, en vertu de la formule (22), le second membre de cette équation est égal à

$$(55)\qquad f\left(\beta+\frac{2m'}{n}\omega+\frac{\mu'}{n}\varpi i\right)=y,$$

quantité de la même forme que le second membre de (54); seulement m' et μ' sont positifs et moindres que n. Donc etc.

En donnant à m et μ toutes les valeurs possibles, moindres que n, on trouvera n^2 valeurs de y. Or, en général toutes ces quantités sont différentes entre elles. En effet, supposons par exemple

$$f\left(\beta+\frac{2m}{n}\omega+\frac{\mu}{n}\varpi i\right)=f\left(\beta+\frac{2m'}{n}\omega+\frac{\mu'}{n}\varpi i\right),$$

on aura en vertu de la formule (32), en désignant par k, k' deux nombres entiers,

$$\beta+\frac{2m}{n}\omega+\frac{\mu}{n}\varpi i=\pm\left(\beta+\frac{2m'}{n}\omega+\frac{\mu'}{n}\varpi i\right)+2k\omega+k'\varpi i.$$

Puisque β peut avoir une valeur quelconque, il est clair que cette équation

ne peut subsister à moins qu'on ne prenne dans le second membre le signe supérieur. Alors il viendra

$$\frac{2m}{n}\omega+\frac{\mu}{n}\varpi i=\frac{2m'}{n}\omega+\frac{\mu'}{n}\varpi i+2k\omega+k'\varpi i,$$

d'où l'on tire, en égalant les parties réelles et les parties imaginaires,

$$m=m'+kn,\quad \mu=\mu'+k'n,$$

équations absurdes, en remarquant que les nombres m, m', μ et μ' sont tous positifs et inférieurs à n. Donc en général l'équation

$$f(n\beta)=\psi y$$

a n^2 racines différentes entre elles et pas davantage. Or généralement toutes les racines de cette équation sont différentes entre elles. En effet, si deux d'entre elles étaient égales, on aurait à la fois

$$f(n\beta)=\psi y \quad\text{et}\quad 0=\psi' y,$$

et cela est impossible, car on remarquera que les coefficiens de y dans ψy ne contiennent pas β. Donc généralement l'équation (52) est nécessairement du degré n^2.

C. L'équation

(56) $$F(n\beta)=\frac{P_n''}{Q_n},$$

étant traitée par rapport à z, absolument de la même manière que l'équation $f(n\beta)=\frac{P_n'}{Q_n}$ l'a été par rapport à y, donne pour expression générale des valeurs de z

(57) $$z=F\left(\beta+\frac{m}{n}\omega+\frac{2\mu}{n}\varpi i\right),$$

où m et μ sont entiers, positifs et moindres que n. Le nombre des valeurs de z est n^2, et elles sont en général toutes différentes entre elles.

Donc généralement l'équation (56) est du degré n^2.

11.

Nous avons trouvé ci-dessus toutes les racines des équations

$$\varphi(n\beta)=\frac{P_n}{Q_n},\quad f(n\beta)=\frac{P_n'}{Q_n},\quad F(n\beta)=\frac{P_n''}{Q_n},$$

racines, qui sont exprimées par les formules (48), (51), (54), (57). Toutes ces racines sont différentes entre elles, excepté pour des valeurs particulières de β; mais pour ces valeurs, les racines différentes sont contenues dans les mêmes formules. — Dans ce dernier cas un certain nombre des valeurs des quantités x, y, z seront égales; mais il est clair que toutes ces valeurs égales ou inégales seront néanmoins les racines des équations dont il s'agit. Cela se fait voir en faisant converger β vers une valeur particulière qui donne pour x, ou y, ou z des valeurs égales.

En faisant dans la formule (48) $\beta = \frac{\alpha}{2n}$, on aura l'équation

$$\varphi^2 \alpha = \frac{P_{2n}^2}{Q_{2n}^2},$$

dont les racines sont

$$(58) \qquad x = \pm \varphi\left((-1)^{m+\mu} \frac{\alpha}{2n} + \frac{m}{2n}\omega + \frac{\mu}{2n}\varpi i\right),$$

où m et μ ont toutes les valeurs entières et positives moindres que $2n$.

En faisant de même dans la formule (50) $\beta = \frac{\alpha}{2n+1}$, on aura l'équation $\varphi\alpha = \frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}}$, dont les racines sont

$$(59) \qquad x = (-1)^{m+\mu} \varphi\left(\frac{\alpha}{2n+1} + \frac{m\omega + \mu\varpi i}{2n+1}\right),$$

m et μ ayant pour valeurs tous les nombres entiers depuis $-n$ jusqu'à $+n$.

Enfin en faisant dans les formules (52), (56) $\beta = \frac{\alpha}{n}$, on aura l'équation $f\alpha = \frac{P_n'}{Q_n}$, dont les racines sont

$$(60) \qquad y = f\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2m}{n}\omega + \frac{\mu}{n}\varpi i\right),$$

et l'équation $F\alpha = \frac{P_n''}{Q_n}$, dont les racines sont

$$(61) \qquad z = F\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{m}{n}\omega + \frac{2\mu}{n}\varpi i\right),$$

où m et μ sont renfermés entre les limites 0 et $n-1$ inclusivement. Si n est impair et égal à $2n+1$, on peut aussi supposer

$$y = (-1)^m f\left(\frac{\alpha}{2n+1} + \frac{m}{2n+1}\omega + \frac{\mu}{2n+1}\varpi i\right),$$

$$z = (-1)^\mu F\left(\frac{\alpha}{2n+1} + \frac{m}{2n+1}\omega + \frac{\mu}{2n+1}\varpi i\right),$$

m et μ ayant toutes les valeurs entières de $-n$ à $+n$.

Dans toutes ces équations la quantité α peut avoir une valeur quelconque.

Comme cas particuliers on doit remarquer les suivants:

1) En faisant dans (58) et (59) $\alpha = 0$, on aura les équations

$$(62)\quad \begin{cases} P^2_{2n} = 0, \text{ dont les racines sont } x = \pm\varphi\left(\frac{m}{2n}\omega + \frac{\mu}{2n}\varpi i\right) \\ \qquad\text{(les limites de } m \text{ et } \mu \text{ étant } 0 \text{ et } 2n-1), \\ P_{2n+1} = 0, \text{ dont les racines sont } x = \varphi\left(\frac{m}{2n+1}\omega + \frac{\mu}{2n+1}\varpi i\right) \\ \qquad\text{(les limites de } m \text{ et } \mu \text{ étant } -n \text{ et } +n). \end{cases}$$

2) En faisant dans (60) $\alpha = \frac{\omega}{2}$ et dans (61) $\alpha = \frac{\varpi}{2}i$, et remarquant que $f\left(\frac{\omega}{2}\right) = 0$, $F\left(\frac{\varpi}{2}i\right) = 0$, on obtiendra les deux équations

$$(63)\qquad P_n' = 0, \text{ dont les racines sont } y = f\left((2m + \tfrac{1}{2})\frac{\omega}{n} + \frac{\mu}{n}\varpi i\right)$$

$$(64)\qquad P_n'' = 0, \text{ dont les racines sont } z = F\left(\frac{m}{n}\omega + (2\mu + \tfrac{1}{2})\frac{\varpi i}{n}\right)$$

(les limites de m et μ étant 0 et $n-1$).

3) En faisant dans (58) $\alpha = \frac{\omega}{2} + \frac{\varpi}{2}i$, et en remarquant que $\varphi\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\varpi}{2}i\right) = \frac{1}{0}$, on aura l'équation

$$Q^2_{2n} = 0,$$

dont les racines seront

$$x = \pm\varphi\left([m + \tfrac{1}{2}(-1)^{m+\mu}]\frac{\omega}{2n} + [\mu + \tfrac{1}{2}(-1)^{m+\mu}]\frac{\varpi i}{2n}\right).$$

Les valeurs de x doivent être égales deux à deux, et l'on verra aisément que les valeurs inégales peuvent être représentées par

$$(65)\qquad x = \varphi\left((m + \tfrac{1}{2})\frac{\omega}{2n} + (\mu + \tfrac{1}{2})\frac{\varpi i}{2n}\right),$$

en donnant à m et à μ toutes les valeurs entières depuis 0 jusqu'à $2n-1$. Donc ce sont les racines de l'équation par rapport à x

$$Q_{2n} = 0.$$

En faisant de même dans (59) $\alpha = \frac{\omega}{2} + \frac{\varpi}{2} i$, on aura l'équation

$$Q_{2n+1} = 0,$$

dont les racines seront

$$(66) \quad \begin{cases} x = (-1)^{m+\mu} \varphi\left((m+\frac{1}{2})\frac{\omega}{2n+1} + (\mu+\frac{1}{2})\frac{\varpi i}{2n+1}\right), \\ y = (-1)^{m} \; f\left((m+\frac{1}{2})\frac{\omega}{2n+1} + (\mu+\frac{1}{2})\frac{\varpi i}{2n+1}\right), \\ z = (-1)^{\mu} \; F\left((m+\frac{1}{2})\frac{\omega}{2n+1} + (\mu+\frac{1}{2})\frac{\varpi i}{2n+1}\right), \end{cases}$$

m et μ ayant pour valeurs tous les nombres entiers de $-n$ à $+n$.

Parmi les valeurs de x, y, z, il faut remarquer celles qui répondent à $m=n$, $\mu=n$. Alors on a

$$x = \varphi\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\varpi}{2} i\right) = \frac{1}{0}.$$

$$y = (-1)^n f\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\varpi}{2} i\right) = \frac{1}{0}.$$

$$z = (-1)^n F\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\varpi}{2} i\right) = \frac{1}{0}.$$

Ces valeurs infinies font voir que le degré de l'équation $Q_{2n+1}=0$ est moindre d'une unité que celui des équations dont elle sort. En écartant ces valeurs, celles qui restent, au nombre de $(2n+1)^2-1$, seront les racines de l'équation $Q_{2n+1}=0$.

§ IV.

Résolution algébrique des équations

$$\varphi\alpha = \frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}}, \quad f\alpha = \frac{P'_{2n+1}}{Q_{2n+1}}, \quad F\alpha = \frac{P''_{2n+1}}{Q_{2n+1}}.$$

12.

Nous avons vu dans le paragraphe précédent, comment on peut aisément exprimer les racines des équations en question au moyen des fonctions φ, f, F. Nous allons maintenant en déduire la résolution de ces mêmes équations, ou la détermination des fonctions $\varphi\frac{\alpha}{n}$, $f\frac{\alpha}{n}$, $F\frac{\alpha}{n}$ en fonctions de $\varphi\alpha$, $f\alpha$, $F\alpha$.

Comme on a

$$\varphi\frac{\alpha}{m\mu}=\varphi\left(\frac{1}{m}\cdot\frac{\alpha}{\mu}\right),$$

on peut supposer que n est un nombre premier. Nous considérerons d'abord le cas où $n=2$, et ensuite celui où n est un nombre impair.

A. *Expressions des fonctions* $\varphi\frac{\alpha}{2}$, $f\frac{\alpha}{2}$, $F\frac{\alpha}{2}$.

13.

Les valeurs de $\varphi\frac{\alpha}{2}$, $f\frac{\alpha}{2}$, $F\frac{\alpha}{2}$ peuvent être trouvées très facilement de la manière suivante. En supposant dans les formules (35) $\beta=\frac{\alpha}{2}$, et en faisant

$$x=\varphi\frac{\alpha}{2},\quad y=f\frac{\alpha}{2},\quad z=F\frac{\alpha}{2},$$

il viendra

$$f\alpha=\frac{y^2-c^2x^2z^2}{1+e^2c^2x^4},\quad F\alpha=\frac{z^2+e^2y^2x^2}{1+e^2c^2x^4},$$

ou bien, en substituant les valeurs de y^2 et z^2 en x^2,

$$f\alpha=\frac{1-2c^2x^2-c^2e^2x^4}{1+e^2c^2x^4},\quad F\alpha=\frac{1+2e^2x^2-e^2c^2x^4}{1+e^2c^2x^4}.$$

Ces équations donnent

$$1+f\alpha=\frac{2(1-c^2x^2)}{1+e^2c^2x^4},\quad 1-f\alpha=\frac{2c^2x^2(1+e^2x^2)}{1+e^2c^2x^4},$$

$$F\alpha-1=\frac{2e^2x^2(1-c^2x^2)}{1+e^2c^2x^4},\quad F\alpha+1=\frac{2(1+e^2x^2)}{1+e^2c^2x^4},$$

d'où

$$\frac{F\alpha-1}{1+f\alpha}=e^2x^2,\quad \frac{1-f\alpha}{F\alpha+1}=c^2x^2,$$

et par suite, en remarquant que $y^2=1-c^2x^2$, $z^2=1+e^2x^2$,

$$z^2=\frac{F\alpha+f\alpha}{1+f\alpha},\quad y^2=\frac{F\alpha+f\alpha}{1+F\alpha}.$$

De ces équations on tire, en extrayant la racine carrée, et en remplaçant x, y, z par leurs valeurs $\varphi\frac{\alpha}{2}$, $f\frac{\alpha}{2}$, $F\frac{\alpha}{2}$,

$$(67)\quad \begin{cases} \varphi\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{c}\sqrt{\frac{1-f\alpha}{1+F\alpha}} = \frac{1}{e}\sqrt{\frac{F\alpha-1}{f\alpha+1}}, \\ f\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{F\alpha+f\alpha}{1+F\alpha}}, \quad F\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{F\alpha+f\alpha}{1+f\alpha}}. \end{cases}$$

Telles sont les formes les plus simples qu'on puisse donner aux valeurs des fonctions $\varphi\frac{\alpha}{2}$, $f\frac{\alpha}{2}$, $F\frac{\alpha}{2}$. De cette manière on peut exprimer algébriquement $\varphi\frac{\alpha}{2}$, $f\frac{\alpha}{2}$, $F\frac{\alpha}{2}$ en $f\alpha$, $F\alpha$. De la même manière $\varphi\frac{\alpha}{4}$, $f\frac{\alpha}{4}$, $F\frac{\alpha}{4}$ s'exprimeront en $f\frac{\alpha}{2}$, $F\frac{\alpha}{2}$, et ainsi de suite. Donc en général les fonctions $\varphi\frac{\alpha}{2^n}$, $f\frac{\alpha}{2^n}$, $F\frac{\alpha}{2^n}$ peuvent être exprimées au moyen d'extractions de racines carrées, en fonctions des trois quantités $\varphi\alpha$, $f\alpha$, $F\alpha$.

Pour appliquer les formules trouvées ci-dessus pour la *bissection* à un exemple, supposons $\alpha = \frac{\omega}{2}$. Alors on aura $f\frac{\omega}{2} = 0$, $F\frac{\omega}{2} = \frac{\sqrt{e^2+c^2}}{c}$, donc en substituant,

$$\varphi\frac{\omega}{4} = \frac{1}{c}\sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{c}\sqrt{e^2+c^2}}} = \frac{1}{e}\sqrt{\frac{1}{c}\sqrt{e^2+c^2}-1},$$

$$f\frac{\omega}{4} = \sqrt{\frac{\frac{1}{c}\sqrt{e^2+c^2}}{1+\frac{1}{c}\sqrt{e^2+c^2}}},$$

$$F\frac{\omega}{4} = \sqrt{\frac{1}{c}\sqrt{e^2+c^2}},$$

ou bien

$$\varphi\frac{\omega}{4} = \frac{1}{\sqrt{c^2+c\sqrt{e^2+c^2}}} = \frac{\sqrt{c\sqrt{e^2+c^2}-c^2}}{ec},$$

$$f\frac{\omega}{4} = \frac{\sqrt[4]{e^2+c^2}}{\sqrt{c+\sqrt{e^2+c^2}}} = \frac{1}{e}\sqrt{e^2+c^2-c\sqrt{e^2+c^2}},$$

$$F\frac{\omega}{4} = \sqrt[4]{1+\frac{e^2}{c^2}} = \sqrt{F\frac{\omega}{2}}.$$

B. *Expressions des fonctions* $\varphi\frac{\alpha}{2n+1}$, $f\frac{\alpha}{2n+1}$, $F\frac{\alpha}{2n+1}$ *en fonction algébrique des quantités* $\varphi\alpha$, $f\alpha$, $F\alpha$.

14.

Pour trouver les valeurs de $\varphi\frac{\alpha}{2n+1}$, $f\frac{\alpha}{2n+1}$, $F\frac{\alpha}{2n+1}$ en $\varphi\alpha$, $f\alpha$, $F\alpha$, il faut résoudre les équations

$$\varphi\alpha = \frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}},\quad f\alpha = \frac{P'_{2n+1}}{Q_{2n+1}},\quad F\alpha = \frac{P''_{2n+1}}{Q_{2n+1}},$$

qui toutes sont du degré $(2n+1)^2$. Nous allons voir qu'il est toujours possible d'effectuer algébriquement cette résolution.

Soient

(68) $$\varphi_1\beta = \sum_{-n}^{+n}{}_m\, \varphi\left(\beta + \frac{2m\omega}{2n+1}\right)$$

et

(69) $$\psi\beta = \sum_{-n}^{+n}{}_\mu\, \theta^\mu \varphi_1\left(\beta + \frac{2\mu\varpi i}{2n+1}\right),\quad \psi_1\beta = \sum_{-n}^{+n}{}_\mu\, \theta^\mu \varphi_1\left(\beta - \frac{2\mu\varpi i}{2n+1}\right),$$

où θ est une racine imaginaire quelconque de l'équation $\theta^{2n+1}-1=0$. Cela posé, je dis que les deux quantités

$$\psi\beta.\psi_1\beta \quad\text{et}\quad (\psi\beta)^{2n+1}+(\psi_1\beta)^{2n+1}$$

pourront être exprimées rationnellement en $\varphi(2n+1)\beta$.

D'abord, en écrivant $\varphi_1\beta$ comme il suit:

$$\varphi_1\beta = \varphi\beta + \sum_1^n{}_m\left[\varphi\left(\beta+\frac{2m\omega}{2n+1}\right)+\varphi\left(\beta-\frac{2m\omega}{2n+1}\right)\right]$$
$$= \varphi\beta + \sum_1^n{}_m \frac{2\varphi\beta.f\left(\frac{2m\omega}{2n+1}\right)F\left(\frac{2m\omega}{2n+1}\right)}{1+e^2c^2\varphi^2\left(\frac{2m\omega}{2n+1}\right)\varphi^2\beta},$$

on voit que $\varphi_1\beta$ peut s'exprimer rationnellement en $\varphi\beta$. Soit donc $\varphi_1\beta = \chi(\varphi\beta)$, on a de même

$$\varphi_1\left(\beta \pm \frac{2\mu\varpi i}{2n+1}\right) = \chi\left[\varphi\left(\beta\pm\frac{2\mu\varpi i}{2n+1}\right)\right]$$
$$= \chi\left\{\frac{\varphi\beta.f\left(\frac{2\mu\varpi i}{2n+1}\right)F\left(\frac{2\mu\varpi i}{2n+1}\right) \pm \varphi\left(\frac{2\mu\varpi i}{2n+1}\right)f\beta.F\beta}{1+e^2c^2\varphi^2\left(\frac{2\mu\varpi i}{2n+1}\right)\varphi^2\beta}\right\}.$$

ou bien, en faisant

$$\varphi\beta = x,\quad f\left(\frac{2\mu\varpi i}{2n+1}\right) F\left(\frac{2\mu\varpi i}{2n+1}\right) = a,\quad \varphi\left(\frac{2\mu\varpi i}{2n+1}\right) = b,$$

et en substituant pour $f\beta$ et $F\beta$ leurs valeurs $\sqrt{1-c^2x^2}$ et $\sqrt{1+e^2x^2}$:

$$\varphi_1\left(\beta \pm \frac{2\mu\varpi i}{2n+1}\right) = \chi\left(\frac{ax \pm b\sqrt{(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)}}{1+e^2c^2b^2x^2}\right);$$

or, χ désignant une fonction rationnelle, le second membre de cette équation peut se mettre sous la forme

$$R_\mu \pm R_\mu' \sqrt{(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)},$$

où R_μ et R_μ' sont des fonctions rationnelles de x. Donc on a

$$\varphi_1\left(\beta \pm \frac{2\mu\varpi i}{2n+1}\right) = R_\mu \pm R_\mu' \sqrt{(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)}.$$

En substituant dans les expressions de $\psi\beta$ et $\psi_1\beta$, il viendra

$$(70)\qquad \begin{cases} \psi\beta = \sum_{-n}^{+n}{}_\mu\, \theta^\mu R_\mu + \sqrt{(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)}\sum_{-n}^{+n}{}_\mu\, \theta^\mu R_\mu', \\ \psi_1\beta = \sum_{-n}^{+n}{}_\mu\, \theta^\mu R_\mu - \sqrt{(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)}\sum_{-n}^{+n}{}_\mu\, \theta^\mu R_\mu'. \end{cases}$$

Maintenant, R_μ et R_μ' étant des fonctions rationnelles de x, les quantités $\sum_{-n}^{+n}{}_\mu \theta^\mu R_\mu$ et $\sum_{-n}^{+n}{}_\mu \theta^\mu R_\mu'$ le sont également. En élevant donc $\psi\beta$ et $\psi_1\beta$ à la $(2n+1)^{\text{ième}}$ puissance, les deux quantités $(\psi\beta)^{2n+1}$ et $(\psi_1\beta)^{2n+1}$ pourront se mettre sous la forme:

$$(\psi\beta)^{2n+1} = t + t'\sqrt{(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)},$$
$$(\psi_1\beta)^{2n+1} = t - t'\sqrt{(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)},$$

t et t' étant des fonctions rationnelles de x. En prenant la somme des valeurs de $(\psi\beta)^{2n+1}$ et $(\psi_1\beta)^{2n+1}$, on aura

$$(\psi\beta)^{2n+1} + (\psi_1\beta)^{2n+1} = 2t.$$

Donc la quantité $(\psi\beta)^{2n+1} + (\psi_1\beta)^{2n+1}$ peut être exprimée rationnellement en x. Il en est de même du produit $\psi\beta.\psi_1\beta$, comme on le voit par les équations (70). Donc on peut faire

$$(71)\qquad \begin{cases} \psi\beta.\psi_1\beta = \lambda x, \\ (\psi\beta)^{2n+1} + (\psi_1\beta)^{2n+1} = \lambda_1 x, \end{cases}$$

λx et $\lambda_1 x$ désignant des fonctions rationnelles de x. Or ces fonctions ont la propriété de ne pas changer de valeur, lorsqu'on met à la place de x une autre racine quelconque de l'équation

$$\varphi(2n+1)\beta = \frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}}.$$

Considérons d'abord la fonction λx. En remettant la valeur de $x = \varphi\beta$, on aura

$$\psi\beta \,.\, \psi_1\beta = \lambda(\varphi\beta),$$

d'où l'on tire, en mettant $\beta + \frac{2k\omega}{2n+1} + \frac{2k'\varpi i}{2n+1}$ au lieu de β,

$$\lambda\left[\varphi\left(\beta + \frac{2k\omega}{2n+1} + \frac{2k'\varpi i}{2n+1}\right)\right] = \psi\left(\beta + \frac{2k'\varpi i}{2n+1} + \frac{2k\omega}{2n+1}\right) . \psi_1\left(\beta + \frac{2k'\varpi i}{2n+1} + \frac{2k\omega}{2n+1}\right).$$

Cela posé, en remarquant que

(72) $$\sum_{n}^{+n}{}_m \psi(m+k) = \sum_{n}^{+n}{}_m \psi(m) + \sum_{1}^{k}{}_m [\psi(m+n) - \psi(m-n-1)],$$

on aura, en faisant, dans l'expression de $\varphi_1\beta$, $\beta = \beta + \frac{2k\omega}{2n+1}$,

$$\varphi_1\left(\beta + \frac{2k\omega}{2n+1}\right) = \sum_{n}^{+n}{}_m \varphi\left(\beta + \frac{2(k+m)}{2n+1}\omega\right)$$
$$= \varphi_1\beta + \sum_{1}^{k}{}_m \left[\varphi\left(\beta + \frac{2(m+n)\omega}{2n+1}\right) - \varphi\left(\beta + \frac{2(m-n-1)\omega}{2n+1}\right)\right],$$

or

$$\varphi\left(\beta + \frac{2(m-n-1)}{2n+1}\omega\right) = \varphi\left(\beta + \frac{2(m+n)}{2n+1}\omega - 2\omega\right) = \varphi\left(\beta + \frac{2(m+n)}{2n+1}\omega\right);$$

donc

(73) $$\varphi_1\left(\beta + \frac{2k\omega}{2n+1}\right) = \varphi_1\beta.$$

En mettant dans l'expression de $\psi\beta$, $\beta + \frac{2k'\varpi i}{2n+1} + \frac{2k\omega}{2n+1}$ au lieu de β, on trouvera

$$\psi\left(\beta + \frac{2k'\varpi i}{2n+1} + \frac{2k\omega}{2n+1}\right) = \sum_{n}^{+n}{}_\mu \theta^\mu \varphi_1\left(\beta + \frac{2(k'+\mu)\varpi i}{2n+1} + \frac{2k\omega}{2n+1}\right);$$

or en vertu de la formule (73) on a

$$\varphi_1\left(\beta + \frac{2(k'+\mu)\varpi i}{2n+1} + \frac{2k\omega}{2n+1}\right) = \varphi_1\left(\beta + \frac{2(k'+\mu)\varpi i}{2n+1}\right).$$

donc

$$\psi\left(\beta+\frac{2k'\varpi i}{2n+1}+\frac{2k\omega}{2n+1}\right)=\sum_{-n}^{+n}{}_{\mu}\,\theta^{\mu}\,\varphi_1\left(\beta+\frac{2(k'+\mu)\varpi i}{2n+1}\right).$$

En vertu de la formule (72) on a

$$\sum_{-n}^{+n}{}_{\mu}\,\theta^{\mu}\,\varphi_1\left(\beta+\frac{2(k'+\mu)\varpi i}{2n+1}\right)$$
$$=\theta^{-k'}\sum_{-n}^{+n}{}_{\mu}\,\theta^{\mu}\,\varphi_1\left(\beta+\frac{2\mu\varpi i}{2n+1}\right)+\sum_{1}^{k'}{}_{\mu}\,\theta^{n+\mu-k'}\varphi_1\left(\beta+\frac{2(\mu+n)\varpi i}{2n+1}\right)$$
$$-\sum_{1}^{k'}{}_{\mu}\,\theta^{\mu-n-1-k'}\varphi_1\left(\beta+\frac{2(\mu-n-1)\varpi i}{2n+1}\right),$$

donc, en remarquant que $\theta^{n+\mu-k'}=\theta^{\mu-n-1-k'}$ et que

$$\varphi_1\left(\beta+\frac{2(\mu-n-1)\varpi i}{2n+1}\right)=\varphi_1\left(\beta+\frac{2(\mu+n)\varpi i}{2n+1}-2\varpi i\right)=\varphi_1\left(\beta+\frac{2(\mu+n)\varpi i}{2n+1}\right),$$

il viendra

$$(74)\qquad \psi\left(\beta+\frac{2k'\varpi i}{2n+1}+\frac{2k\omega}{2n+1}\right)=\theta^{-k'}\psi\beta.$$

On trouvera de même

$$\psi_1\left(\beta+\frac{2k'\varpi i}{2n+1}+\frac{2k\omega}{2n+1}\right)=\theta^{k'}\psi_1\beta.$$

Ces deux équations donneront

$$\psi\left(\beta+\frac{2k\omega+2k'\varpi i}{2n+1}\right).\psi_1\left(\beta+\frac{2k\omega+2k'\varpi i}{2n+1}\right)=\psi\beta.\psi_1\beta,$$

$$\left[\psi\left(\beta+\frac{2k\omega+2k'\varpi i}{2n+1}\right)\right]^{2n+1}+\left[\psi_1\left(\beta+\frac{2k\omega+2k'\varpi i}{2n+1}\right)\right]^{2n+1}=(\psi\beta)^{2n+1}+(\psi_1\beta)^{2n+1}.$$

En vertu de ces équations on obtiendra, en mettant, dans les valeurs de $\lambda(\varphi\beta)$ et $\lambda_1(\varphi\beta)$, $\beta+\frac{2k\omega+2k'\varpi i}{2n+1}$ au lieu de β,

$$\lambda(\varphi\beta)=\lambda\left[\varphi\left(\beta+\frac{2k\omega+2k'\varpi i}{2n+1}\right)\right],$$
$$\lambda_1(\varphi\beta)=\lambda_1\left[\varphi\left(\beta+\frac{2k\omega+2k'\varpi i}{2n+1}\right)\right].$$

Or $\varphi\left(\beta+\frac{2k\omega+2k'\varpi i}{2n+1}\right)$ exprime une racine quelconque de l'équation

$$\varphi(2n+1)\beta=\frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}}.$$

Donc, comme nous l'avons dit, les fonctions λx et $\lambda_1 x$ auront les mêmes valeurs, quelle que soit la racine qu'on mette à la place de x. Soient x_0, x_1, x_2 ... $x_{2\nu}$ ces racines, on aura

$$\lambda x = \frac{1}{2\nu+1}(\lambda x_0 + \lambda x_1 + \cdots + \lambda x_{2\nu}),$$

$$\lambda_1 x = \frac{1}{2\nu+1}(\lambda_1 x_0 + \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_1 x_{2\nu}).$$

Or le second membre de ces équations est une fonction *rationnelle et symétrique* des racines de l'équation $\varphi(2n+1)\beta = \frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}}$, donc λx et $\lambda_1 x$ pourront s'exprimer rationnellement en $\varphi(2n+1)\beta$. En faisant

$$\lambda x = B, \quad \lambda_1 x = 2A,$$

les équations (71) donneront

$$(\psi\beta)^{2n+1}(\psi_1\beta)^{2n+1} = B^{2n+1}, \quad (\psi\beta)^{2n+1} + (\psi_1\beta)^{2n+1} = 2A,$$

d'où l'on tire

(75) $$\psi\beta = \sqrt[2n+1]{A + \sqrt{A^2 - B^{2n+1}}} = \sum_{-n}^{+n}{}_\mu\, \theta^\mu \varphi_1\left(\beta + \frac{2\mu\varpi i}{2n+1}\right).$$

15.

Ayant trouvé la valeur de $\psi\beta$, on en déduira facilement celle de $\varphi_1\beta$. En effet, en prenant pour θ successivement toutes les racines imaginaires de l'équation $\theta^{2n+1} - 1 = 0$, et en désignant les valeurs correspondantes de A et B par A_1, B_1, A_2, B_2 etc., on obtiendra

$$\sqrt[2n+1]{A_1 + \sqrt{A_1^2 - B_1^{2n+1}}} = \sum_{-n}^{+n}{}_\mu\, \theta_1^\mu \varphi_1\left(\beta + \frac{2\mu\varpi i}{2n+1}\right),$$

$$\sqrt[2n+1]{A_2 + \sqrt{A_2^2 - B_2^{2n+1}}} = \sum_{-n}^{+n}{}_\mu\, \theta_2^\mu \varphi_1\left(\beta + \frac{2\mu\varpi i}{2n+1}\right),$$

. . . .

$$\sqrt[2n+1]{A_{2n} + \sqrt{A_{2n}^2 - B_{2n}^{2n+1}}} = \sum_{-n}^{+n}{}_\mu\, \theta_{2n}^\mu \varphi_1\left(\beta + \frac{2\mu\varpi i}{2n+1}\right).$$

On connaît de même la somme des racines:

$$\sum_{-n}^{+n}{}_m \sum_{-n}^{+n}{}_\mu\, \varphi\left(\beta + \frac{2m\omega}{2n+1} + \frac{2\mu\varpi i}{2n+1}\right) = \sum_{-n}^{+n}{}_\mu\, \varphi_1\left(\beta + \frac{2\mu\varpi i}{2n+1}\right),$$

qui est égale à $(2n+1)\varphi(2n+1)\beta$, comme nous le verrons dans la suite. En ajoutant ces équations membre à membre, après avoir multiplié la première par θ_1^{-k}, la seconde par θ_2^{-k}, la troisième par θ_3^{-k} ... et la $(2n)^{\text{ième}}$ par θ_{2n}^{-k}, il viendra

$$\sum_{-n}^{+n}{}_\mu (1+\theta_1^{\mu-k}+\theta_2^{\mu-k}+\cdots+\theta_{2n}^{\mu-k})\,\varphi_1\left(\beta+\frac{2\mu\tilde{\omega}i}{2n+1}\right)$$
$$=(2n+1)\varphi(2n+1)\beta+\sum_1^{2n}{}_\mu\,\theta_\mu^{-k}\sqrt[2n+1]{A_\mu+\sqrt{A_\mu^2-B_\mu^{2n+1}}};$$

or la somme

$$1+\theta_1^{\mu-k}+\theta_2^{\mu-k}+\cdots+\theta_{2n}^{\mu-k}$$

se réduit à zéro pour toutes les valeurs de k, excepté pour $k=\mu$. Dans ce cas elle devient égale à $2n+1$. Donc le premier membre de l'équation précédente devient

$$(2n+1)\,\varphi_1\left(\beta+\frac{2k\tilde{\omega}i}{2n+1}\right),$$

donc, en substituant et divisant par $(2n+1)$, on a

$$(76)\qquad \varphi_1\left(\beta+\frac{2k\tilde{\omega}i}{2n+1}\right)=$$
$$\varphi(2n+1)\beta+\frac{1}{2n+1}\Big[\theta_1^{-k}\sqrt[2n+1]{A_1+\sqrt{A_1^2-B_1^{2n+1}}}+\theta_2^{-k}\sqrt[2n+1]{A_2+\sqrt{A_2^2-B_2^{2n+1}}}$$
$$+\cdots+\theta_{2n}^{-k}\sqrt[2n+1]{A_{2n}+\sqrt{A_{2n}^2-B_{2n}^{2n+1}}}\Big].$$

Pour $k=0$, on a

$$(77)\quad \varphi_1\beta=\varphi(2n+1)\beta+\frac{1}{2n+1}\Big[\sqrt[2n+1]{A_1+\sqrt{A_1^2-B_1^{2n+1}}}+\sqrt[2n+1]{A_2+\sqrt{A_2^2-B_2^{2n+1}}}$$
$$+\cdots+\sqrt[2n+1]{A_{2n}+\sqrt{A_{2n}^2-B_{2n}^{2n+1}}}\Big].$$

16.

Ayant ainsi trouvé la valeur de $\varphi_1\beta$, il s'agit d'en tirer celle de $\varphi\beta$. Or cela peut se faire aisément comme il suit. Soit

$$(78)\qquad \psi_2\beta=\sum_{-n}^{+n}{}_m\,\theta^m\varphi\left(\beta+\frac{2m\omega}{2n+1}\right),\quad \psi_3\beta=\sum_{-n}^{+n}{}_m\,\theta^m\varphi\left(\beta-\frac{2m\omega}{2n+1}\right),$$

on a

$$\varphi\left(\beta \pm \frac{2m\omega}{2n+1}\right) = \frac{\varphi\beta \cdot f\left(\frac{2m\omega}{2n+1}\right) F\left(\frac{2m\omega}{2n+1}\right) \pm f\beta \cdot F\beta \cdot \varphi\left(\frac{2m\omega}{2n+1}\right)}{1 + e^2c^2\varphi^2\left(\frac{2m\omega}{2n+1}\right)\varphi^2\beta}.$$

Il suit de là qu'on peut faire

$$\psi_2\beta = r + f\beta \cdot F\beta \cdot s, \quad \psi_3\beta = r - f\beta \cdot F\beta \cdot s,$$

où r et s sont des fonctions rationnelles de $\varphi\beta$. De là on tire

$$(79) \quad \begin{cases} \psi_2\beta \cdot \psi_3\beta = \chi(\varphi\beta), \\ (\psi_2\beta)^{2n+1} + (\psi_3\beta)^{2n+1} = \chi_1(\varphi\beta), \end{cases}$$

$\chi(\varphi\beta)$ et $\chi_1(\varphi\beta)$ étant deux fonctions rationnelles de $\varphi\beta$.

Cela posé, je dis que $\chi(\varphi\beta)$ et $\chi_1(\varphi\beta)$ pourront s'exprimer rationnellement en $\varphi_1\beta$. On a vu que

$$(80) \quad \varphi_1\beta = \varphi\beta + \sum_1^n{}_m \frac{2\varphi\beta \cdot f\left(\frac{2m\omega}{2n+1}\right) F\left(\frac{2m\omega}{2n+1}\right)}{1 + e^2c^2\varphi^2\left(\frac{2m\omega}{2n+1}\right)\varphi^2\beta}.$$

En faisant $\varphi\beta = x$, on aura une équation en x du degré $(2n+1)$. Une racine de cette équation est $x = \varphi\beta$; or, en mettant $\beta + \frac{2k\omega}{2n+1}$ au lieu de β, $\varphi_1\beta$ ne change pas de valeur; donc $x = \varphi\left(\beta + \frac{2k\omega}{2n+1}\right)$ sera une racine, quel que soit le nombre entier k. Or, en donnant à k toutes les valeurs entières depuis $-n$ jusqu'à $+n$, $\varphi\left(\beta + \frac{2k\omega}{2n+1}\right)$ prendra $2n+1$ valeurs différentes, donc ces $2n+1$ quantités seront précisément les $2n+1$ racines de l'équation en x.

Cela posé, en mettant $\beta + \frac{2k\omega}{2n+1}$ au lieu de β dans l'expression de $\psi_2\beta$, il viendra en vertu de l'équation (72)

$$\begin{aligned} \psi_2\left(\beta + \frac{2k\omega}{2n+1}\right) &= \sum_{-n}^{+n}{}_m \theta^m \varphi\left(\beta + \frac{2(k+m)\omega}{2n+1}\right) \\ &= \theta^{-k}\psi_2\beta + \sum_1^k{}_m \theta^{m+n-k} \varphi\left(\beta + \frac{2(m+n)\omega}{2n+1}\right) \\ &\quad - \sum_1^k{}_m \theta^{m-n-1-k} \varphi\left(\beta + \frac{2(m-n-1)\omega}{2n+1}\right), \end{aligned}$$

donc, puisque $\theta^{m+n-k} = \theta^{m-n-1-k}$ et $\varphi\left(\beta + \frac{2(m-n-1)}{2n+1}\omega\right) = \varphi\left(\beta + \frac{2(m+n)\omega}{2n+1}\right)$,

on en tirera

(81) $$\psi_2\left(\beta + \frac{2k\omega}{2n+1}\right) = \theta^{-k}\psi_2\beta.$$

De même on aura

$$\psi_3\left(\beta + \frac{2k\omega}{2n+1}\right) = \theta^{+k}\psi_3\beta.$$

On voit par ces relations que les équations qui donnent les valeurs des fonctions $\chi(\varphi\beta)$ et $\chi_1(\varphi\beta)$, conduisent à ces deux égalités:

$$\chi\left[\varphi\left(\beta + \frac{2k\omega}{2n+1}\right)\right] = \chi(\varphi\beta),$$

$$\chi_1\left[\varphi\left(\beta + \frac{2k\omega}{2n+1}\right)\right] = \chi_1(\varphi\beta).$$

De là on tire

$$\chi(\varphi\beta) = \frac{1}{2n+1}\sum_{-n}^{+n}{}_k\, \chi\left[\varphi\left(\beta + \frac{2k\omega}{2n+1}\right)\right],$$

$$\chi_1(\varphi\beta) = \frac{1}{2n+1}\sum_{-n}^{+n}{}_k\, \chi_1\left[\varphi\left(\beta + \frac{2k\omega}{2n+1}\right)\right].$$

Or, ces valeurs de $\chi(\varphi\beta)$ et $\chi_1(\varphi\beta)$ sont des fonctions rationnelles et symétriques de toutes les racines de l'équation (80). Donc elles peuvent être exprimées rationnellement par les coefficiens de la même équation, c'est-à-dire rationnellement en $\varphi_1\beta$.

Soit

$$\chi(\varphi\beta) = D, \quad \chi_1(\varphi\beta) = 2C,$$

les équations (79) donneront

$$\psi_2\beta = \sqrt[2n+1]{C + \sqrt{C^2 - D^{2n+1}}},$$

d'où, en remettant la valeur de $\psi_2\beta$,

(82) $$\sqrt[2n+1]{C + \sqrt{C^2 - D^{2n+1}}} = \sum_{-n}^{+n}{}_m\, \theta^m \varphi\left(\beta + \frac{2m\omega}{2n+1}\right).$$

De là on tire, en mettant θ_μ au lieu de θ, et en désignant les valeurs correspondantes de C et D par C_μ et D_μ,

$$\theta_\mu^{-k}\sqrt[2n+1]{C_\mu + \sqrt{C_\mu^2 - D_\mu^{2n+1}}} = \sum_{-n}^{+n}{}_m\, \theta_\mu^{m-k}\varphi\left(\beta + \frac{2m\omega}{2n+1}\right).$$

En y joignant l'équation

$$\varphi_1\beta = \sum_{-n}^{+n}{}_m\, \varphi\left(\beta + \frac{2m\omega}{2n+1}\right),$$

on en tirera facilement

$$(83)\quad (2n+1).\varphi\left(\beta + \frac{2k\omega}{2n+1}\right) = \varphi_1\beta + \sum_{1}^{2n}{}_\mu\, \theta_\mu^{-k} \sqrt[2n+1]{C_\mu + \sqrt{C_\mu^2 - D_\mu^{2n+1}}}.$$

En supposant $k=0$, il viendra

$$(84)\quad \varphi\beta = \frac{1}{2n+1}\left(\varphi_1\beta + \sqrt[2n+1]{C_1 + \sqrt{C_1^2 - D_1^{2n+1}}} + \dots + \sqrt[2n+1]{C_{2n} + \sqrt{C_{2n}^2 - D_{2n}^{2n+1}}}\right).$$

Cette équation donne $\varphi\beta$ en fonction algébrique de $\varphi_1\beta$; or nous avons trouvé précédemment $\varphi_1\beta$ en fonction algébrique de $\varphi(2n+1)\beta$. Donc en mettant $\frac{\alpha}{2n+1}$ au lieu de β, on aura $\varphi\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)$ en fonction algébrique de $\varphi\alpha$.

Par une analyse toute semblable on trouvera $f\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)$ en fonction de $f\alpha$ et $F\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)$ en fonction de $F\alpha$.

17.

Les expressions que nous venons de trouver des quantités $\varphi_1\beta$ et $\varphi\beta$, la première en $\varphi(2n+1)\beta$, et la seconde en $\varphi_1\beta$, contiennent chacune la somme de $2n$ radicaux différens du $(2n+1)^{\text{ième}}$ degré. Il en résultera pour $\varphi\beta$, $\varphi_1\beta$, $(2n+1)^{2n}$ valeurs, tandis que chacune de ces quantités est la racine d'une équation du $(2n+1)^{\text{ième}}$ degré. Mais on peut donner aux expressions de $\varphi\beta$ et $\varphi_1\beta$ une forme telle que le nombre des valeurs de ces quantités soit précisément égal à $2n+1$. Pour cela soit

$$\theta = \cos\frac{2\pi}{2n+1} + i.\sin\frac{2\pi}{2n+1};$$

on peut faire

$$\theta_1 = \theta,\ \ \theta_2 = \theta^2,\ \ \theta_3 = \theta^3, \dots\ \theta_{2n} = \theta^{2n}.$$

Soient de même

$$(85)\quad \begin{cases} \psi^k\beta = \sum_{-n}^{+n}{}_\mu\, \theta^{k\mu}\varphi_1\left(\beta + \frac{2\mu\varpi i}{2n+1}\right), \\ \psi_1^k\beta = \sum_{-n}^{+n}{}_\mu\, \theta^{k\mu}\varphi_1\left(\beta - \frac{2\mu\varpi i}{2n+1}\right), \end{cases}$$

on aura en vertu de l'équation (74)

$$\psi^k\left(\beta+\frac{2\nu\varpi i}{2n+1}\right)=\theta^{-k\nu}\,\psi^k\beta,$$

$$\psi_1^k\left(\beta+\frac{2\nu\varpi i}{2n+1}\right)=\theta^{+k\nu}\,\psi_1^k\beta,$$

$$\psi^1\left(\beta+\frac{2\nu\varpi i}{2n+1}\right)=\theta^{-\nu}\,\psi^1\beta,$$

$$\psi_1^1\left(\beta+\frac{2\nu\varpi i}{2n+1}\right)=\theta^{+\nu}\,\psi_1^1\beta.$$

Soit maintenant

(86) $$\begin{cases}\dfrac{\psi^k\beta}{(\psi^1\beta)^k}+\dfrac{\psi_1^k\beta}{(\psi_1^1\beta)^k}=P(\varphi\beta),\\ \dfrac{\psi^k\beta}{(\psi^1\beta)^{k-2n-1}}+\dfrac{\psi_1^k\beta}{(\psi_1^1\beta)^{k-2n-1}}=Q(\varphi\beta),\end{cases}$$

$P(\varphi\beta)$ et $Q(\varphi\beta)$ seront des fonctions rationnelles de $\varphi\beta$; or en mettant $\beta+\frac{2m\omega+2\mu\varpi i}{2n+1}$ au lieu de β, il est clair, en vertu des formules précédentes, que P et Q ne changent pas de valeur; donc on aura

$$P(\varphi\beta)=\frac{1}{(2n+1)^2}\cdot\sum_{-n}^{+n}{}_m\sum_{-n}^{+n}{}_\mu\, P\left[\varphi\left(\beta+\frac{2m\omega+2\mu\varpi i}{2n+1}\right)\right];$$

or, le second membre étant une fonction symétrique et rationnelle des racines de l'équation $\varphi(2n+1)\beta=\frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}}$, $P(\varphi\beta)$ pourra s'exprimer rationnellement en $\varphi(2n+1)\beta$. Il en est de même de $Q(\varphi\beta)$. Ces deux quantités étant connues, les équations (86) donneront

$$\frac{\psi^k\beta}{(\psi^1\beta)^k}\left[1-\left(\frac{\psi^1\beta}{\psi_1^1\beta}\right)^{2n+1}\right]=P(\varphi\beta)-\frac{Q(\varphi\beta)}{(\psi_1^1\beta)^{2n+1}};$$

or

$$(\psi^1\beta)^{2n+1}=A_1+\sqrt{A_1^2-B_1^{2n+1}},$$

$$(\psi_1^1\beta)^{2n+1}=A_1-\sqrt{A_1^2-B_1^{2n+1}},$$

donc

$$\frac{\psi^k\beta}{(\psi^1\beta)^k}\,2\sqrt{A_1^2-B_1^{2n+1}}=Q(\varphi\beta)-\left(A_1-\sqrt{A_1^2-B_1^{2n+1}}\right)P(\varphi\beta).$$

Donc on aura

$$\psi^k\beta=(\psi^1\beta)^k\cdot\left(F_k+H_k\sqrt{A_1^2-B_1^{2n+1}}\right),$$

où F_k et H_k sont des fonctions rationnelles de $\varphi(2n+1)\beta$. En rempla-

çant A_1 et B_1 par A et B et substituant les valeurs de $\psi^k\beta$ et $(\psi^1\beta)^k$, il viendra

$$\sqrt[2n+1]{A_k+\sqrt{A_k^2-B_k^{2n+1}}}=(A+\sqrt{A^2-B^{2n+1}})^{\frac{k}{2n+1}}(F_k+H_k\sqrt{A^2-B^{2n+1}}),$$

donc la valeur de $\varphi_1\beta$ deviendra

$$(87)\quad \varphi_1\beta=\varphi(2n+1)\beta+\frac{1}{2n+1}\Big[(A+\sqrt{A^2-B^{2n+1}})^{\frac{1}{2n+1}} + (F_2+H_2\sqrt{A^2-B^{2n+1}})(A+\sqrt{A^2-B^{2n+1}})^{\frac{2}{2n+1}} + \cdots + (F_{2n}+H_{2n}\sqrt{A^2-B^{2n+1}})(A+\sqrt{A^2-B^{2n+1}})^{\frac{2n}{2n+1}}\Big].$$

Par un procédé tout semblable on trouvera

$$(88)\quad \varphi\beta=\frac{1}{2n+1}\Big[\varphi_1\beta+(C+\sqrt{C^2-D^{2n+1}})^{\frac{1}{2n+1}} + (K_2+L_2\sqrt{C^2-D^{2n+1}})(C+\sqrt{C^2-D^{2n+1}})^{\frac{2}{2n+1}} + \cdots + (K_{2n}+L_{2n}\sqrt{C^2-D^{2n+1}})(C+\sqrt{C^2-D^{2n+1}})^{\frac{2n}{2n+1}}\Big].$$

où K_2, L_2, K_3, $L_3 \ldots K_{2n}$, L_{2n} sont des fonctions rationnelles de $\varphi_1\beta$.

Ces expressions de $\varphi_1\beta$ et $\varphi\beta$ n'ont que $2n+1$ valeurs différentes, qu'on obtiendra en attribuant aux radicaux leurs $2n+1$ valeurs. Il suit de notre analyse qu'on peut prendre $\sqrt{A^2-B^{2n+1}}$ et $\sqrt{C^2-D^{2n+1}}$ avec tel signe qu'on voudra.

18.

La valeur que nous avons trouvée pour $\varphi\beta$ ou $\varphi\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)$ contient encore, outre la fonction $\varphi\alpha$, les suivantes:

$$e,\ c,\ \theta,$$

$$\varphi\left(\frac{m\omega}{2n+1}\right),\ \varphi\left(\frac{m\varpi i}{2n+1}\right),\ f\left(\frac{m\omega}{2n+1}\right),$$

$$f\left(\frac{m\varpi i}{2n+1}\right),\ F\left(\frac{m\omega}{2n+1}\right),\ F\left(\frac{m\varpi i}{2n+1}\right),$$

pour des valeurs quelconques de m depuis 1 jusqu'à $2n$. Maintenant, quelle que soit la valeur de m, on peut toujours exprimer algébriquement $\varphi\left(\frac{m\omega}{2n+1}\right)$,

$f\left(\frac{m\omega}{2n+1}\right)$, $F\left(\frac{m\omega}{2n+1}\right)$ en $\varphi\left(\frac{\omega}{2n+1}\right)$, et $\varphi\left(\frac{m\varpi i}{2n+1}\right)$, $f\left(\frac{m\varpi i}{2n+1}\right)$, $F\left(\frac{m\varpi i}{2n+1}\right)$ en $\varphi\left(\frac{\varpi i}{2n+1}\right)$. Tout est donc connu dans l'expression de $\varphi\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)$, excepté les deux quantités indépendantes de α, $\varphi\left(\frac{\omega}{2n+1}\right)$, $\varphi\left(\frac{\varpi i}{2n+1}\right)$. Ces quantités dépendent seulement de c et e, et elles peuvent être trouvées par la résolution d'une équation du degré $(2n+1)^2-1$, savoir de l'équation $\frac{P_{2n+1}}{x}=0$. Nous allons voir dans le paragraphe suivant comment on peut en ramener la résolution à celle d'équations moins élevées.

§ V.

C. *Sur l'équation* $P_{2n+1}=0$.

19.

L'expression que nous venons de trouver pour $\varphi\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)$ contiendra, comme nous l'avons vu, les deux quantités constantes $\varphi\left(\frac{\omega}{2n+1}\right)$ et $\varphi\left(\frac{\varpi i}{2n+1}\right)$. On trouvera ces quantités en résolvant l'équation

$$P_{2n+1}=0,$$

dont les racines seront représentées par

(89) $$x=\varphi\left(\frac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right),$$

où m et μ pourront être tous les nombres entiers depuis $-n$ jusqu'à $+n$. Une de ces racines, qui répond à $m=0$, $\mu=0$, est égale à zéro. Donc P_{2n+1} est divisible par x. En écartant ce facteur, on aura une équation du degré $(2n+1)^2-1$,

(90) $$R=0.$$

En faisant $x^2=r$, l'équation en r, $R=0$, sera du degré $\frac{(2n+1)^2-1}{2}$ $=2n(n+1)$, et les racines de cette équation seront

(91) $$r=\varphi^2\left(\frac{m\omega\pm\mu\varpi i}{2n+1}\right),$$

μ et m ayant toutes les valeurs positives au dessous de $n+1$, en faisant abstraction de la racine zéro.

Nous allons voir maintenant, comment on peut ramener la résolution de l'équation $R=0$ à celle de deux équations, l'une du degré n et l'autre du degré $2n+2$. D'abord, je dis qu'on peut représenter toutes les valeurs de r par

$$(92)\qquad \varphi^2\left(\frac{m\omega}{2n+1}\right) \text{ et } \varphi^2\left(m\cdot\frac{\mu\omega+\varpi i}{2n+1}\right),$$

en donnant à μ toutes les valeurs entières depuis zéro jusqu'à $2n$, et à m toutes celles depuis 1 jusqu'à n. En effet $\varphi^2\left(\frac{m\omega}{2n+1}\right)$ représente d'abord n valeurs de r; or les autres peuvent être représentées par $\varphi^2\left(m\frac{\mu\omega+\varpi i}{2n+1}\right)$. Soit, pour le démontrer, $m\mu=(2n+1)k+m'$, où m' est un nombre entier compris entre les limites $-n$ et $+n$. En substituant, on aura

$$\varphi^2\left(m\frac{\mu\omega+\varpi i}{2n+1}\right)=\varphi^2\left(k\omega+\frac{m'\omega+m\varpi i}{2n+1}\right)$$
$$=\varphi^2\left(\frac{m'\omega+m\varpi i}{2n+1}\right)=\varphi^2\left(\frac{-m'\omega-m\varpi i}{2n+1}\right).$$

$\varphi^2\left(m\frac{\mu\omega+\varpi i}{2n+1}\right)$ est donc une valeur de r; maintenant, à chaque valeur de μ répond une valeur différente de m'. Car si l'on avait

$$m\mu_1=(2n+1)k_1+m',$$

il s'ensuivrait

$$m(\mu-\mu_1)=(2n+1)(k-k_1),$$

ce qui est impossible, puisque $2n+1$ est un nombre premier. Donc $\varphi^2\left(m\frac{\mu\omega+\varpi i}{2n+1}\right)$, combiné avec $\varphi^2\left(\frac{m\omega}{2n+1}\right)$, représente toutes les valeurs de r.

Cela posé, soit

$$(93)\qquad \left[r-\varphi^2\left(\frac{\omega}{2n+1}\right)\right]\left[r-\varphi^2\left(\frac{2\omega}{2n+1}\right)\right]\cdots\left[r-\varphi^2\left(\frac{n\omega}{2n+1}\right)\right]$$
$$=r^n+p_{n-1}r^{n-1}+p_{n-2}r^{n-2}+\cdots+p_1r+p_0.$$

Les quantités $p_0, p_1, \ldots p_{n-1}$, seront des fonctions rationnelles et symétriques de $\varphi^2\left(\frac{\omega}{2n+1}\right)$, $\varphi^2\left(\frac{2\omega}{2n+1}\right)\ldots\varphi^2\left(\frac{n\omega}{2n+1}\right)$; ces fonctions peuvent être trouvées au moyen d'une équation du degré $2n+2$. Soit p une fonction rationnelle et symétrique quelconque de $\varphi^2\left(\frac{\omega'}{2n+1}\right)$, $\varphi^2\left(\frac{2\omega'}{2n+1}\right)\cdots$

$\varphi^2\left(\frac{n\omega'}{2n+1}\right)$, où ω' désigne la quantité $m\omega+\mu\varpi i$. En vertu des formules que nous avons données plus haut pour exprimer $\varphi(n\beta)$ en $\varphi\beta$, il est clair qu'on peut exprimer $\varphi^2\left(m'\frac{\omega'}{2n+1}\right)$ en fonction rationnelle de $\varphi^2\left(\frac{\omega'}{2n+1}\right)$. Donc on peut faire

$$(94)\quad p=\psi\left[\varphi^2\left(\frac{\omega'}{2n+1}\right)\right]=\theta\left[\varphi^2\left(\frac{\omega'}{2n+1}\right),\ \varphi^2\left(\frac{2\omega'}{2n+1}\right)\dots\varphi^2\left(\frac{n\omega'}{2n+1}\right)\right],$$

θ désignant une fonction symétrique et rationnelle. En mettant $\nu\omega'$ au lieu de ω', il viendra

$$(95)\quad \psi\left[\varphi^2\left(\frac{\nu\omega'}{2n+1}\right)\right]=\theta\left[\varphi^2\left(\frac{\nu\omega'}{2n+1}\right),\ \varphi^2\left(\frac{2\nu\omega'}{2n+1}\right)\dots\varphi^2\left(\frac{n\nu\omega'}{2n+1}\right)\right];$$

or en faisant

$$a\nu=(2n+1)k_a'+k_a,$$

où k_a est entier et compris entre $-n$ et $+n$, la série

$$k_1,\ k_2,\ \dots\ k_n$$

aura au signe près les mêmes termes que celle-ci:

$$1,\ 2,\ 3\ \dots\ n;$$

donc il est clair que le second membre de l'équation (95) aura la même valeur que p. Donc

$$(96)\quad \psi\left[\varphi^2\left(\frac{\nu\omega'}{2n+1}\right)\right]=\psi\left[\varphi^2\left(\frac{\omega'}{2n+1}\right)\right],$$

équation qui, en faisant $\omega'=\omega$ et $\omega'=m\omega+\varpi i$, donnera les deux suivantes:

$$(97)\quad \begin{cases}\psi\left[\varphi^2\left(\frac{\nu\omega}{2n+1}\right)\right]=\psi\left[\varphi^2\left(\frac{\omega}{2n+1}\right)\right],\\ \psi\left[\varphi^2\left(\nu\frac{m\omega+\varpi i}{2n+1}\right)\right]=\psi\left[\varphi^2\frac{m\omega+\varpi i}{2n+1}\right)\right],\end{cases}$$

donc, en faisant, pour abréger,

$$(98)\quad \varphi^2\left(\frac{\nu\omega}{2n+1}\right)=r_\nu,\quad \varphi^2\left(\nu\frac{m\omega+\varpi i}{2n+1}\right)=r_{\nu.m},$$

il viendra

$$(99)\quad \psi r_\nu=\psi r_1;\quad \psi r_{\nu.m}=\psi r_{1.m}.$$

Cela posé, soit

$$(100)\quad \begin{cases} (p-\psi r_1)(p-\psi r_{1,0})(p-\psi r_{1,1})(p-\psi r_{1,2})\ldots(p-\psi r_{1,2n}) \\ \qquad = q_0+q_1\cdot p+q_2\cdot p^2+\cdots+q_{2n+1}\cdot p^{2n+1}+p^{2n+2}. \end{cases}$$

Je dis qu'on peut exprimer les coefficiens q_0, q_1 etc. rationnellement en e et c. D'abord, en vertu des formules connues, on peut exprimer rationnellement ces coefficiens en t_1, $t_2 \ldots t_{2n+2}$, si l'on fait, pour abréger,

$$(101)\qquad t_k=(\psi r_1)^k+(\psi r_{1,0})^k+(\psi r_{1,1})^k+\cdots+(\psi r_{1,2n})^k.$$

Il s'agit donc de trouver les quantités t_1, $t_2 \ldots$; or cela pourra aisément se faire au moyen des relations (99). En effet, en y faisant successivement $\nu=1, 2\ldots n$, après avoir élevé les deux membres à la $k^{ième}$ puissance, on en tirera sur le champ:

$$(102)\quad \begin{cases} (\psi r_1)^k=\frac{1}{n}[(\psi r_1)^k+(\psi r_2)^k+\cdots+(\psi r_n)^k], \\ (\psi r_{1,m})^k=\frac{1}{n}[(\psi r_{1,m})^k+(\psi r_{2,m})^k+\cdots+(\psi r_{n,m})^k]. \end{cases}$$

Donc en mettant pour m tous les nombres entiers $0, 1\ldots 2n$, et en substituant ensuite dans l'expression de t_k, il viendra:

$$(103)\quad \begin{cases} n.t_k= (\psi r_1)^k+(\psi r_2)^k+\cdots+(\psi r_n)^k \\ \quad +(\psi r_{1,0})^k+(\psi r_{2,0})^k+\cdots+(\psi r_{n,0})^k \\ \quad +(\psi r_{1,1})^k+(\psi r_{2,1})^k+\cdots+(\psi r_{n,1})^k \\ \quad +\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \quad +(\psi r_{1,2n})^k+(\psi r_{2,2n})^k+\cdots+(\psi r_{n,2n})^k. \end{cases}$$

Cette valeur de t_k est, comme on le voit, une fonction rationnelle et symétrique des $n(2n+2)$ quantités r_1, $r_2\ldots r_n$, $r_{1,0}$, $r_{2,0}\ldots r_{n,0}\ldots r_{1,2n}$, $r_{2,2n}$ $\ldots r_{n,2n}$, qui sont les $n(2n+2)$ racines de l'équation $R=0$. Donc, comme on sait, t_k pourra s'exprimer rationnellement par les coefficiens de cette équation, et par suite en fonction rationnelle de e et c. Ayant ainsi trouvé les quantités t_k, on en tire les valeurs de q_0, $q_1\ldots q_{2n+1}$, qui seront également des fonctions rationnelles de e et c.

20.

Cela posé, en faisant

$$(104)\qquad 0=q_0+q_1p+q_2p^2+\cdots+q_{2n+1}p^{2n+1}+p^{2n+2},$$

on aura une équation du $(2n+2)^{\text{ième}}$ degré, dont les racines seront

$$\psi r_1,\ \psi r_{1,0},\ \psi r_{1,1},\ \psi r_{1,2}\ldots \psi r_{1,2n}.$$

La fonction ψr_1, c'est-à-dire une fonction quelconque rationnelle et symétrique des racines $r_1, r_2, r_3 \ldots r_n$ pourra donc être trouvée au moyen d'une équation du degré $2n+2$. Donc on aura de cette manière les coefficiens $p_0, p_1 \ldots p_{n-1}$, en résolvant n équations, chacune du $(2n+2)^{\text{ième}}$ degré.

Ayant déterminé $p_0, p_1 \ldots$, on aura, en résolvant l'équation

$$(105) \qquad 0 = p_0 + p_1 r + \cdots + p_{n-1} r^{n-1} + r^n,$$

les valeurs des quantités

$$r_1,\ r_2 \ldots r_n;\ r_{1,0},\ r_{2,0} \ldots r_{n,0};\ r_{1,1},\ r_{2,1} \ldots r_{n,1} \text{ etc.}$$

dont la première est égale à $\varphi^2\left(\frac{\omega}{2n+1}\right)$. Donc la détermination de cette quantité, ou bien la résolution de l'équation $R=0$, qui est du degré $(2n+2)n$, est réduite à celle d'équations des degrés $(2n+2)$ et n.

Mais on peut encore simplifier le procédé précédent. En effet, comme nous le verrons, pour avoir les quantités $p_0, p_1 \ldots$, il suffit de connaître l'une quelconque d'entre elles, et alors on peut exprimer les autres rationnellement par celle-là. Soient généralement p, q deux fonctions rationnelles et symétriques des quantités $r_1, r_2 \ldots r_n$, on peut faire, comme nous l'avons vu,

$$p = \psi r_1, \quad q = \theta r_1,$$

ψr_1 et θr_1 désignant deux fonctions rationnelles de r_1, qui ont cette propriété de rester les mêmes, si l'on change r_1 en une autre quelconque des quantités $r_1, r_2 \ldots r_n$. Supposons maintenant

$$s_k = (\psi r_1)^k \theta r_1 + (\psi r_{1,0})^k \theta r_{1,0} + (\psi r_{1,1})^k \theta r_{1,1} + \cdots + (\psi r_{1,2n})^k \theta r_{1,2n},$$

je dis que s_k pourra être exprimé rationnellement en e et c. En effet, on a

$$(\psi r_1)^k \theta r_1 = (\psi r_\nu)^k \theta r_\nu = \frac{1}{n}\left[(\psi r_1)^k \theta r_1 + (\psi r_2)^k \theta r_2 + \cdots + (\psi r_n)^k \theta r_n\right],$$

$$(\psi r_{1,m})^k \theta r_{1,m} = (\psi r_{\nu,m})^k \theta r_{\nu,m} = \frac{1}{n}\left[(\psi r_{1,m})^k \theta r_{1,m} + (\psi r_{2,m})^k \theta r_{2,m} + \cdots + (\psi r_{n,m})^k \theta r_{n,m}\right].$$

En faisant $m = 0, 1, 2 \ldots 2n$, et en substituant dans l'expression de s_k, on verra que s_k est une fonction rationnelle et symétrique des racines r_1, r_2

$\dots r_{1,0} \dots$ de l'équation $R=0$; donc s_k pourra s'exprimer rationnellement en e et c.

Connaissant s_k, on obtiendra, en faisant $k=0, 1, 2 \dots 2n$, $2n+1$ équations, desquelles on tirera aisément la valeur de θr_1, en fonction rationnelle de ψr_1. Donc, une fonction de la forme p étant donnée, on peut exprimer une autre fonction quelconque de la même forme en fonction rationnelle de p. Donc, comme nous l'avons dit, on peut exprimer les coefficiens $p_0, p_1, \dots p_{n-1}$ rationnellement par l'un quelconque d'entre eux. Donc enfin, pour en avoir les valeurs, il suffit de résoudre une seule équation du degré $2n+2$, et par conséquent, pour avoir les racines de l'équation $R=0$, il suffit de résoudre une équation du degré $2n+2$, et $2n+2$ équations du degré n.

21.

Maintenant, parmi les équations dont dépend la détermination des quantités $\varphi\left(\frac{\omega}{2n+1}\right)$, $\varphi\left(\frac{\varpi i}{2n+1}\right)$, celles du degré n peuvent être résolues algébriquement. Le procédé par lequel nous allons effectuer cette résolution est entièrement semblable à celui qui est dû à M. *Gauss* pour la résolution de l'équation

$$\theta^{2n+1}-1=0.$$

Soit proposée l'équation

$$(106) \qquad 0=p_0+p_1 r+p_2 r^2+\cdots+p_{n-1}r^{n-1}+r^n,$$

dont les racines sont:

$$\varphi^2\left(\frac{\omega'}{2n+1}\right),\ \varphi^2\left(\frac{2\omega'}{2n+1}\right),\ \dots\ \varphi^2\left(\frac{n\omega'}{2n+1}\right),$$

où ω' a une des valeurs ω, $m\omega+\varpi i$. Désignons par α une des racines primitives du nombre $2n+1$, c'est-à-dire un nombre entier tel que $\mu= 2n+1$ soit le nombre le plus petit qui rende $\alpha^{\mu-1}-1$ divisible par $2n+1$: je dis que les racines de l'équation (106) peuvent aussi être représentées par

$$(107) \qquad \varphi^2(\varepsilon),\ \varphi^2(\alpha\varepsilon),\ \varphi^2(\alpha^2\varepsilon),\ \varphi^2(\alpha^3\varepsilon)\ \dots\ \varphi^2(\alpha^{n-1}\varepsilon),$$

où $\varepsilon=\frac{\omega'}{2n+1}$.

Soit



$$\alpha^m = (2n+1)k_m \pm a_m,$$

où k est entier, et a_m entier, positif et moindre que $n+1$, je dis que les termes de la série

$$1,\ a_1,\ a_2 \ldots a_{n-1}$$

seront tous différens entre eux. En effet, si l'on a

$$a_m = a_\mu,$$

il en résulte, ou

$$\alpha^m - \alpha^\mu = (2n+1)(k_m - k_\mu),$$

ou

$$\alpha^m + \alpha^\mu = (2n+1)(k_m + k_\mu).$$

Il faut donc que l'une des quantités $\alpha^m - \alpha^\mu$, $\alpha^m + \alpha^\mu$ soit divisible par $2n+1$; or supposons $m > \mu$, ce qui est permis, il faut que $\alpha^{m-\mu} - 1$ ou $\alpha^{m-\mu} + 1$ soit divisible par $2n+1$; or cela est impossible, car $m-\mu$ est moindre que n. Donc les quantités $1, a_1, a_2 \ldots a_{n-1}$ sont différentes entre elles, et par conséquent elles coïncident, mais dans un ordre différent, avec les nombres $1, 2, 3, 4 \ldots n$. Donc, en remarquant que

$$\varphi^2[((2n+1)k_m \pm a_m)\varepsilon] = \varphi^2(a_m\varepsilon),$$

on voit que les quantités (107) sont les mêmes que celles-ci:

$$\varphi^2(\varepsilon),\ \varphi^2(2\varepsilon) \ldots \varphi^2(n\varepsilon),$$

c'est-à-dire les racines de l'équation (106) c. q. f. d.

Il y a encore à remarquer, qu'ayant

$$\alpha^n = (2n+1)k_n - 1,$$

on aura

$$\alpha^{n+m} = (2n+1)k_n\alpha^m - \alpha^m,$$

donc

$$a_{n+m} = -a_m$$

et

$$\varphi^2(\alpha^{n+m}\varepsilon) = \varphi^2(\alpha^m\varepsilon).$$

Cela posé, soit θ une racine imaginaire quelconque de l'équation

$$\theta^n - 1 = 0$$

et

(108) $$\psi(\varepsilon) = \varphi^2(\varepsilon) + \varphi^2(\alpha\varepsilon)\theta + \varphi^2(\alpha^2\varepsilon)\theta^2 + \cdots + \varphi^2(\alpha^{n-1}\varepsilon)\theta^{n-1}.$$

En vertu de ce que nous avons vu précédemment, le second membre de

cette équation peut être transformé en une fonction *rationnelle* de $\varphi^2(\varepsilon)$. Faisons

(109) $$\psi\varepsilon = \chi(\varphi^2\varepsilon).$$

En mettant dans la première expression de $\psi(\varepsilon)$, $\alpha^m\varepsilon$ au lieu de ε, il viendra

$$\psi(\alpha^m\varepsilon) = \varphi^2(\alpha^m\varepsilon) + \varphi^2(\alpha^{m+1}\varepsilon)\theta + \varphi^2(\alpha^{m+2}\varepsilon)\theta^2 + \cdots + \varphi^2(\alpha^{n-1}\varepsilon)\theta^{n-m-1} + \varphi^2(\alpha^n\varepsilon)\theta^{n-m} + \cdots + \varphi^2(\alpha^{n+m-1}\varepsilon)\theta^{n-1};$$

mais nous avons vu que $\varphi^2(\alpha^{n+m}\varepsilon) = \varphi^2(\alpha^m\varepsilon)$, donc

$$\psi(\alpha^m\varepsilon) = \theta^{n-m}\varphi^2(\varepsilon) + \theta^{n-m+1}\varphi^2(\alpha\varepsilon) + \theta^{n-m+2}\varphi^2(\alpha^2\varepsilon) + \cdots + \theta^{n-1}\varphi^2(\alpha^{m-1}\varepsilon) + \varphi^2(\alpha^m\varepsilon) + \theta\varphi^2(\alpha^{m+1}\varepsilon) + \cdots + \theta^{n-m-1}\varphi^2(\alpha^{n-1}\varepsilon).$$

En multipliant par θ^m, le second membre deviendra égal à $\psi\varepsilon$, donc

(110) $$\psi(\alpha^m\varepsilon) = \theta^{-m}\psi\varepsilon,$$

ou bien

$$\psi\varepsilon = \theta^m\chi[\varphi^2(\alpha^m\varepsilon)],$$

d'où l'on tire, en élevant les deux membres à la $n^{\text{ième}}$ puissance, et en tenant compte de la relation $\theta^{mn} = 1$,

(111) $$(\psi\varepsilon)^n = [\chi(\varphi^2(\alpha^m\varepsilon))]^n.$$

Cette formule donne, en faisant successivement $m = 0, 1, 2, 3 \ldots n-1$, n équations qui, ajoutées membre à membre donneront la suivante:

(112) $$n(\psi\varepsilon)^n = [\chi(\varphi^2\varepsilon)]^n + [\chi(\varphi^2(\alpha\varepsilon))]^n + [\chi(\varphi^2(\alpha^2\varepsilon))]^n + \cdots + [\chi(\varphi^2(\alpha^{n-1}\varepsilon))]^n;$$

or le second membre de cette équation est une fonction rationnelle et symétrique des quantités $\varphi^2\varepsilon$, $\varphi^2(\alpha\varepsilon) \ldots \varphi^2(\alpha^{n-1}\varepsilon)$, c'est-à-dire des racines de l'équation (106); donc $(\psi\varepsilon)^n$ peut être exprimé en fonction rationnelle de p_0, $p_1 \ldots p_{n-1}$, par conséquent en fonction rationnelle de l'une quelconque de ces quantités. Soit v la valeur de $(\psi\varepsilon)^n$, on aura

(113) $$\sqrt[n]{v} = \varphi^2\varepsilon + \theta\varphi^2(\alpha\varepsilon) + \theta^2\varphi^2(\alpha^2\varepsilon) + \cdots + \theta^{n-1}\varphi^2(\alpha^{n-1}\varepsilon).$$

Cela posé, soit $\theta = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\cdot$ Les racines imaginaires de l'équation $\theta^n - 1$ peuvent être représentées par

$$\theta,\ \theta^2, \ldots \theta^{n-1}.$$

Donc en faisant successivement θ égal à chacune de ces racines et en désignant les valeurs correspondantes de v par $v_1, v_2 \ldots v_{n-1}$, il viendra

$$\sqrt[n]{v_1} = \varphi^2(\varepsilon) + \theta\varphi^2(\alpha\varepsilon) + \cdots + \theta^{n-1}\varphi^2(\alpha^{n-1}\varepsilon),$$
$$\sqrt[n]{v_2} = \varphi^2(\varepsilon) + \theta^2\varphi^2(\alpha\varepsilon) + \cdots + \theta^{2n-2}\varphi^2(\alpha^{n-1}\varepsilon),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\sqrt[n]{v_{n-1}} = \varphi^2(\varepsilon) + \theta^{n-1}\varphi^2(\alpha\varepsilon) + \cdots + \theta^{(n-1)^2}\varphi^2(\alpha^{n-1}\varepsilon).$$

En combinant ces équations avec la suivante:

$$-p_{n-1} = \varphi^2(\varepsilon) + \varphi^2(\alpha\varepsilon) + \cdots + \varphi^2(\alpha^{n-1}\varepsilon),$$

on en tire aisément

$$(114)\quad \varphi^2(\alpha^m\varepsilon) = \frac{1}{n}\left(-p_{n-1} + \theta^{-m}\sqrt[n]{v_1} + \theta^{-2m}\sqrt[n]{v_2} + \theta^{-3m}\sqrt[n]{v_3} + \cdots + \theta^{-(n-1)m}\sqrt[n]{v_{n-1}}\right),$$

et pour $m = 0$,

$$(115)\quad \varphi^2(\varepsilon) = \frac{1}{n}\left(-p_{n-1} + \sqrt[n]{v_1} + \sqrt[n]{v_2} + \cdots + \sqrt[n]{v_{n-1}}\right).$$

22.

Toutes les racines de l'équation (106) sont contenues dans la formule (115), mais puisque leur nombre n'est que n, il reste encore à donner à $\varphi^2(\varepsilon)$ une forme qui ne contienne pas de racines étrangères à la question. Or cela se fait aisément comme il suit. Soit

$$s_k = \frac{\sqrt[n]{v_k}}{(\sqrt[n]{v_1})^k}.$$

En posant ici $\alpha^m\varepsilon$ au lieu de ε, $\sqrt[n]{v_k}$ se changera en $\theta^{-km}\sqrt[n]{v_k}$, et v_1 en $\theta^{-m}v_1$, donc s_k se changera en

$$\frac{\theta^{-km}\sqrt[n]{v_k}}{(\theta^{-m}\sqrt[n]{v_1})^k} = \frac{\sqrt[n]{v_k}}{(\sqrt[n]{v_1})^k}.$$

La fonction s_k, comme on le voit, ne change pas de valeur, en mettant $\alpha^m\varepsilon$

au lieu de ε. Or s_k est une fonction rationnelle de $\varphi^2(\varepsilon)$. Donc, en désignant s_k par $\lambda[\varphi^2(\varepsilon)]$, on aura

$$s_k = \lambda[\varphi^2(\alpha^m \varepsilon)],$$

quel que soit le nombre entier m. De là on tirera, de la même manière que nous avons trouvé $(\psi\varepsilon)^n$, la valeur de s_k en fonction rationnelle de l'une des quantités $p_0, p_1 \ldots p_{n-1}$. Connaissant s_k, on a

$$\sqrt[n]{v_k} = s_k(\sqrt[n]{v_1})^k.$$

Donc en mettant v au lieu de v_1, l'expression de $\varphi^2(\alpha^m \varepsilon)$ deviendra

$$(116)\quad \varphi^2(\alpha^m \varepsilon) = \frac{1}{n}\left(-p_{n-1} + \theta^{-m} v^{\frac{1}{n}} + s_2 \theta^{-2m} v^{\frac{2}{n}} + \cdots + s_{n-1} \theta^{-(n-1)m} v^{\frac{n-1}{n}}\right);$$

pour $m = 0$:

$$(117)\quad \varphi^2(\varepsilon) = \frac{1}{n}\left(-p_{n-1} + v^{\frac{1}{n}} + s_2 v^{\frac{2}{n}} + s_3 v^{\frac{3}{n}} + \cdots + s_{n-1} v^{\frac{n-1}{n}}\right).$$

Cette expression n'a que n valeurs différentes, qui répondent aux n valeurs de $v^{\frac{1}{n}}$. Donc en dernier lieu la résolution de l'équation $P_{2n+1} = 0$ est réduite à celle d'une seule équation du degré $2n+2$; mais *en général* cette équation ne paraît pas être résoluble algébriquement. Néanmoins on peut la résoudre complètement dans plusieurs cas particuliers, par exemple, lorsque $e = c$, $e = c\sqrt{3}$, $e = c(2 \pm \sqrt{3})$ etc. Dans le cours de ce mémoire je m'occuperai de ces cas, dont le premier surtout est remarquable, tant par la simplicité de la solution, que par sa belle application dans la géométrie.

En effet entre autres théorèmes je suis parvenu à celui-ci:

"On peut diviser la circonférence entière de la lemniscate en m parties "égales *par la règle et le compas seuls*, si m est de la forme 2^n ou "$2^n + 1$, ce dernier nombre étant en même temps premier; ou bien si "m est un produit de plusieurs nombres de ces deux formes."

Ce théorème est, comme on le voit, précisément le même que celui de M. *Gauss*, relativement au cercle.

§ VI.

Expressions diverses des fonctions $\varphi(n\beta)$, $f(n\beta)$, $F(n\beta)$.

23.

En faisant usage des formules connues, qui donnent les valeurs des coefficiens d'une équation algébrique en fonction des racines, on peut tirer plusieurs expressions des fonctions $\varphi(n\beta)$, $f(n\beta)$, $F(n\beta)$ des formules du paragraphe précédent. Je vais considérer les plus remarquables. Pour abréger les formules, je me servirai des notations suivantes. Je désignerai

1) Par $\overset{k'}{\underset{k}{\Sigma_m}}\psi m$ la somme, et par $\overset{k'}{\underset{k}{\Pi_m}}\psi m$ le produit de toutes les quantités de la forme ψm, qu'on obtiendra en donnant à m toutes les valeurs entières, depuis k jusqu'à k', les limites k et k' y comprises.

2) Par $\overset{k'}{\underset{k}{\Sigma_m}}\overset{\nu'}{\underset{\nu}{\Sigma_\mu}}\psi(m,\mu)$ la somme, et par $\overset{k'}{\underset{k}{\Pi_m}}\overset{\nu'}{\underset{\nu}{\Pi_\mu}}\psi(m,\mu)$ le produit de toutes les quantités de la forme $\psi(m,\mu)$ qu'on obtiendra en donnant à m toutes les valeurs entières de k à k', et à μ les valeurs entières de ν à ν', en y comprenant toujours les limites.

D'après cela il est clair qu'on aura

$$(119)\qquad \overset{k'}{\underset{k}{\Sigma_m}}\psi(m)=\psi(k)+\psi(k+1)+\cdots+\psi(k'),$$

$$(120)\qquad \overset{k'}{\underset{k}{\Pi_m}}\psi(m)=\psi(k).\psi(k+1)\ldots\psi(k'),$$

$$(121)\qquad \overset{k'}{\underset{k}{\Sigma_m}}\overset{\nu'}{\underset{\nu}{\Sigma_\mu}}\psi(m,\mu)=\overset{\nu'}{\underset{\nu}{\Sigma_\mu}}\psi(k,\mu)+\overset{\nu'}{\underset{\nu}{\Sigma_\mu}}\psi(k+1,\mu)+\cdots+\overset{\nu'}{\underset{\nu}{\Sigma_\mu}}\psi(k',\mu),$$

$$(122)\qquad \overset{k'}{\underset{k}{\Pi_m}}\overset{\nu'}{\underset{\nu}{\Pi_\mu}}\psi(m,\mu)=\overset{\nu'}{\underset{\nu}{\Pi_\mu}}\psi(k,\mu)\;.\;\overset{\nu'}{\underset{\nu}{\Pi_\mu}}\psi(k+1,\mu)\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;\overset{\nu'}{\underset{\nu}{\Pi_\mu}}\psi(k',\mu).$$

Cela posé, considérons les équations

$$(123)\qquad \begin{cases} \varphi(2n+1)\beta=\dfrac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}}, \\ f(2n+1)\beta=\dfrac{P'_{2n+1}}{Q_{2n+1}}, \\ F(2n+1)\beta=\dfrac{P''_{2n+1}}{Q_{2n+1}}. \end{cases}$$

Nous avons vu que P_{2n+1} est une fonction rationnelle de x du degré



$(2n+1)^2$ et de la forme $x.\psi(x^2)$. De même P'_{2n+1} et P''_{2n+1} sont des fonctions de cette même forme, la première par rapport à y et la seconde par rapport à z. Enfin Q_{2n+1} est une fonction qui, exprimée indifféremment en x, y ou z, sera du degré $(2n+1)^2-1$, et contiendra seulement des puissances paires. Donc on aura

$$\begin{aligned}
P_{2n+1} &= Ax^{(2n+1)^2} + \cdots + Bx,\\
P'_{2n+1} &= A'y^{(2n+1)^2} + \cdots + B'y,\\
P''_{2n+1} &= A''z^{(2n+1)^2} + \cdots + B''z,\\
Q_{2n+1} &= Cx^{(2n+1)^2-1} + \cdots + D,\\
Q_{2n+1} &= C'y^{(2n+1)^2-1} + \cdots + D',\\
Q_{2n+1} &= C''z^{(2n+1)^2-1} + \cdots + D''.
\end{aligned}$$

En substituant ces valeurs dans l'équation (123), il viendra

$$\begin{aligned}
(Ax^{(2n+1)^2} + \cdots + Bx) &= \varphi(2n+1)\beta.(Cx^{(2n+1)^2-1} + \cdots + D),\\
(A'y^{(2n+1)^2} + \cdots + B'y) &= f(2n+1)\beta.(C'y^{(2n+1)^2-1} + \cdots + D'),\\
(A''z^{(2n+1)^2} + \cdots + B''z) &= F(2n+1)\beta.(C''z^{(2n+1)^2-1} + \cdots + D'').
\end{aligned}$$

Dans la première de ces équations A est le coefficient du premier terme, $-\varphi(2n+1)\beta.C$ celui du second, et $-\varphi(2n+1)\beta.D$ le dernier terme. Donc $\frac{C}{A}\varphi(2n+1)\beta$ est égal à la somme, et $\frac{D}{A}\varphi(2n+1)\beta$ égal au produit des racines de l'équation dont il s'agit, équation qui est la même que celle-ci:

$$\varphi(2n+1)\beta = \frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}}. \tag{124}$$

Donc en remarquant que A, C et D (et en général tous les coefficiens) sont indépendans de β, on voit que $\varphi(2n+1)\beta$ est (à un coefficient constant près) égal à la somme et au produit de toutes les racines de l'équation (124).

De la même manière on voit que $f(2n+1)\beta$ et $F(2n+1)\beta$ sont respectivement égaux au produit ou à la somme des racines des équations

$$f(2n+1)\beta = \frac{P'_{2n+1}}{Q_{2n+1}},\quad F(2n+1)\beta = \frac{P''_{2n+1}}{Q_{2n+1}},$$

en ayant soin de multiplier le résultat par un coefficient constant, choisi convenablement.

Maintenant d'après le n° 11 les racines des équations (123) sont respectivement:

$$x = (-1)^{m+\mu} \varphi\left(\beta + \frac{m}{2n+1}\omega + \frac{\mu}{2n+1}\varpi i\right),$$
$$y = (-1)^{m} f\left(\beta + \frac{m}{2n+1}\omega + \frac{\mu}{2n+1}\varpi i\right),$$
$$z = (-1)^{\mu} F\left(\beta + \frac{m}{2n+1}\omega + \frac{\mu}{2n+1}\varpi i\right),$$

où les limites de m et μ sont $-n$ et $+n$. Donc en vertu de ce qu'on vient de voir, et en faisant usage des notations adoptées, on aura les formules suivantes:

$$(125)\quad \left\{\begin{aligned}
\varphi(2n+1)\beta &= A \sum_{-n}^{+n}{}_m \sum_{-n}^{+n}{}_\mu (-1)^{m+\mu} \varphi\left(\beta + \frac{m\omega + \mu\varpi i}{2n+1}\right),\\
f(2n+1)\beta &= A' \sum_{-n}^{+n}{}_m \sum_{-n}^{+n}{}_\mu (-1)^{m} f\left(\beta + \frac{m\omega + \mu\varpi i}{2n+1}\right),\\
F(2n+1)\beta &= A'' \sum_{-n}^{+n}{}_m \sum_{-n}^{+n}{}_\mu (-1)^{\mu} F\left(\beta + \frac{m\omega + \mu\varpi i}{2n+1}\right);\\
\varphi(2n+1)\beta &= B \prod_{-n}^{+n}{}_m \prod_{-n}^{+n}{}_\mu \varphi\left(\beta + \frac{m\omega + \mu\varpi i}{2n+1}\right),\\
f(2n+1)\beta &= B' \prod_{-n}^{+n}{}_m \prod_{-n}^{+n}{}_\mu f\left(\beta + \frac{m\omega + \mu\varpi i}{2n+1}\right),\\
F(2n+1)\beta &= B'' \prod_{-n}^{+n}{}_m \prod_{-n}^{+n}{}_\mu F\left(\beta + \frac{m\omega + \mu\varpi i}{2n+1}\right).
\end{aligned}\right.$$

Pour déterminer les quantités constantes A, A', A'', B, B', B'', il faudra donner à β une valeur particulière. Ainsi en faisant dans les trois premières formules $\beta = \frac{\omega}{2} + \frac{\varpi}{2} i$, après avoir divisé les deux membres par $\varphi\beta$, il viendra, en remarquant que $\varphi\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\varpi}{2} i\right) = \frac{1}{0}$,

$$\left.\begin{aligned}
A &= \frac{\varphi(2n+1)\beta}{\varphi\beta}\\
A' &= \frac{f(2n+1)\beta}{f\beta}\\
A'' &= \frac{F(2n+1)\beta}{F\beta}
\end{aligned}\right\} \text{ pour } \beta = \frac{\omega}{2} + \frac{\varpi}{2} i.$$

Soit $\beta = \frac{\omega}{2} + \frac{\varpi}{2} i + \alpha$, on a

$$\left.\begin{aligned}
A &= \frac{\varphi\left((2n+1)\alpha+n\omega+n\varpi i+\frac{\omega}{2}+\frac{\varpi}{2}i\right)}{\varphi\left(\alpha+\frac{\omega}{2}+\frac{\varpi}{2}i\right)} \\
&= \frac{\varphi\left((2n+1)\alpha+\frac{\omega}{2}+\frac{\varpi}{2}i\right)}{\varphi\left(\alpha+\frac{\omega}{2}+\frac{\varpi}{2}i\right)} = \frac{\varphi\alpha}{\varphi(2n+1)\alpha}, \\
A' &= \frac{f\left((2n+1)\alpha+n\omega+n\varpi i+\frac{\omega}{2}+\frac{\varpi}{2}i\right)}{f\left(\alpha+\frac{\omega}{2}+\frac{\varpi}{2}i\right)} \\
&= (-1)^n\frac{f\left((2n+1)\alpha+\frac{\omega}{2}+\frac{\varpi}{2}i\right)}{f\left(\alpha+\frac{\omega}{2}+\frac{\varpi}{2}i\right)} = (-1)^n\frac{f\left(\alpha+\frac{\omega}{2}\right)}{f\left((2n+1)\alpha+\frac{\omega}{2}\right)}, \\
A'' &= \frac{F\left((2n+1)\alpha+n\omega+n\varpi i+\frac{\omega}{2}+\frac{\varpi}{2}i\right)}{F\left(\alpha+\frac{\omega}{2}+\frac{\varpi}{2}i\right)} \\
&= (-1)^n\frac{F\left((2n+1)\alpha+\frac{\omega}{2}+\frac{\varpi}{2}i\right)}{F\left(\alpha+\frac{\omega}{2}+\frac{\varpi}{2}i\right)} = (-1)^n\frac{F\left(\alpha+\frac{\varpi}{2}i\right)}{F\left((2n+1)\alpha+\frac{\varpi}{2}i\right)}.
\end{aligned}\right\}\text{ pour } \alpha=0.$$

Ces expressions de A, A', A'' deviendront de la forme $\frac{0}{0}$ en faisant $\alpha=0$, donc on trouvera d'après les règles connues

$$A=\frac{1}{2n+1},\quad A'=A''=\frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

D'après cela les trois premières formules deviendront

$$(126)\quad\left\{\begin{aligned}
\varphi(2n+1)\beta &= \frac{1}{2n+1}\sum_{-n}^{+n}{}_m\sum_{-n}^{+n}{}_\mu(-1)^{m+\mu}\,\varphi\left(\beta+\frac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right), \\
f(2n+1)\beta &= \frac{(-1)^n}{2n+1}\sum_{-n}^{+n}{}_m\sum_{-n}^{+n}{}_\mu(-1)^{m}\,f\left(\beta+\frac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right), \\
F(2n+1)\beta &= \frac{(-1)^n}{2n+1}\sum_{-n}^{+n}{}_m\sum_{-n}^{+n}{}_\mu(-1)^{\mu}\,F\left(\beta+\frac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right).
\end{aligned}\right.$$

Pour avoir la valeur des constantes B, B', B'', je remarque qu'on aura

$$(127)\quad \prod_{-n}^{+n}{}_m\prod_{-n}^{+n}{}_\mu\psi(m,\mu)=\psi(0,0)\prod_1^n{}_m\psi(m,0)\,\psi(-m,0)\prod_1^n{}_\mu\psi(0,\mu)\,\psi(0,-\mu)$$
$$\times\prod_1^n{}_m\prod_1^n{}_\mu\psi(m,\mu)\,\psi(-m,-\mu)\prod_1^n{}_m\prod_1^n{}_\mu\psi(m,-\mu)\,\psi(-m,\mu).$$

En appliquant cette transformation aux formules (125), en divisant la première par $\varphi\beta$, la seconde par $f\beta$ et la troisième par $F\beta$, en faisant ensuite dans la première $\beta=0$, dans la seconde $\beta=\frac{\omega}{2}$ et dans la troisième $\beta=\frac{\varpi}{2}i$, et en remarquant que $\frac{\varphi(2n+1)\beta}{\varphi\beta}=2n+1$, pour $\beta=0$, que $\frac{f(2n+1)\beta}{f\beta}=(-1)^n(2n+1)$, pour $\beta=\frac{\omega}{2}$, et que $\frac{F(2n+1)\beta}{F\beta}=(-1)^n(2n+1)$, pour $\beta=\frac{\varpi}{2}i$, on trouvera

$$(128)\quad\left\{\begin{aligned}
(2n+1)&=B\prod_1^n{}_m\,\varphi^2\left(\frac{m\omega}{2n+1}\right)\prod_1^n{}_\mu\,\varphi^2\left(\frac{\mu\varpi i}{2n+1}\right)\\
&\quad\times\prod_1^n{}_m\prod_1^n{}_\mu\,\varphi^2\left(\frac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right)\varphi^2\left(\frac{m\omega-\mu\varpi i}{2n+1}\right),\\
(-1)^n(2n+1)&=B'\prod_1^n{}_m f^2\left(\frac{\omega}{2}+\frac{m\omega}{2n+1}\right)\prod_1^n{}_\mu f^2\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\mu\varpi i}{2n+1}\right)\\
&\quad\times\prod_1^n{}_m\prod_1^n{}_\mu f^2\left(\frac{\omega}{2}+\frac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right)f^2\left(\frac{\omega}{2}+\frac{m\omega-\mu\varpi i}{2n+1}\right),\\
(-1)^n(2n+1)&=B''\prod_1^n{}_m F^2\left(\frac{\varpi}{2}i+\frac{m\omega}{2n+1}\right)\prod_1^n{}_\mu F^2\left(\frac{\varpi}{2}i+\frac{\mu\varpi i}{2n+1}\right)\\
&\quad\times\prod_1^n{}_m\prod_1^n{}_\mu F^2\left(\frac{\varpi}{2}i+\frac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right)F^2\left(\frac{\varpi}{2}i+\frac{m\omega-\mu\varpi i}{2n+1}\right).
\end{aligned}\right.$$

En tirant de ces équations les valeurs de B, B', B'', et les substituant ensuite dans les formules transformées, il viendra

$$(129)\begin{cases}
\varphi(2n+1)\beta = \\
\quad (2n+1)\varphi\beta \prod_1^n{}_m \dfrac{\varphi\left(\beta+\frac{m\omega}{2n+1}\right)\varphi\left(\beta-\frac{m\omega}{2n+1}\right)}{\varphi^2\left(\frac{m\omega}{2n+1}\right)} \prod_1^n{}_\mu \dfrac{\varphi\left(\beta+\frac{\mu\varpi i}{2n+1}\right)\varphi\left(\beta-\frac{\mu\varpi i}{2n+1}\right)}{\varphi^2\left(\frac{\mu\varpi i}{2n+1}\right)} \\
\quad \times \prod_1^n{}_m \prod_1^n{}_\mu \dfrac{\varphi\left(\beta+\frac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right)\varphi\left(\beta-\frac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right)}{\varphi^2\left(\frac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right)} \dfrac{\varphi\left(\beta+\frac{m\omega-\mu\varpi i}{2n+1}\right)\varphi\left(\beta-\frac{m\omega-\mu\varpi i}{2n+1}\right)}{\varphi^2\left(\frac{m\omega-\mu\varpi i}{2n+1}\right)}, \\
f(2n+1)\beta = \\
\quad (-1)^n(2n+1)f\beta \prod_1^n{}_m \dfrac{f\left(\beta+\frac{m\omega}{2n+1}\right)f\left(\beta-\frac{m\omega}{2n+1}\right)}{f^2\left(\frac{\omega}{2}+\frac{m\omega}{2n+1}\right)} \prod_1^n{}_\mu \dfrac{f\left(\beta+\frac{\mu\varpi i}{2n+1}\right)f\left(\beta-\frac{\mu\varpi i}{2n+1}\right)}{f^2\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\mu\varpi i}{2n+1}\right)} \\
\quad \times \prod_1^n{}_m \prod_1^n{}_\mu \dfrac{f\left(\beta+\frac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right)f\left(\beta-\frac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right)}{f^2\left(\frac{\omega}{2}+\frac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right)} \dfrac{f\left(\beta+\frac{m\omega-\mu\varpi i}{2n+1}\right)f\left(\beta-\frac{m\omega-\mu\varpi i}{2n+1}\right)}{f^2\left(\frac{\omega}{2}+\frac{m\omega-\mu\varpi i}{2n+1}\right)}, \\
F(2n+1)\beta = \\
\quad (-1)^n(2n+1)F\beta \prod_1^n{}_m \dfrac{F\left(\beta+\frac{m\omega}{2n+1}\right)F\left(\beta-\frac{m\omega}{2n+1}\right)}{F^2\left(\frac{\varpi}{2}i+\frac{m\omega}{2n+1}\right)} \prod_1^n{}_\mu \dfrac{F\left(\beta+\frac{\mu\varpi i}{2n+1}\right)F\left(\beta-\frac{\mu\varpi i}{2n+1}\right)}{F^2\left(\frac{\varpi}{2}i+\frac{\mu\varpi i}{2n+1}\right)} \\
\quad \times \prod_1^n{}_m \prod_1^n{}_\mu \dfrac{F\left(\beta+\frac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right)F\left(\beta-\frac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right)}{F^2\left(\frac{\varpi}{2}i+\frac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right)} \dfrac{F\left(\beta+\frac{m\omega-\mu\varpi i}{2n+1}\right)F\left(\beta-\frac{m\omega-\mu\varpi i}{2n+1}\right)}{F^2\left(\frac{\varpi}{2}i+\frac{m\omega-\mu\varpi i}{2n+1}\right)}.
\end{cases}$$

On peut donner à ces expressions des formes plus simples, en faisant usage des formules suivantes:

$$\frac{\varphi(\beta+\alpha)\varphi(\beta-\alpha)}{\varphi^2\alpha} = -\frac{1-\dfrac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\alpha}}{1-\dfrac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left(\alpha+\frac{\omega}{2}+\frac{\varpi}{2}i\right)}},$$

$$\frac{f(\beta+\alpha)f(\beta-\alpha)}{f^2\left(\frac{\omega}{2}+\alpha\right)} = -\frac{1-\dfrac{f^2\beta}{f^2\left(\frac{\omega}{2}+\alpha\right)}}{1-\dfrac{f^2\beta}{f^2\left(\alpha+\frac{\omega}{2}+\frac{\varpi}{2}i\right)}},$$

$$\frac{F(\beta+\alpha)F(\beta-\alpha)}{F^2\left(\frac{\varpi}{2}i+\alpha\right)} = -\frac{1-\dfrac{F^2\beta}{F^2\left(\frac{\varpi}{2}i+\alpha\right)}}{1-\dfrac{F^2\beta}{F^2\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\varpi}{2}i+\alpha\right)}},$$

qu'on vérifiera aisément au moyen des formules (13), (16), (18).

En vertu de ces formules il est clair qu'on peut mettre les équations (129) sous la forme:

$$(130)\left\{\begin{aligned}
&\varphi(2n+1)\beta = \\
&(2n+1)\varphi\beta\prod_1^n{}_m\frac{1-\dfrac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left(\frac{m\omega}{2n+1}\right)}}{1-\dfrac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\varpi}{2}i+\frac{m\omega}{2n+1}\right)}}\prod_1^n{}_\mu\frac{1-\dfrac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left(\frac{\mu\varpi i}{2n+1}\right)}}{1-\dfrac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\varpi}{2}i+\frac{\mu\varpi i}{2n+1}\right)}}\\
&\times\prod_1^n{}_m\prod_1^n{}_\mu\frac{1-\dfrac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left(\frac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right)}}{1-\dfrac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\varpi}{2}i+\frac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right)}}\cdot\frac{1-\dfrac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left(\frac{m\omega-\mu\varpi i}{2n+1}\right)}}{1-\dfrac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\varpi}{2}i+\frac{m\omega-\mu\varpi i}{2n+1}\right)}},\\
&f(2n+1)\beta = \\
&(-1)^n(2n+1)f\beta\prod_1^n{}_m\frac{1-\dfrac{f^2\beta}{f^2\left(\frac{\omega}{2}+\frac{m\omega}{2n+1}\right)}}{1-\dfrac{f^2\beta}{f^2\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\varpi}{2}i+\frac{m\omega}{2n+1}\right)}}\prod_1^n{}_\mu\frac{1-\dfrac{f^2\beta}{f^2\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\mu\varpi i}{2n+1}\right)}}{1-\dfrac{f^2\beta}{f^2\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\varpi}{2}i+\frac{\mu\varpi i}{2n+1}\right)}}\\
&\times\prod_1^n{}_m\prod_1^n{}_\mu\frac{1-\dfrac{f^2\beta}{f^2\left(\frac{\omega}{2}+\frac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right)}}{1-\dfrac{f^2\beta}{f^2\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\varpi}{2}i+\frac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right)}}\cdot\frac{1-\dfrac{f^2\beta}{f^2\left(\frac{\omega}{2}+\frac{m\omega-\mu\varpi i}{2n+1}\right)}}{1-\dfrac{f^2\beta}{f^2\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\varpi}{2}i+\frac{m\omega-\mu\varpi i}{2n+1}\right)}},\\
&F(2n+1)\beta = \\
&(-1)^n(2n+1)F\beta\prod_1^n{}_m\frac{1-\dfrac{F^2\beta}{F^2\left(\frac{\varpi}{2}i+\frac{m\omega}{2n+1}\right)}}{1-\dfrac{F^2\beta}{F^2\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\varpi}{2}i+\frac{m\omega}{2n+1}\right)}}\prod_1^n{}_\mu\frac{1-\dfrac{F^2\beta}{F^2\left(\frac{\varpi}{2}i+\frac{\mu\varpi i}{2n+1}\right)}}{1-\dfrac{F^2\beta}{F^2\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\varpi}{2}i+\frac{\mu\varpi i}{2n+1}\right)}}\\
&\times\prod_1^n{}_m\prod_1^n{}_\mu\frac{1-\dfrac{F^2\beta}{F^2\left(\frac{\varpi}{2}i+\frac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right)}}{1-\dfrac{F^2\beta}{F^2\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\varpi}{2}i+\frac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right)}}\cdot\frac{1-\dfrac{F^2\beta}{F^2\left(\frac{\varpi}{2}i+\frac{m\omega-\mu\varpi i}{2n+1}\right)}}{1-\dfrac{F^2\beta}{F^2\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\varpi}{2}i+\frac{m\omega-\mu\varpi i}{2n+1}\right)}}.
\end{aligned}\right.$$

Ces formules donnent, comme on le voit, les valeurs de $\varphi(2n+1)\beta$, $f(2n+1)\beta$ et $F(2n+1)\beta$, exprimées respectivement en fonction rationnelle de $\varphi\beta$, $f\beta$ et $F\beta$ sous forme de produits.

Nous donnerons encore les valeurs de $f(2n+1)\beta$, $F(2n+1)\beta$ sous une autre forme, qui sera utile dans la suite.

On a $f^2\beta = 1 - c^2\varphi^2\beta$, donc

$$1 - \frac{f^2\beta}{f^2\alpha} = \frac{c^2(\varphi^2\beta - \varphi^2\alpha)}{f^2\alpha}$$

et

$$1 - \frac{f^2\beta}{f^2\left(\frac{\varpi}{2}i+\alpha\right)} = \frac{c^2\left[\varphi^2\beta - \varphi^2\left(\frac{\varpi}{2}i+\alpha\right)\right]}{f^2\left(\frac{\varpi}{2}i+\alpha\right)};$$

or en vertu de l'équation (18) on a

$$f^2\left(\frac{\varpi}{2}i+\alpha\right) = \frac{e^2+c^2}{e^2}\cdot\frac{1}{f^2\alpha},$$

donc

$$\frac{1-\frac{f^2\beta}{f^2\alpha}}{1-\frac{f^2\beta}{f^2\left(\frac{\varpi}{2}i+\alpha\right)}} = \frac{1}{f^4\alpha}\,\frac{e^2+c^2}{e^2}\cdot\frac{\varphi^2\alpha}{\varphi^2\left(\frac{\varpi}{2}i+\alpha\right)}\,\frac{1-\frac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\alpha}}{1-\frac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left(\frac{\varpi}{2}i+\alpha\right)}}.$$

On trouvera de même

$$\frac{1-\frac{F^2\beta}{F^2\alpha}}{1-\frac{F^2\beta}{F^2\left(\frac{\omega}{2}+\alpha\right)}} = \frac{1}{F^4\alpha}\,\frac{e^2+c^2}{c^2}\cdot\frac{\varphi^2\alpha}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2}+\alpha\right)}\,\frac{1-\frac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\alpha}}{1-\frac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2}+\alpha\right)}}.$$

En vertu de ces formules, et en faisant $\beta = 0$ pour déterminer le facteur constant, il est clair qu'on peut écrire les expressions de $f(2n+1)\beta$, $F(2n+1)\beta$, comme il suit:

$$(130')\begin{cases} f(2n+1)\beta = f\beta \prod_1^n{}_m \dfrac{1-\dfrac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2}+\frac{m\omega}{2n+1}\right)}}{1-\dfrac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\varpi}{2}i+\frac{m\omega}{2n+1}\right)}} \prod_1^n{}_\mu \dfrac{1-\dfrac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\mu\varpi i}{2n+1}\right)}}{1-\dfrac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\varpi}{2}i+\frac{\mu\varpi i}{2n+1}\right)}} \\ \qquad \times \prod_1^n{}_m \prod_1^n{}_\mu \dfrac{1-\dfrac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2}+\frac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right)}}{1-\dfrac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\varpi}{2}i+\frac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right)}} \dfrac{1-\dfrac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2}+\frac{m\omega-\mu\varpi i}{2n+1}\right)}}{1-\dfrac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\varpi}{2}i+\frac{m\omega-\mu\varpi i}{2n+1}\right)}}, \\ F(2n+1)\beta = F\beta \prod_1^n{}_m \dfrac{1-\dfrac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left(\frac{\varpi}{2}i+\frac{m\omega}{2n+1}\right)}}{1-\dfrac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\varpi}{2}i+\frac{m\omega}{2n+1}\right)}} \prod_1^n{}_\mu \dfrac{1-\dfrac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left(\frac{\varpi}{2}i+\frac{\mu\varpi i}{2n+1}\right)}}{1-\dfrac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\varpi}{2}i+\frac{\mu\varpi i}{2n+1}\right)}} \\ \qquad \times \prod_1^n{}_m \prod_1^n{}_\mu \dfrac{1-\dfrac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left(\frac{\varpi}{2}i+\frac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right)}}{1-\dfrac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\varpi}{2}i+\frac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right)}} \dfrac{1-\dfrac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left(\frac{\varpi}{2}i+\frac{m\omega-\mu\varpi i}{2n+1}\right)}}{1-\dfrac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\varpi}{2}i+\frac{m\omega-\mu\varpi i}{2n+1}\right)}}. \end{cases}$$

Dans ce paragraphe nous n'avons considéré les fonctions $\varphi(n\beta)$, $f(n\beta)$, $F(n\beta)$ que dans le cas des valeurs impaires de n. On pourrait trouver des expressions analogues de ces fonctions pour des valeurs paires de n; mais comme il n'y a à cela aucune difficulté, et que d'ailleurs les formules auxquelles nous sommes parvenus sont celles qui nous seront les plus utiles dans la suite, je ne m'en occuperai pas.

§ VII.

Développement des fonctions $\varphi\alpha$, $f\alpha$, $F\alpha$ en séries et en produits infinis.

24.

En faisant dans les formules du paragraphe précédent $\beta = \frac{\alpha}{2n+1}$, on obtiendra des expressions des fonctions $\varphi\alpha$, $f\alpha$, $F\alpha$, qui, à cause du nombre indéterminé n, peuvent être variées d'une infinité de manières.

Parmi toutes les formules qu'on obtiendra ainsi, celles qui résultent de la supposition de n infini sont les plus remarquables. Alors les fonctions φ, f, F disparaîtront des valeurs de $\varphi\alpha$, $f\alpha$, $F\alpha$, et on obtiendra pour ces fonctions des expressions algébriques, mais composées d'une infinité de termes. Pour avoir ces expressions, il faut faire, dans les formules (126), (130), $\beta = \frac{\alpha}{2n+1}$, et ensuite chercher la limite du second membre de ces équations pour des valeurs toujours croissantes de n. Pour abréger, soit v une quantité dont la limite est zéro pour des valeurs toujours croissantes de n. Cela posé, considérons successivement les trois formules (126).

En faisant dans la première des formules (126) $\beta = \frac{\alpha}{2n+1}$, et remarquant que

$$(131)\quad \sum_{-n}^{+n}{}_m \sum_{-n}^{+n}{}_\mu \theta(m,\mu) = \theta(0,0) + \sum_1^n{}_m[\theta(m,0)+\theta(-m,0)] + \sum_1^n{}_\mu[\theta(0,\mu)+\theta(0,-\mu)] + \sum_1^n{}_m\sum_1^n{}_\mu[\theta(m,\mu)+\theta(-m,-\mu)+\theta(m,-\mu)+\theta(-m,\mu)],$$

il est clair qu'on peut mettre la formule dont il s'agit sous la forme:

$$(132)\quad \varphi\alpha = \frac{1}{2n+1}\cdot\varphi\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right) + \frac{1}{2n+1}\sum_1^n{}_m(-1)^m\left[\varphi\left(\frac{\alpha+m\omega}{2n+1}\right)+\varphi\left(\frac{\alpha-m\omega}{2n+1}\right)\right] + \frac{1}{2n+1}\sum_1^n{}_\mu(-1)^\mu\left[\varphi\left(\frac{\alpha+\mu\varpi i}{2n+1}\right)+\varphi\left(\frac{\alpha-\mu\varpi i}{2n+1}\right)\right] - \frac{i}{ec}\sum_1^n{}_m\sum_1^n{}_\mu(-1)^{m+\mu}\psi(n-m,n-\mu) + \frac{i}{ec}\sum_1^n{}_m\sum_1^n{}_\mu(-1)^{m+\mu}\psi_1(n-m,n-\mu),$$

où l'on a fait pour abréger,

$$(133)\quad \begin{cases} \psi(m,\mu) = \dfrac{1}{2n+1}\cdot\left\{\dfrac{1}{\varphi\left(\frac{\alpha+(m+\frac12)\omega+(\mu+\frac12)\varpi i}{2n+1}\right)} + \dfrac{1}{\varphi\left(\frac{\alpha-(m+\frac12)\omega-(\mu+\frac12)\varpi i}{2n+1}\right)}\right\}, \\ \psi_1(m,\mu) = \dfrac{1}{2n+1}\cdot\left\{\dfrac{1}{\varphi\left(\frac{\alpha+(m+\frac12)\omega-(\mu+\frac12)\varpi i}{2n+1}\right)} + \dfrac{1}{\varphi\left(\frac{\alpha-(m+\frac12)\omega+(\mu+\frac12)\varpi i}{2n+1}\right)}\right\}. \end{cases}$$

Maintenant, en remarquant que

$$\varphi\left(\frac{\alpha+m\omega}{2n+1}\right)+\varphi\left(\frac{\alpha-m\omega}{2n+1}\right) = \frac{2\varphi\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)\cdot f\left(\frac{m\omega}{2n+1}\right)\cdot F\left(\frac{m\omega}{2n+1}\right)}{1+e^2c^2\cdot\varphi^2\left(\frac{m\omega}{2n+1}\right)\cdot\varphi^2\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)} = \frac{A_m}{2n+1},$$

$$\varphi\left(\frac{\alpha+\mu\tilde{\omega}i}{2n+1}\right)+\varphi\left(\frac{\alpha-\mu\tilde{\omega}i}{2n+1}\right)=\frac{2\varphi\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)\cdot f\left(\frac{\mu\tilde{\omega}i}{2n+1}\right)\cdot F\left(\frac{\mu\tilde{\omega}i}{2n+1}\right)}{1+e^2c^2\cdot\varphi^2\left(\frac{\mu\tilde{\omega}i}{2n+1}\right)\cdot\varphi^2\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)}=\frac{B_\mu}{2n+1},$$

où A_m et B_μ sont des quantités finies, le second membre de l'équation (132) jusqu'au terme qui a le signe $-$, prendra la forme

$$\frac{1}{2n+1}\varphi\frac{\alpha}{2n+1}+\frac{1}{(2n+1)^2}\sum_1^n{}_m(-1)^m(A_m+B_m);$$

or la limite de cette quantité est évidemment zéro; donc, en prenant la limite de la formule (132), on aura

$$\varphi\alpha=-\frac{i}{ec}\lim.\sum_1^n{}_m\sum_1^n{}_\mu(-1)^{m+\mu}\psi(n-m,\ n-\mu)$$
$$+\frac{i}{ec}\lim.\sum_1^n{}_m\sum_1^n{}_\mu(-1)^{m+\mu}\psi_1(n-m,\ n-\mu),$$

ou bien:

(134) $$\varphi\alpha=-\frac{i}{ec}\lim.\sum_0^{n-1}{}_m\sum_0^{n-1}{}_\mu(-1)^{m+\mu}\psi(m,\mu)$$
$$+\frac{i}{ec}\lim.\sum_0^{n-1}{}_m\sum_0^{n-1}{}_\mu(-1)^{m+\mu}\psi_1(m,\mu).$$

Il suffit de connaître l'une de ces limites, car on aura l'autre en changeant seulement le signe de i. Cherchons la limite de

$$\sum_0^{n-1}{}_m\sum_0^{n-1}{}_\mu(-1)^{m+\mu}\psi(m,\mu).$$

Pour cela, il faut essayer de mettre la quantité précédente sous la forme

$$P+v,$$

où P est indépendant de n, et v une quantité qui a zéro pour limite; car alors la quantité P sera précisément la limite dont il s'agit.

25.

Considérons d'abord l'expression

$$\sum_0^{n-1}{}_\mu(-1)^\mu\psi(m,\mu).$$

Soit

(135) $$\theta(m,\mu)=\frac{2\alpha}{\alpha^2-[(m+\frac{1}{2})\omega+(\mu+\frac{1}{2})\tilde{\omega}i]^2},$$

et faisons

$$(136)\qquad \psi(m,\mu)-\theta(m,\mu)=\frac{2\alpha}{(2n+1)^2}R_\mu,$$

on aura

$$(137)\quad \sum_0^{n-1}{}_\mu(-1)^\mu\psi(m,\mu)-\sum_0^{n-1}{}_\mu(-1)^\mu\theta(m,\mu)=2\alpha\sum_0^{n-1}{}_\mu(-1)^\mu\frac{R_\mu}{(2n+1)^2}.$$

Cela posé, je dis que le second membre de cette équation est une quantité de la forme $\frac{v}{2n+1}$.

D'après les formules (12), (13) on aura

$$\frac{1}{\varphi(\beta+\varepsilon)}+\frac{1}{\varphi(\beta-\varepsilon)}=\frac{\varphi(\beta+\varepsilon)+\varphi(\beta-\varepsilon)}{\varphi(\beta+\varepsilon)\cdot\varphi(\beta-\varepsilon)}=\frac{2\varphi\beta.f\varepsilon.F\varepsilon}{\varphi^2\beta-\varphi^2\varepsilon},$$

donc, en faisant $\beta=\frac{\alpha}{2n+1}$ et $\varepsilon=\frac{(m+\frac{1}{2})\omega+(\mu+\frac{1}{2})\varpi i}{2n+1}=\frac{\varepsilon_\mu}{2n+1}$ et $f\varepsilon.F\varepsilon=\theta\varepsilon$, on a

$$\psi(m,\mu)=\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{2\varphi\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)\cdot\theta\left(\frac{\varepsilon_\mu}{2n+1}\right)}{\varphi^2\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)-\varphi^2\left(\frac{\varepsilon_\mu}{2n+1}\right)}.$$

Or on a

$$\varphi\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)=\frac{\alpha}{2n+1}+\frac{A\alpha^3}{(2n+1)^3},$$

donc

$$\psi(m,\mu)=\frac{\theta\left(\frac{\varepsilon_\mu}{2n+1}\right)}{\varphi^2\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)-\varphi^2\left(\frac{\varepsilon_\mu}{2n+1}\right)}\left(\frac{2\alpha}{(2n+1)^2}+\frac{2A\alpha^3}{(2n+1)^4}\right),$$

et par conséquent

$$\psi(m,\mu)-\theta(m,\mu)=\frac{2\alpha}{(2n+1)^2}\left\{\frac{\theta\left(\frac{\varepsilon_\mu}{2n+1}\right)}{\varphi^2\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)-\varphi^2\left(\frac{\varepsilon_\mu}{2n+1}\right)}-\frac{1}{\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)^2-\left(\frac{\varepsilon_\mu}{2n+1}\right)^2}\right\}$$
$$+\frac{2A\alpha^3}{(2n+1)^4}\cdot\frac{\theta\left(\frac{\varepsilon_\mu}{2n+1}\right)}{\varphi^2\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)-\varphi^2\left(\frac{\varepsilon_\mu}{2n+1}\right)}.$$

Donc la valeur de R_μ deviendra

$$(138)\quad R_\mu=\frac{\theta\left(\frac{\varepsilon_\mu}{2n+1}\right)}{\varphi^2\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)-\varphi^2\left(\frac{\varepsilon_\mu}{2n+1}\right)}\left(1+\frac{A\alpha^2}{(2n+1)^2}\right)-\frac{1}{\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)^2-\left(\frac{\varepsilon_\mu}{2n+1}\right)^2}.$$

Cela posé, il y a deux cas à considérer, suivant que $\frac{\varepsilon_\mu}{2n+1}$ a zéro pour limite ou non.

a) Si $\frac{\varepsilon_\mu}{2n+1}$ a zéro pour limite, on aura

$$\varphi^2\left(\frac{\varepsilon_\mu}{2n+1}\right)=\frac{\varepsilon_\mu^2}{(2n+1)^2}+\frac{B_\mu\varepsilon_\mu^4}{(2n+1)^4},$$

$$\theta\left(\frac{\varepsilon_\mu}{2n+1}\right)=\sqrt{1-c^2\varphi^2\left(\frac{\varepsilon_\mu}{2n+1}\right)}\sqrt{1+e^2\varphi^2\left(\frac{\varepsilon_\mu}{2n+1}\right)}=1+\frac{C_\mu\varepsilon_\mu^2}{(2n+1)^2},$$

$$\varphi^2\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)=\frac{\alpha^2}{(2n+1)^2}+\frac{D\alpha^4}{(2n+1)^4},$$

où B_μ, C_μ, D ont des limites finies; donc, en substituant,

$$(139)\quad R_\mu=A\alpha^2\cdot\frac{\frac{1}{\varepsilon_\mu^2}+\frac{C_\mu}{(2n+1)^2}}{\frac{\alpha^2}{\varepsilon_\mu^2}-1+\frac{D\alpha^4}{(2n+1)^2\cdot\varepsilon_\mu^2}-B_\mu\frac{\varepsilon_\mu^2}{(2n+1)^2}}$$
$$+\frac{C_\mu\frac{\alpha^2}{\varepsilon_\mu^2}-\frac{D\alpha^4}{\varepsilon_\mu^4}-C_\mu+B_\mu}{\left(1-\frac{\alpha^2}{\varepsilon_\mu^2}\right)^2-\left(1-\frac{\alpha^2}{\varepsilon_\mu^2}\right)\left(\frac{D\alpha^4}{(2n+1)^2\varepsilon_\mu^2}-B_\mu\frac{\varepsilon_\mu^2}{(2n+1)^2}\right)};$$

or que ε_μ soit fini ou infini, il est clair que cette quantité convergera toujours vers une quantité finie pour des valeurs toujours croissantes de n. Donc on aura

$$(140)\qquad R_\mu=r_\mu+v_\mu,$$

où r_μ est une quantité finie indépendante de n.

b) Si $\frac{\varepsilon_\mu}{2n+1}$ a pour limite une quantité finie, il est clair qu'en nommant cette limite δ_μ, on aura

$$(141)\qquad R_\mu=-\frac{\theta(\delta_\mu)}{\varphi^2(\delta_\mu)}+\frac{1}{\delta_\mu^2}+v_\mu'.$$

Cela posé, considérons l'expression $\sum_0^{n-1}{}_\mu(-1)^\mu\frac{R_\mu}{(2n+1)^2}$. On a

$$(142)\quad \sum_0^{n-1}{}_\mu(-1)^\mu\frac{R_\mu}{(2n+1)^2}=\frac{1}{(2n+1)^2}\cdot[R_0-R_1+R_2-R_3+\cdots$$
$$+(-1)^{\nu-1}R_{\nu-1}+(-1)^\nu(R_\nu-R_{\nu+1}+R_{\nu+2}-R_{\nu+3}+\cdots+(-1)^{n-\nu-1}R_{n-1})].$$

Supposons d'abord que $\frac{\varepsilon_\mu}{2n+1}$ ait pour limite une quantité finie, quelle que soit la valeur de μ. Alors, en remarquant que

$$\delta_{\mu+1} = \delta_\mu,$$

on aura

$$R_\mu - R_{\mu+1} = v_\mu' - v'_{\mu+1},$$

donc

$$\sum_0^{n-1}{}_\mu (-1)^\mu \frac{R_\mu}{(2n+1)^2} = \frac{1}{(2n+1)^2}(v_0' - v_1' + v_2' - v_3' + \cdots + v'_{k-2} - v'_{k-1}) + \frac{B}{(2n+1)^2},$$

où $k = n$ ou $n-1$, selon que n est pair ou impair. La quantité B a toujours pour limite une quantité finie, savoir $B = 0$ si n est pair, et $B = R_{n-1}$ si n est impair.

Maintenant on sait qu'une somme telle que

$$v_0' - v_1' + v_2' - \cdots + v'_{k-2} - v'_{k-1},$$

peut être mise sous la forme kv, v ayant zéro pour limite. Donc en substituant

$$\sum_0^{n-1} (-1)^\mu \frac{R_\mu}{(2n+1)^2} = \frac{kv + B}{(2n+1)^2};$$

or, k étant égal à n ou à $n-1$, et B fini, la limite de $\frac{kv+B}{2n+1}$ sera zéro, donc

(143) $$\sum_0^{n-1} (-1)^\mu \frac{R_\mu}{(2n+1)^2} = \frac{v}{2n+1}.$$

Supposons maintenant que $\frac{m}{2n+1}$ ait zéro pour limite. Alors $\frac{\varepsilon_\mu}{2n+1}$ a également zéro pour limite, à moins qu'en même temps $\frac{\mu}{2n+1}$ n'ait pour limite une quantité finie. Soit dans ce cas ν le nombre entier immédiatement inférieur à $\sqrt{n}$, et considérons la somme

$$R_0 - R_1 + R_2 - R_3 + \cdots + (-1)^{\nu-1} R_{\nu-1}.$$

En supposant que μ soit un des nombres $0, 1, \ldots \nu$, il est clair que $\frac{\varepsilon_\mu}{(2n+1)} = \frac{(m+\frac{1}{2})\omega + (\mu+\frac{1}{2})\varpi i}{2n+1}$ a zéro pour limite; donc, selon ce qu'on a vu, R_μ sera une quantité finie, et par conséquent

$$R_0 - R_1 + R_2 - \cdots + (-1)^{\nu-1} R_{\nu-1} = \nu . R,$$

où R est également une quantité finie.

Considérons maintenant la somme

$$(-1)^\nu (R_\nu - R_{\nu+1} + R_{\nu+2} - \cdots + (-1)^{n-\nu-1} . R_{n-1}).$$

Si $\frac{\varepsilon_\mu}{2n+1}$ a pour limite une quantité différente de zéro, on a, comme on l'a vu,

$$R_\mu - R_{\mu+1} = v_\mu' - v'_{\mu+1};$$

si au contraire $\frac{\varepsilon_\mu}{2n+1}$ a pour limite zéro, on a

$$R_\mu = r_\mu + v_\mu';$$

or, si en même temps $\mu > \sqrt{n}$, il est clair qu'en vertu de la valeur de R_μ,

$$r_\mu = B_\mu - C_\mu;$$

or il est clair que B_μ et C_μ, tous deux, ont pour limites des quantités indépendantes de μ, donc en nommant ces limites B et C, on aura

$$R_\mu = B - C + v_\mu,$$

et par suite, aussi dans ce cas,

$$R_\mu - R_{\mu+1} = v_\mu - v_{\mu+1}.$$

Donc, comme dans le cas où $\frac{\varepsilon_\mu}{2n+1}$ aurait une limite différente de zéro pour toutes les valeurs de μ, on démontrera que

$$\frac{(-1)^\nu}{(2n+1)^2}(R_\nu - R_{\nu+1} + \cdots + (-1)^{n-\nu-1} R_{n-1}) = \frac{v}{(2n+1)}.$$

Maintenant en combinant les équations ci-dessus, on en tirera

$$\sum_0^{n-1}{}_\mu (-1)^\mu \frac{R_\mu}{(2n+1)^2} = \frac{1}{(2n+1)^2} \cdot \nu R + \frac{v}{2n+1};$$

or $\frac{\nu}{2n+1}$ a zéro pour limite, donc

$$\sum_0^{n-1}{}_\mu (-1)^\mu \frac{R_\mu}{(2n+1)^2} = \frac{v}{2n+1}.$$

Donc cette formule a toujours lieu, et par conséquent la formule (137) deviendra

$$(144) \qquad \sum_0^{n-1}{}_\mu (-1)^\mu \psi(m,\mu) - \sum_0^{n-1}{}_\mu (-1)^\mu \theta(m,\mu) = \frac{v}{2n+1}.$$

Cela posé, il s'agit de mettre $\overset{n-1}{\underset{0}{\Sigma}}_\mu (-1)^\mu \theta(m,\mu)$ sous la forme $P+\frac{v}{2n+1}$. Or c'est ce qu'on peut faire comme il suit. On a

$$(145)\quad \begin{cases} \overset{n-1}{\underset{0}{\Sigma}}_\mu (-1)^\mu \theta(m,\mu) = \overset{\infty}{\underset{0}{\Sigma}}_\mu (-1)^\mu \theta(m,\mu) - \overset{\infty}{\underset{n}{\Sigma}}_\mu (-1)^\mu \theta(m,\mu), \\ \overset{\infty}{\underset{n}{\Sigma}}_\mu (-1)^\mu \theta(m,\mu) = (-1)^n [\theta(m,n) - \theta(m,n+1) + \theta(m,n+2) - \cdots]. \end{cases}$$

Or d'après une formule connue on a

$$\theta(m,n) - \theta(m,n+1) + \theta(m,n+2) - \cdots$$
$$= \tfrac{1}{2}\theta(m,n) + A\frac{d\theta(m,n)}{dn} + B\frac{d^3\theta(m,n)}{dn^3} + \cdots,$$

où A, $B\ldots$ sont des nombres; or

$$\theta(m,n) = \frac{2\alpha}{\alpha^2 - [(m+\frac{1}{2})\omega + (n+\frac{1}{2})\varpi i]^2},$$

donc en substituant

$$\theta(m,n) - \theta(m,n+1) + \cdots$$
$$= \frac{\alpha}{\alpha^2 - [(m+\frac{1}{2})\omega + (n+\frac{1}{2})\varpi i]^2} + \frac{4A\alpha\varpi i[(m+\frac{1}{2})\omega + (n+\frac{1}{2})\varpi i]}{[\alpha^2 - ((m+\frac{1}{2})\omega + (n+\frac{1}{2})\varpi i)^2]^2} + \cdots$$

De là il suit que

$$\theta(m,n) - \theta(m,n+1) + \cdots = \frac{\alpha}{\varpi^2 n^2} + \frac{v}{n^2} = \frac{v}{2n+1}.$$

Donc en vertu des équations (145)

$$\overset{n-1}{\underset{0}{\Sigma}}_\mu (-1)^\mu \theta(m,\mu) = \overset{\infty}{\underset{0}{\Sigma}}_\mu (-1)^\mu . \theta(m,\mu) + \frac{v}{2n+1},$$

et par conséquent

$$(146)\qquad \overset{n-1}{\underset{0}{\Sigma}}_\mu (-1)^\mu \psi(m,\mu) = \overset{\infty}{\underset{0}{\Sigma}}_\mu (-1)^\mu . \theta(m,\mu) + \frac{v}{2n+1}.$$

26.

Ayant transformé de cette sorte la quantité $\overset{n-1}{\underset{0}{\Sigma}}_\mu (-1)^\mu . \psi(m,\mu)$, on tire de l'équation (146)

(147) $$\sum_0^{n-1}{}_m \sum_0^{n-1}{}_\mu (-1)^{m+\mu}\psi(m,\mu) = \sum_0^{n-1}(-1)^m.\varrho_m + \sum_0^{n-1}\frac{v_m}{2n+1},$$

en faisant

(148) $$\varrho_m = \sum_0^{\infty}{}_\mu (-1)^\mu.\theta(m,\mu);$$

or

$$\sum_0^{n-1}\frac{v_m}{2n+1} = \frac{v_0+v_1+v_2+\cdots+v_{n-1}}{2n+1} = \frac{nv}{2n+1} = \frac{v}{2},$$

v ayant zéro pour limite. Donc l'équation (147) donnera, en faisant n infini,

(149) $$\lim.\sum_0^{n-1}{}_m \sum_0^{n-1}{}_\mu (-1)^{m+\mu}\psi(m,\mu) = \sum_0^{\infty}(-1)^m.\varrho_m.$$

De même, si l'on fait, pour abréger,

(150) $$\begin{cases} \theta_1(m,\mu) = \dfrac{2\alpha}{\alpha^2-[(m+\frac{1}{2})\omega-(\mu+\frac{1}{2})\varpi i]^2}; \\ \varrho_m' = \sum_0^{\infty}{}_\mu (-1)^\mu \theta_1(m,\mu), \end{cases}$$

on aura

(151) $$\lim.\sum_0^{n-1}{}_m \sum_0^{n-1}{}_\mu (-1)^{m+\mu}\psi_1(m,\mu) = \sum_0^{\infty}(-1)^m\varrho_m'.$$

Ayant trouvé les deux quantités dont l'expression de $\varphi\alpha$ est composée, on aura en substituant

$$\varphi\alpha = -\frac{i}{ec}\sum_0^{\infty}(-1)^m\varrho_m + \frac{i}{ec}\sum_0^{\infty}(-1)^m\varrho_m' = \frac{i}{ec}.\sum_0^{\infty}(-1)^m(\varrho_m'-\varrho_m),$$

ou bien, en remettant les valeurs de ϱ_m' et ϱ_m,

(152) $\varphi\alpha =$

$$\frac{i}{ec}\sum_0^{\infty}{}_m(-1)^m\left[\sum_0^{\infty}{}_\mu(-1)^\mu\left(\frac{2\alpha}{\alpha^2-[(m+\frac{1}{2})\omega-(\mu+\frac{1}{2})\varpi i]^2} - \frac{2\alpha}{\alpha^2-[(m+\frac{1}{2})\omega+(\mu+\frac{1}{2})\varpi i]^2}\right)\right].$$

Maintenant

$$\frac{2\alpha}{\alpha^2-[(m+\frac{1}{2})\omega\pm(\mu+\frac{1}{2})\varpi i]^2} = \frac{1}{\alpha-(m+\frac{1}{2})\omega\mp(\mu+\frac{1}{2})\varpi i} + \frac{1}{\alpha+(m+\frac{1}{2})\omega\pm(\mu+\frac{1}{2})\varpi i},$$

donc

$$\frac{2\alpha}{\alpha^2-[(m+\frac{1}{2})\omega-(\mu+\frac{1}{2})\varpi i]^2} - \frac{2\alpha}{\alpha^2-[(m+\frac{1}{2})\omega+(\mu+\frac{1}{2})\varpi i]^2}$$
$$= \frac{(2\mu+1)\varpi i}{[\alpha+(m+\frac{1}{2})\omega]^2+(\mu+\frac{1}{2})^2\varpi^2} - \frac{(2\mu+1)\varpi i}{[\alpha-(m+\frac{1}{2})\omega]^2+(\mu+\frac{1}{2})^2\varpi^2},$$

donc l'expression de $\varphi\alpha$ prendra la forme réelle:

(153) $\varphi\alpha =$

$$\frac{1}{ee}\cdot\sum_0^\infty{}_m(-1)^m\sum_0^\infty{}_\mu(-1)^\mu\left(\frac{(2\mu+1)\varpi}{[\alpha-(m+\frac{1}{2})\omega]^2+(\mu+\frac{1}{2})^2\varpi^2}-\frac{(2\mu+1)\varpi}{[\alpha+(m+\frac{1}{2})\omega]^2+(\mu+\frac{1}{2})^2\varpi^2}\right),$$

c'est-à-dire qu'on aura

$$(154)\quad \varphi\alpha = \frac{\varpi}{ee}(\delta_0-\delta_1+\delta_2-\delta_3+\cdots+(-1)^m\delta_m\ldots)$$
$$-\frac{\varpi}{ee}(\delta_0'-\delta_1'+\delta_2'-\delta_3'+\cdots+(-1)^m\delta_m'\ldots),$$

où

$$(155)\quad \begin{cases}\delta_m = \dfrac{1}{[\alpha-(m+\frac{1}{2})\omega]^2+\frac{\varpi^2}{4}}-\dfrac{3}{[\alpha-(m+\frac{1}{2})\omega]^2+\frac{9\varpi^2}{4}}+\dfrac{5}{[\alpha-(m+\frac{1}{2})\omega]^2+\frac{25\varpi^2}{4}}-\cdots,\\[2ex] \delta_m' = \dfrac{1}{[\alpha+(m+\frac{1}{2})\omega]^2+\frac{\varpi^2}{4}}-\dfrac{3}{[\alpha+(m+\frac{1}{2})\omega]^2+\frac{9\varpi^2}{4}}+\dfrac{5}{[\alpha+(m+\frac{1}{2})\omega]^2+\frac{25\varpi^2}{4}}-\cdots.\end{cases}$$

Si l'on commence la recherche de la limite de la fonction $\sum_0^{n-1}{}_m\sum_0^{n-1}{}_\mu(-1)^{m+\mu}\psi(m,\mu)$ par celle de $\sum_0^{n-1}(-1)^m\psi(m,\mu)$ au lieu de celle de $\sum_0^{n-1}(-1)^\mu\psi(m,\mu)$, comme nous l'avons fait, on trouvera, au lieu de la formule (153), la suivante

(156) $\varphi\alpha =$

$$\frac{1}{ee}\cdot\sum_0^\infty{}_\mu(-1)^\mu\sum_0^\infty{}_m(-1)^m\left(\frac{(2\mu+1)\varpi}{[\alpha-(m+\frac{1}{2})\omega]^2+(\mu+\frac{1}{2})^2\varpi^2}-\frac{(2\mu+1)\varpi}{[\alpha+(m+\frac{1}{2})\omega]^2+(\mu+\frac{1}{2})^2\varpi^2}\right),$$

c'est-à-dire

$$(157)\quad \varphi\alpha = \frac{\varpi}{ee}(\varepsilon_0-3\varepsilon_1+5\varepsilon_2-7\varepsilon_3+\cdots+(-1)^\mu(2\mu+1)\varepsilon_\mu+\ldots)$$
$$-\frac{\varpi}{ee}(\varepsilon_0'-3\varepsilon_1'+5\varepsilon_2'-7\varepsilon_3'+\cdots+(-1)^\mu(2\mu+1)\varepsilon_\mu'+\ldots),$$

où

$$(158)\quad \begin{cases}\varepsilon_\mu = \dfrac{1}{\left(\alpha-\frac{\omega}{2}\right)^2+(\mu+\frac{1}{2})^2\varpi^2}-\dfrac{1}{\left(\alpha-\frac{3\omega}{2}\right)^2+(\mu+\frac{1}{2})^2\varpi^2}+\dfrac{1}{\left(\alpha-\frac{5\omega}{2}\right)^2+(\mu+\frac{1}{2})^2\varpi^2}-\cdots,\\[2ex] \varepsilon_\mu' = \dfrac{1}{\left(\alpha+\frac{\omega}{2}\right)^2+(\mu+\frac{1}{2})^2\varpi^2}-\dfrac{1}{\left(\alpha+\frac{3\omega}{2}\right)^2+(\mu+\frac{1}{2})^2\varpi^2}+\dfrac{1}{\left(\alpha+\frac{5\omega}{2}\right)^2+(\mu+\frac{1}{2})^2\varpi^2}-\cdots.\end{cases}$$

27.

Cherchons maintenant l'expression de $f\alpha$ au moyen de la deuxième des formules (126). En vertu de l'équation (131) le second membre prend la forme suivante:

$$\frac{(-1)^n}{2n+1} f\beta + \frac{(-1)^n}{2n+1} \sum_1^n {}_m (-1)^m \left[f\left(\beta + \frac{m\omega}{2n+1}\right) + f\left(\beta - \frac{m\omega}{2n+1}\right)\right]$$
$$+ \frac{(-1)^n}{2n+1} \sum_1^n {}_\mu \left[f\left(\beta + \frac{\mu\varpi i}{2n+1}\right) + f\left(\beta - \frac{\mu\varpi i}{2n+1}\right)\right]$$
$$+ \frac{(-1)^n}{2n+1} \sum_1^n {}_m \sum_1^n {}_\mu (-1)^m \left[f\left(\beta + \frac{m\omega + \mu\varpi i}{2n+1}\right) + f\left(\beta - \frac{m\omega + \mu\varpi i}{2n+1}\right)\right]$$
$$+ \frac{(-1)^n}{2n+1} \sum_1^n {}_m \sum_1^n {}_\mu (-1)^m \left[f\left(\beta + \frac{m\omega - \mu\varpi i}{2n+1}\right) + f\left(\beta - \frac{m\omega - \mu\varpi i}{2n+1}\right)\right].$$

En y faisant $\beta = \frac{\alpha}{2n+1}$, et en remarquant qu'alors la limite des quantités contenues dans les deux premières lignes devient égale à zéro, on aura

(159) $$f\alpha = \lim. (-1)^n \sum_1^n {}_m \sum_1^n {}_\mu (-1)^m . \psi(n-m,\ n-\mu)$$
$$+ \lim. (-1)^n \sum_1^n {}_m \sum_1^n {}_\mu (-1)^m . \psi_1(n-m,\ n-\mu),$$

où l'on a fait, pour abréger,

$$\psi(n-m,\ n-\mu) = \frac{1}{2n+1}\left[f\left(\frac{\alpha + m\omega + \mu\varpi i}{2n+1}\right) + f\left(\frac{\alpha - m\omega - \mu\varpi i}{2n+1}\right)\right],$$
$$\psi_1(n-m,\ n-\mu) = \frac{1}{2n+1}\left[f\left(\frac{\alpha + m\omega - \mu\varpi i}{2n+1}\right) + f\left(\frac{\alpha - m\omega + \mu\varpi i}{2n+1}\right)\right].$$

Maintenant on a

$$f(\beta+\varepsilon) + f(\beta-\varepsilon) = \frac{2 f\beta . f\varepsilon}{1 + e^2c^2\varphi^2\varepsilon . \varphi^2\beta} = \frac{f\varepsilon}{e^2c^2\varphi^2\varepsilon} . \frac{2 f\beta}{\varphi^2\beta + \frac{1}{e^2c^2\varphi^2\varepsilon}}.$$

Soit

$$\varepsilon = \frac{m\omega + \mu\varpi i}{2n+1},$$

on aura

$$\frac{1}{\varphi\varepsilon} = - iec . \varphi\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\varpi}{2} i - \varepsilon\right) = - iec . \varphi\left(\frac{(n-m+\frac{1}{2})\omega + (n-\mu+\frac{1}{2})\varpi i}{2n+1}\right),$$

$$\frac{f\varepsilon}{\varphi\varepsilon} = -\frac{i\sqrt{e^2+c^2}}{F\left(\varepsilon - \frac{\tilde\omega}{2} i\right)} = -i\sqrt{e^2+c^2} \cdot \frac{c}{\sqrt{e^2+c^2}} \cdot F\left(\varepsilon - \frac{\omega}{2} - \frac{\tilde\omega}{2} i\right)$$
$$= -ci \cdot F\left(\frac{(n-m+\frac{1}{2})\omega + (n-\mu+\frac{1}{2})\tilde\omega i}{2n+1}\right).$$

Donc on aura, en substituant et en mettant m et μ respectivement au lieu de $n-m$ et $n-\mu$,

$$\psi(m,\mu) = -\frac{1}{e} \cdot \frac{2\varphi\left(\frac{(m+\frac{1}{2})\omega + (\mu+\frac{1}{2})\tilde\omega i}{2n+1}\right) \cdot F\left(\frac{(m+\frac{1}{2})\omega + (\mu+\frac{1}{2})\tilde\omega i}{2n+1}\right) \cdot f\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)}{(2n+1)\left[\varphi^2\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right) - \varphi^2\left(\frac{(m+\frac{1}{2})\omega + (\mu+\frac{1}{2})\tilde\omega i}{2n+1}\right)\right]}.$$

On aura la valeur de $\psi_1(m,\mu)$, en changeant seulement le signe de i. En faisant maintenant

$$\theta(m,\mu) = -\frac{(2m+1)\omega + (2\mu+1)\tilde\omega i}{\alpha^2 - [(m+\frac{1}{2})\omega + (\mu+\frac{1}{2})\tilde\omega i]^2}$$

et

$$\theta_1(m,\mu) = -\frac{(2m+1)\omega - (2\mu+1)\tilde\omega i}{\alpha^2 - [(m+\frac{1}{2})\omega - (\mu+\frac{1}{2})\tilde\omega i]^2},$$

et en cherchant ensuite la limite de la fonction

$$\sum_0^{n-1}{}_m \sum_0^{n-1}{}_\mu (-1)^m \cdot \psi(m,\mu),$$

de la même manière que précédemment, on trouvera

$$\lim. \sum_0^{n-1}{}_m \sum_0^{n-1}{}_\mu (-1)^m \cdot \psi(m,\mu) = \frac{1}{e} \cdot \sum_0^{\infty}{}_\mu \left(\sum_0^{\infty}{}_m (-1)^m \cdot \theta(m,\mu)\right)$$

et

$$\lim. \sum_0^{n-1}{}_m \sum_0^{n-1}{}_\mu (-1)^m \cdot \psi_1(m,\mu) = \frac{1}{e} \cdot \sum_0^{\infty}{}_\mu \left(\sum_0^{\infty}{}_m (-1)^m \cdot \theta_1(m,\mu)\right);$$

donc en substituant dans (159), et en remettant les valeurs de $\theta(m,\mu)$ et $\theta_1(m,\mu)$, on a

(160) $f\alpha =$

$$-\frac{1}{e} \cdot \sum_0^{\infty}{}_\mu \sum_0^{\infty}{}_m (-1)^m \left(\frac{(2m+1)\omega + (2\mu+1)\tilde\omega i}{\alpha^2 - [(m+\frac{1}{2})\omega + (\mu+\frac{1}{2})\tilde\omega i]^2} + \frac{(2m+1)\omega - (2\mu+1)\tilde\omega i}{\alpha^2 - [(m+\frac{1}{2})\omega - (\mu+\frac{1}{2})\tilde\omega i]^2}\right).$$

La quantité renfermée entre les crochets peut aussi se mettre sous la forme

$$\frac{2[\alpha - (m+\frac{1}{2})\omega]}{[\alpha - (m+\frac{1}{2})\omega]^2 + (\mu+\frac{1}{2})^2\tilde\omega^2} - \frac{2[\alpha + (m+\frac{1}{2})\omega]}{[\alpha + (m+\frac{1}{2})\omega]^2 + (\mu+\frac{1}{2})^2\tilde\omega^2},$$

donc on a aussi

(161) $fa =$

$$\frac{1}{e}\cdot\Sigma_0^{\infty}{}_{\mu}\left(\Sigma_0^{\infty}{}_{m}(-1)^m\frac{2[\alpha+(m+\frac{1}{2})\omega]}{[\alpha+(m+\frac{1}{2})\omega]^2+(\mu+\frac{1}{2})^2\varpi^2}-\Sigma_0^{\infty}{}_{m}(-1)^m\cdot\frac{2[\alpha-(m+\frac{1}{2})\omega]}{[\alpha-(m+\frac{1}{2})\omega]^2+(\mu+\frac{1}{2})^2\varpi^2}\right).$$

On aura de la même manière

(162) $F\alpha =$

$$\frac{1}{c}\cdot\Sigma_0^{\infty}{}_{m}\left(\Sigma_0^{\infty}{}_{\mu}(-1)^{\mu}\cdot\frac{(2\mu+1)\varpi}{[\alpha-(m+\frac{1}{2})\omega]^2+(\mu+\frac{1}{2})^2\varpi^2}+\Sigma_0^{\infty}{}_{\mu}(-1)^{\mu}\cdot\frac{(2\mu+1)\varpi}{[\alpha+(m+\frac{1}{2})\omega]^2+(\mu+\frac{1}{2})^2\varpi^2}\right).$$

28.

Venons maintenant aux formules (130). Pour trouver la valeur du second membre, après avoir fait $\beta = \frac{\alpha}{2n+1}$, et supposé n infini, nous allons d'abord chercher la limite de l'expression suivante:

$$(163)\qquad t = \Pi_1^n{}_m\,\Pi_1^n{}_\mu\,\frac{1-\dfrac{\varphi^2\left[\frac{\alpha}{2n+1}\right]}{\varphi^2\left[\frac{m\omega+\mu\varpi i+k}{2n+1}\right]}}{1-\dfrac{\varphi^2\left[\frac{\alpha}{2n+1}\right]}{\varphi^2\left[\frac{m\omega+\mu\varpi i+l}{2n+1}\right]}},$$

où k et l sont deux quantités indépendantes de n, m, μ.

En prenant le logarithme, et en faisant pour abréger

$$(164)\qquad \psi(m,\mu) = \log\frac{1-\dfrac{\varphi^2\left[\frac{\alpha}{2n+1}\right]}{\varphi^2\left[\frac{m\omega+\mu\varpi i+k}{2n+1}\right]}}{1-\dfrac{\varphi^2\left[\frac{\alpha}{2n+1}\right]}{\varphi^2\left[\frac{m\omega+\mu\varpi i+l}{2n+1}\right]}},$$

on aura

$$(165)\qquad \log t = \Sigma_1^n{}_m\,\Sigma_1^n{}_\mu\,\psi(m,\mu).$$

Considérons d'abord l'expression $\Sigma_1^n{}_\mu\,\psi(m,\mu)$. Soit

(166) $$\theta(m,\mu) = \log \frac{1 - \frac{\alpha^2}{(m\omega + \mu\varpi i + k)^2}}{1 - \frac{\alpha^2}{(m\omega + \mu\varpi i + l)^2}},$$

on aura

$$\psi(m,\mu) - \theta(m,\mu) = \log \left\{ \frac{1 - \frac{\varphi^2\left[\frac{\alpha}{2n+1}\right]}{\varphi^2\left[\frac{m\omega+\mu\varpi i+k}{2n+1}\right]}}{1 - \frac{\alpha^2}{(m\omega+\mu\varpi i+k)^2}} \cdot \frac{1 - \frac{\alpha^2}{(m\omega+\mu\varpi i+l)^2}}{1 - \frac{\varphi^2\left[\frac{\alpha}{2n+1}\right]}{\varphi^2\left[\frac{m\omega+\mu\varpi i+l}{2n+1}\right]}} \right\}.$$

Cela posé, je dis que le second membre de cette équation est pour toute valeur de m et μ de la forme

$$\psi(m,\mu) - \theta(m,\mu) = \frac{v}{(2n+1)^2}.$$

Pour le démontrer, il faut distinguer deux cas, suivant que la limite de $\frac{m\omega + \mu\varpi i}{2n+1}$ est une quantité différente de zéro, ou égale à zéro.

a) Dans le premier cas on aura, en nommant a la limite dont il s'agit,

$$\varphi^2\left(\frac{m\omega + \mu\varpi i + k}{2n+1}\right) = \varphi^2 a + v,$$

$$\varphi^2\left(\frac{m\omega + \mu\varpi i + l}{2n+1}\right) = \varphi^2 a + v',$$

$$\varphi^2\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right) = \frac{\alpha^2}{(2n+1)^2} + \frac{v''}{(2n+1)^2},$$

donc

$$1 - \frac{\varphi^2\left[\frac{\alpha}{2n+1}\right]}{\varphi^2\left[\frac{m\omega+\mu\varpi i+k}{2n+1}\right]} = 1 - \frac{\alpha^2}{(2n+1)^2\varphi^2 a} + \frac{v}{(2n+1)^2},$$

$$1 - \frac{\varphi^2\left[\frac{\alpha}{2n+1}\right]}{\varphi^2\left[\frac{m\omega+\mu\varpi i+l}{2n+1}\right]} = 1 - \frac{\alpha^2}{(2n+1)^2\varphi^2 a} + \frac{v'}{(2n+1)^2}.$$

On a de même

$$1 - \frac{\alpha^2}{(m\omega+\mu\varpi i+k)^2} = 1 - \frac{\alpha^2}{(2n+1)^2\left[\frac{m\omega+\mu\varpi i+k}{2n+1}\right]^2} = 1 - \frac{\alpha^2}{(2n+1)^2 a^2} + \frac{v}{(2n+1)^2},$$

$$1 - \frac{\alpha^2}{(m\omega+\mu\varpi i+l)^2} = 1 - \frac{\alpha^2}{(2n+1)^2 a^2} + \frac{v'}{(2n+1)^2}.$$

En substituant ces valeurs, l'expression de $\psi(m,\mu)-\theta(m,\mu)$ prendra la forme:

$$\psi(m,\mu)-\theta(m,\mu)=\log\left\{\frac{1-\frac{v}{(2n+1)^2}}{1-\frac{v'}{(2n+1)^2}}\cdot\frac{1-\frac{v_1}{(2n+1)^2}}{1-\frac{v_1'}{(2n+1)^2}}\right\},$$

les quantités v, v', v_1, v_1' ayant toutes zéro pour limite. On a

$$\log\left(1-\frac{v}{(2n+1)^2}\right)=\frac{v}{(2n+1)^2}\text{ etc.};$$

par conséquent

$$\psi(m,\mu)-\theta(m,\mu)=\frac{v}{(2n+1)^2}.$$

b) Si la limite de la quantité $\frac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}$ est égale à zéro, on aura

$$\varphi^2\left(\frac{m\omega+\mu\varpi i+k}{2n+1}\right)=\frac{(m\omega+\mu\varpi i+k)^2}{(2n+1)^2}+A.\frac{(m\omega+\mu\varpi i+k)^4}{(2n+1)^4},$$

$$\varphi^2\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)=\frac{\alpha^2}{(2n+1)^2}+A'.\frac{\alpha^4}{(2n+1)^4},$$

donc

$$1-\frac{\varphi^2\left[\frac{\alpha}{2n+1}\right]}{\varphi^2\left[\frac{m\omega+\mu\varpi i+k}{2n+1}\right]}=1-\frac{\alpha^2+A'\frac{\alpha^4}{(2n+1)^2}}{(m\omega+\mu\varpi i+k)^2+A\frac{(m\omega+\mu\varpi i+k)^4}{(2n+1)^2}}.$$

Si maintenant $m\omega+\mu\varpi i$ ne va pas en augmentant indéfiniment avec n, on aura

$$1-\frac{\varphi^2\left[\frac{\alpha}{2n+1}\right]}{\varphi^2\left[\frac{m\omega+\mu\varpi i+k}{2n+1}\right]}=1-\frac{\alpha^2}{(m\omega+\mu\varpi i+k)^2}+\frac{B}{(2n+1)^2};$$

de même

$$1-\frac{\varphi^2\left[\frac{\alpha}{2n+1}\right]}{\varphi^2\left[\frac{m\omega+\mu\varpi i+l}{2n+1}\right]}=1-\frac{\alpha^2}{(m\omega+\mu\varpi i+l)^2}+\frac{C}{(2n+1)^2};$$

donc dans ce cas

$$\psi(m,\mu)-\theta(m,\mu)=\log\frac{1-\frac{B'}{(2n+1)^2}}{1-\frac{C'}{(2n+1)^2}},$$

B' et C' ayant des limites finies, ou bien

$$\psi(m,\mu)-\theta(m,\mu)=\frac{D}{(2n+1)^2},$$

la limite de D étant également une quantité finie.

Si au contraire la quantité $m\omega+\mu\varpi i$ augmente indéfiniment avec n, on a

$$\frac{1-\dfrac{\varphi^2\left[\dfrac{\alpha}{2n+1}\right]}{\varphi^2\left[\dfrac{m\omega+\mu\varpi i+k}{2n+1}\right]}}{1-\dfrac{\alpha^2}{(m\omega+\mu\varpi i+k)^2}}=1+\frac{\alpha^2}{(2n+1)^2}\cdot\frac{A-A'\dfrac{\alpha^2}{(m\omega+\mu\varpi i+k)^2}}{1+A\left[\dfrac{m\omega+\mu\varpi i+k}{2n+1}\right]^2}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{\alpha^2}{(m\omega+\mu\varpi i+k)^2}};$$

or les quantités $\dfrac{1}{m\omega+\mu\varpi i+k}$, $\dfrac{m\omega+\mu\varpi i+k}{2n+1}$ ont zéro pour limite; donc la quantité précédente sera de la forme

$$1+\frac{\alpha^2}{(2n+1)^2}\cdot A'',$$

A'' ayant une quantité finie pour limite. En changeant k en l, et désignant la valeur correspondante de A'' par A_1'', la valeur de $\psi(m,\mu)-\theta(m,\mu)$ deviendra

$$\psi(m,\mu)-\theta(m,\mu)=\log\frac{1+\dfrac{\alpha^2}{(2n+1)^2}A''}{1+\dfrac{\alpha^2}{(2n+1)^2}A_1''}=\frac{\alpha^2(A''-A_1'')}{(2n+1)^2}+\frac{v}{(2n+1)^2}.$$

Maintenant la limite de A'' est la même que celle de A; or il est clair que cette dernière limite est indépendante de k, m, μ (elle est en effet égale au coefficient de α^4 dans le développement de $\varphi^2\alpha$). Donc on aura

$$A''=M+v,$$

et en changeant k en l,

$$A_1''=M+v',$$

d'où $A''-A_1''=v-v'=v$. Donc $A''-A_1''$ a zéro pour limite, et par conséquent on a

$$\psi(m,\mu)-\theta(m,\mu)=\frac{v}{(2n+1)^2}.$$

Donc nous avons démontré, qu'en faisant

(167) $$\psi(m,\mu)-\theta(m,\mu)=\frac{A_{m,\mu}}{(2n+1)^2},$$

la limite de $A_{m,\mu}$ sera égale à zéro toutes les fois que $m\omega + \mu\varpi i$ augmente indéfiniment avec n, et qu'elle sera égale à une quantité finie dans le cas contraire.

29.

Cela posé, considérons la quantité $\sum_1^n{}_\mu \psi(m,\mu)$. En substituant la valeur de $\psi(m,\mu)$, il viendra:

$$(168) \qquad \sum_1^n{}_\mu \psi(m,\mu) = \sum_1^n{}_\mu \theta(m,\mu) + \frac{1}{(2n+1)^2} \cdot \sum_1^n{}_\mu A_{m,\mu}.$$

Soit ν le plus grand nombre entier contenu dans $\sqrt{n}$, on peut faire

$$\sum_1^n{}_\mu A_{m,\mu} = A_{m,1} + A_{m,2} + \cdots + A_{m,\nu} \\ + A_{m,\nu+1} + A_{m,\nu+2} + \cdots + A_{m,n}.$$

Or, d'après la nature des quantités $A_{m,\mu}$, la somme contenue dans la première ligne sera égale à $\nu . A_m$, et la seconde égale à $A_m'(n-\nu)$, où A_m est une quantité finie et A_m' une quantité qui a zéro pour limite, donc

$$\sum_1^n{}_\mu A_{m,\mu} = \nu A_m + (n-\nu) A_m' = (2n+1) B_m,$$

où

$$B_m = \frac{\nu}{2n+1} A_m + \frac{n-\nu}{2n+1} A_m'.$$

Donc la quantité B_m a zéro pour limite, ν ne surpassant pas $\sqrt{n}$. Par là l'expression de $\sum_1^n{}_\mu \psi(m,\mu)$ se change en

$$(169) \qquad \sum_1^n{}_\mu \psi(m,\mu) = \sum_1^n{}_\mu \theta(m,\mu) + \frac{B_m}{2n+1}.$$

Pour avoir la limite de $\sum_1^n{}_\mu \theta(m,\mu)$, j'écris

$$\sum_1^n{}_\mu \theta(m,\mu) = \sum_1^\infty{}_\mu \theta(m,\mu) - \sum_{n+1}^\infty{}_\mu \theta(m,\mu) = \sum_1^\infty{}_\mu \theta(m,\mu) - \sum_1^\infty{}_\mu \theta(m,\mu+n).$$

Or on peut trouver la valeur de $\sum_1^\infty{}_\mu \theta(m,\mu+n)$ comme il suit. On a

$$\theta(m, \mu+n) = \log \frac{1 - \frac{\alpha^2}{[m\omega + (\mu+n)\varpi i + k]^2}}{1 - \frac{\alpha^2}{[m\omega + (\mu+n)\varpi i + l]^2}}$$

$$= \alpha^2 \left(\frac{1}{[m\omega + (\mu+n)\varpi i + l]^2} - \frac{1}{[m\omega + (\mu+n)\varpi i + k]^2} \right)$$

$$+ \tfrac{1}{2} \alpha^4 \left(\frac{1}{[m\omega + (\mu+n)\varpi i + l]^4} - \frac{1}{[m\omega + (\mu+n)\varpi i + k]^4} \right) + \cdots$$

De là on tire

$$\overset{\mu}{\underset{1}{\Sigma}}_\mu \theta(m, \mu+n) = \frac{\alpha^2}{n} \cdot \Sigma \frac{1}{n} \theta\left(\frac{\mu}{n}\right) + \frac{\alpha^4}{2n^3} \cdot \Sigma \frac{1}{n} \theta_1\left(\frac{\mu}{n}\right) + \cdots,$$

où

$$\theta\left(\frac{\mu}{n}\right) = \frac{1}{\left[\frac{m\omega + l}{n} + \varpi i + \frac{\mu}{n}\varpi i\right]^2} - \frac{1}{\left[\frac{m\omega + k}{n} + \varpi i + \frac{\mu}{n}\varpi i\right]^2},$$

$$\theta_1\left(\frac{\mu}{n}\right) = \frac{1}{\left[\frac{m\omega + l}{n} + \varpi i + \frac{\mu}{n}\varpi i\right]^4} - \frac{1}{\left[\frac{m\omega + k}{n} + \varpi i + \frac{\mu}{n}\varpi i\right]^4}, \text{ etc.}$$

Or on sait que la limite de $\overset{\mu}{\underset{1}{\Sigma}}_\mu \frac{1}{n} \theta\left(\frac{\mu}{n}\right)$ est égale à $\int_0^x \theta x . dx$, donc

$$\overset{\mu}{\underset{1}{\Sigma}}_\mu \frac{1}{n} \theta\left(\frac{\mu}{n}\right) = \int_0^x \theta x . dx + r,$$

$$\overset{\mu}{\underset{1}{\Sigma}}_\mu \frac{1}{n} \theta_1\left(\frac{\mu}{n}\right) = \int_0^x \theta_1 x . dx + r_1, \text{ etc.},$$

et par conséquent en substituant

$$\overset{\mu}{\underset{1}{\Sigma}}_\mu \theta(m, \mu+n) = \frac{\alpha^2}{n} \cdot \int_0^x \theta x . dx + \frac{\alpha^4}{2n^3} \cdot \int_0^x \theta_1 x . dx + \cdots + \frac{r\alpha^2}{n} + \frac{r_1 \alpha^4}{2n^3} + \cdots;$$

or

$$\theta x = \frac{1}{\left[\frac{m\omega + l}{n} + \varpi i + x\varpi i\right]^2} - \frac{1}{\left[\frac{m\omega + k}{n} + \varpi i + x\varpi i\right]^2}, \text{ etc.}$$

donc on aura

$$\int_0^x \theta x . dx =$$

$$\frac{1}{\varpi i} \cdot \left\{ \frac{1}{\left[\frac{m\omega + k}{n} + \varpi i + x\varpi i\right]} - \frac{1}{\left[\frac{m\omega + l}{n} + \varpi i + x\varpi i\right]} \right\} - \frac{1}{\varpi i} \cdot \left\{ \frac{1}{\left[\frac{m\omega + k}{n} + \varpi i\right]} - \frac{1}{\left[\frac{m\omega + l}{n} + \varpi i\right]} \right\}$$

$$= \frac{1}{\varpi i} \frac{l-k}{n} \frac{1}{\left[\frac{m\omega + l}{n} + \varpi i + x\varpi i\right]\left[\frac{m\omega + k}{n} + \varpi i + x\varpi i\right]} - \frac{1}{\varpi i} \frac{l-k}{n} \frac{1}{\left[\frac{m\omega + l}{n} + \varpi i\right]\left[\frac{m\omega + k}{n} + \varpi i\right]}.$$

La limite de cette expression de $\int_0^x \theta x \,.\, dx$ est zéro pour une valeur quelconque de x. De même on trouvera que la limite de $\int_0^x \theta_1 x \,.\, dx$ est zéro, donc

$$\sum_1^{\mu}{}_{\mu}\, \theta(m, \mu+n) = \frac{\alpha^2}{n} v + \frac{\alpha^4}{2n^3} v' + \frac{\alpha^6}{3n^5} v'' + \cdots$$

$$= \frac{\alpha^2}{2n+1} \cdot \left(v + \frac{\alpha^2}{2n^2} v' + \frac{\alpha^4}{3n^4} v'' + \cdots\right) \frac{2n+1}{n} = \frac{v}{2n+1},$$

donc aussi, en faisant $\mu = \infty$,

$$\sum_1^{\infty}{}_{\mu}\, \theta(m, \mu+n) = \frac{v}{2n+1},$$

d'où

$$\sum_1^{n}{}_{\mu}\, \theta(m, \mu) = \sum_1^{\infty}{}_{\mu}\, \theta(m, \mu) - \frac{v}{2n+1},$$

et

(170) $$\sum_1^{n}{}_{\mu}\, \psi(m, \mu) = \sum_1^{\infty}{}_{\mu}\, \theta(m, \mu) + \frac{v_m}{2n+1},$$

v_m ayant zéro pour limite. De là on tire

$$\sum_1^{n}{}_{m} \sum_1^{n}{}_{\mu}\, \psi(m, \mu) = \sum_1^{n}{}_{m} \left(\sum_1^{\infty}{}_{\mu}\, \theta(m, \mu)\right) + \sum_1^{n} \frac{v_m}{2n+1}.$$

En prenant la limite des deux membres et remarquant que

$$\sum_1^{n} \frac{v_m}{2n+1} = \frac{v_1 + v_2 + \cdots + v_n}{2n+1} = v,$$

on aura

(171) $$\lim. \sum_1^{n}{}_{m} \sum_1^{n}{}_{\mu}\, \psi(m, \mu) = \sum_1^{\infty}{}_{m} \left(\sum_1^{\infty}{}_{\mu}\, \theta(m, \mu)\right).$$

En remettant les valeurs de $\psi(m, \mu)$ et $\theta(m, \mu)$, et passant des logarithmes aux nombres, on en tire

(172) $$\lim. \prod_1^{n}{}_{m} \prod_1^{n}{}_{\mu} \frac{1 - \dfrac{\varphi^2\left[\dfrac{\alpha}{2n+1}\right]}{\varphi^2\left[\dfrac{m\omega + \mu\varpi i + k}{2n+1}\right]}}{1 - \dfrac{\varphi^2\left[\dfrac{\alpha}{2n+1}\right]}{\varphi^2\left[\dfrac{m\omega + \mu\varpi i + l}{2n+1}\right]}} = \prod_1^{\infty}{}_{m} \left\{\prod_1^{\infty}{}_{\mu} \frac{1 - \dfrac{\alpha^2}{(m\omega + \mu\varpi i + k)^2}}{1 - \dfrac{\alpha^2}{(m\omega + \mu\varpi i + l)^2}}\right\}.$$

Par une analyse toute semblable à la précédente, mais plus simple, on trouvera de même

$$(173)\qquad \lim.\ \overset{n}{\underset{1}{\Pi_m}} \frac{1-\dfrac{\varphi^2\left[\dfrac{\alpha}{2n+1}\right]}{\varphi^2\left[\dfrac{m\omega+k}{2n+1}\right]}}{1-\dfrac{\varphi^2\left[\dfrac{\alpha}{2n+1}\right]}{\varphi^2\left[\dfrac{m\omega+l}{2n+1}\right]}} = \overset{\infty}{\underset{1}{\Pi_m}} \frac{1-\dfrac{\alpha^2}{(m\omega+k)^2}}{1-\dfrac{\alpha^2}{(m\omega+l)^2}},$$

$$(174)\qquad \lim.\ \overset{n}{\underset{1}{\Pi_\mu}} \frac{1-\dfrac{\varphi^2\left[\dfrac{\alpha}{2n+1}\right]}{\varphi^2\left[\dfrac{\mu\varpi i+k}{2n+1}\right]}}{1-\dfrac{\varphi^2\left[\dfrac{\alpha}{2n+1}\right]}{\varphi^2\left[\dfrac{\mu\varpi i+l}{2n+1}\right]}} = \overset{\infty}{\underset{1}{\Pi_\mu}} \frac{1-\dfrac{\alpha^2}{(\mu\varpi i+k)^2}}{1-\dfrac{\alpha^2}{(\mu\varpi i+l)^2}}.$$

30.

Maintenant rien n'est plus facile que de trouver les valeurs de $\varphi\alpha$, $f\alpha$, $F\alpha$. Considérons d'abord la première formule (130). On a

$$e^2c^2\varphi^2\left(\frac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right) = -\frac{1}{\varphi^2\left[\dfrac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}-\dfrac{\omega}{2}-\dfrac{\varpi}{2}i\right]} = -\frac{1}{\varphi^2\left[\dfrac{(n-m+\frac{1}{2})\omega+(n-\mu+\frac{1}{2})\varpi i}{2n+1}\right]},$$

donc

$$\overset{n}{\underset{1}{\Pi_m}}\overset{n}{\underset{1}{\Pi_\mu}} \frac{1-\dfrac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left[\dfrac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right]}}{1+e^2c^2\varphi^2\left[\dfrac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right]\varphi^2\beta} = \frac{\overset{n}{\underset{1}{\Pi_m}}\overset{n}{\underset{1}{\Pi_\mu}}\left\{1-\dfrac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left[\dfrac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right]}\right\}}{\overset{n}{\underset{1}{\Pi_m}}\overset{n}{\underset{1}{\Pi_\mu}}\left\{1-\dfrac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left[\dfrac{(n-m+\frac{1}{2})\omega+(n-\mu+\frac{1}{2})\varpi i}{2n+1}\right]}\right\}}$$

$$= \overset{n}{\underset{1}{\Pi_m}}\overset{n}{\underset{1}{\Pi_\mu}} \frac{1-\dfrac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left[\dfrac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right]}}{1-\dfrac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left\{\dfrac{\left[m\omega+\mu\varpi i-\dfrac{\omega}{2}-\dfrac{\varpi}{2}i\right]}{2n+1}\right\}}}.$$

Cela posé, si l'on fait $\beta=\dfrac{\alpha}{2n+1}$ et qu'on suppose n infini, il viendra,

en faisant usage des formules (172), (173), (174), et en remarquant que la limite de $(2n+1)\varphi\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)$ est égale à α,

$$(175)\quad \varphi\alpha = \alpha \prod_1^\infty{}_m \left(1 - \frac{\alpha^2}{(m\omega)^2}\right) \cdot \prod_1^\infty{}_\mu \left(1 + \frac{\alpha^2}{(\mu\varpi)^2}\right)$$
$$\times \prod_1^\infty{}_m \left\{ \prod_1^\infty{}_\mu \frac{1 - \frac{\alpha^2}{(m\omega + \mu\varpi i)^2}}{1 - \frac{\alpha^2}{[(m-\frac{1}{2})\omega + (\mu-\frac{1}{2})\varpi i]^2}} \cdot \prod_1^\infty{}_\mu \frac{1 - \frac{\alpha^2}{(m\omega - \mu\varpi i)^2}}{1 - \frac{\alpha^2}{[(m-\frac{1}{2})\omega - (\mu-\frac{1}{2})\varpi i]^2}} \right\}.$$

Les deux formules (130′) donneront de la même manière, en faisant $\beta = \frac{\alpha}{2n+1}$, et remarquant que $f(0) = 1$, $F(0) = 1$,

$$(176)\quad f\alpha =$$
$$\prod_1^\infty{}_m \left(1 - \frac{\alpha^2}{(m-\frac{1}{2})^2\omega^2}\right) \cdot \prod_1^\infty{}_m \left\{ \prod_1^\infty{}_\mu \frac{1 - \frac{\alpha^2}{[(m-\frac{1}{2})\omega + \mu\varpi i]^2}}{1 - \frac{\alpha^2}{[(m-\frac{1}{2})\omega + (\mu-\frac{1}{2})\varpi i]^2}} \cdot \frac{1 - \frac{\alpha^2}{[(m-\frac{1}{2})\omega - \mu\varpi i]^2}}{1 - \frac{\alpha^2}{[(m-\frac{1}{2})\omega - (\mu-\frac{1}{2})\varpi i]^2}} \right\},$$

$$(177)\quad F\alpha =$$
$$\prod_1^\infty{}_\mu \left(1 + \frac{\alpha^2}{(\mu-\frac{1}{2})^2\varpi^2}\right) \cdot \prod_1^\infty{}_m \left\{ \prod_1^\infty{}_\mu \frac{1 - \frac{\alpha^2}{[m\omega + (\mu-\frac{1}{2})\varpi i]^2}}{1 - \frac{\alpha^2}{[(m-\frac{1}{2})\omega + (\mu-\frac{1}{2})\varpi i]^2}} \cdot \frac{1 - \frac{\alpha^2}{[m\omega + (\mu-\frac{1}{2})\varpi i]^2}}{1 - \frac{\alpha^2}{[(m-\frac{1}{2})\omega - (\mu-\frac{1}{2})\varpi i]^2}} \right\}.$$

On peut aussi donner une forme réelle aux expressions précédentes comme il suit,

$$(178)\quad \varphi\alpha = \alpha \,.\, \prod_1^\infty{}_\mu \left(1 + \frac{\alpha^2}{\mu^2\varpi^2}\right) \cdot \prod_1^\infty{}_m \left(1 - \frac{\alpha^2}{m^2\omega^2}\right)$$
$$\times \prod_1^\infty{}_m \prod_1^\infty{}_\mu \frac{1 + \frac{(\alpha + m\omega)^2}{\mu^2\varpi^2}}{1 + \frac{[\alpha + (m-\frac{1}{2})\omega]^2}{(\mu-\frac{1}{2})^2\varpi^2}} \cdot \frac{1 + \frac{(\alpha - m\omega)^2}{\mu^2\varpi^2}}{1 + \frac{[\alpha - (m-\frac{1}{2})\omega]^2}{(\mu-\frac{1}{2})^2\varpi^2}} \cdot \left\{ \frac{1 + \frac{(m-\frac{1}{2})^2\omega^2}{(\mu-\frac{1}{2})^2\varpi^2}}{1 + \frac{m^2\omega^2}{\mu^2\varpi^2}} \right\}^2,$$

$$(179)\quad f\alpha = \prod_1^\infty{}_m \left(1 - \frac{\alpha^2}{(m-\frac{1}{2})^2\omega^2}\right)$$
$$\times \prod_1^\infty{}_m \prod_1^\infty{}_\mu \frac{1 + \frac{[\alpha + (m-\frac{1}{2})\omega]^2}{\mu^2\varpi^2}}{1 + \frac{[\alpha + (m-\frac{1}{2})\omega]^2}{(\mu-\frac{1}{2})^2\varpi^2}} \cdot \frac{1 + \frac{[\alpha - (m-\frac{1}{2})\omega]^2}{\mu^2\varpi^2}}{1 + \frac{[\alpha - (m-\frac{1}{2})\omega]^2}{(\mu-\frac{1}{2})^2\varpi^2}} \cdot \left\{ \frac{1 + \frac{(m-\frac{1}{2})^2\omega^2}{(\mu-\frac{1}{2})^2\varpi^2}}{1 + \frac{(m-\frac{1}{2})^2\omega^2}{\mu^2\varpi^2}} \right\}^2,$$

$$(180)\quad F\alpha = \prod_1^\infty{}_\mu \left(1 + \frac{\alpha^2}{(\mu-\frac{1}{2})^2\varpi^2}\right)$$
$$\times \prod_1^\infty{}_m \prod_1^\infty{}_\mu \frac{1 + \frac{(\alpha + m\omega)^2}{(\mu-\frac{1}{2})^2\varpi^2}}{1 + \frac{[\alpha + (m-\frac{1}{2})\omega]^2}{(\mu-\frac{1}{2})^2\varpi^2}} \cdot \frac{1 + \frac{(\alpha - m\omega)^2}{(\mu-\frac{1}{2})^2\varpi^2}}{1 + \frac{[\alpha - (m-\frac{1}{2})\omega]^2}{(\mu-\frac{1}{2})^2\varpi^2}} \cdot \left\{ \frac{1 + \frac{(m-\frac{1}{2})^2\omega^2}{(\mu-\frac{1}{2})^2\varpi^2}}{1 + \frac{m^2\omega^2}{(\mu-\frac{1}{2})^2\varpi^2}} \right\}^2.$$

Ces transformations s'opèrent aisément au moyen de la formule

$$\left(1-\frac{\alpha^2}{(a+bi)^2}\right)\left(1-\frac{\alpha^2}{(a-bi)^2}\right)=\left(1+\frac{\alpha}{a+bi}\right)\left(1+\frac{\alpha}{a-bi}\right)\left(1-\frac{\alpha}{a+bi}\right)\left(1-\frac{\alpha}{a-bi}\right)$$

$$=\frac{(\alpha+a)^2+b^2}{a^2+b^2}\cdot\frac{(\alpha-a)^2+b^2}{a^2+b^2}=\left(1+\frac{(\alpha+a)^2}{b^2}\right)\left(1+\frac{(\alpha-a)^2}{b^2}\right)\cdot\frac{1}{\left[1+\frac{a^2}{b^2}\right]^2}.$$

31.

Dans ce qui précède nous sommes parvenus à deux espèces d'expressions des fonctions $\varphi\alpha$, $f\alpha$, $F\alpha$; les unes donnent ces fonctions décomposées en fractions partielles, dont la totalité forme des séries infinies doubles, les autres donnent ces mêmes fonctions décomposées en un nombre infini de facteurs, dont chacun est à son tour composé d'une infinité de facteurs. Or on peut beaucoup simplifier les formules précédentes au moyen des fonctions exponentielles et circulaires. C'est ce que nous allons voir par ce qui suit.

Considérons d'abord les équations (178), (179), (180). En vertu de formules connues, on a

$$\frac{\sin y}{y}=\prod_1^\infty{}_\mu\left(1-\frac{y^2}{\mu^2\pi^2}\right);\quad \cos y=\prod_1^\infty{}_\mu\left(1-\frac{y^2}{(\mu-\frac{1}{2})^2\pi^2}\right);$$

donc

$$\prod_1^\infty{}_\mu\frac{\left[1-\frac{z^2}{\mu^2\pi^2}\right]}{\left[1-\frac{y^2}{(\mu-\frac{1}{2})^2\pi^2}\right]}=\frac{\sin z}{z\cos y};\quad \prod_1^\infty{}_\mu\left\{\frac{1-\frac{z^2}{(\mu-\frac{1}{2})^2\pi^2}}{1-\frac{y^2}{(\mu-\frac{1}{2})^2\pi^2}}\right\}=\frac{\cos z}{\cos y}.$$

En vertu de ces formules il est clair que les expressions de $\varphi\alpha$, $f\alpha$, $F\alpha$ peuvent être mises sous la forme

$$\varphi\alpha=\frac{\tilde{\omega}}{\pi}\,\frac{\sin\left[\alpha\frac{\pi i}{\tilde{\omega}}\right]}{i}\cdot\prod_1^\infty{}_m\left(1-\frac{\alpha^2}{m^2\omega^2}\right)$$

$$\times\prod_1^\infty{}_m\left\{\frac{\sin(\alpha+m\omega)\frac{\pi i}{\tilde{\omega}}\cdot\sin(\alpha-m\omega)\frac{\pi i}{\tilde{\omega}}\cdot\cos^2(m-\frac{1}{2})\omega\frac{\pi i}{\tilde{\omega}}}{\cos\left[\alpha+(m-\frac{1}{2})\omega\right]\frac{\pi i}{\tilde{\omega}}\cdot\cos\left[\alpha-(m-\frac{1}{2})\omega\right]\frac{\pi i}{\tilde{\omega}}\cdot\sin^2 m\omega\frac{\pi i}{\tilde{\omega}}}\cdot\frac{\left[m\omega\frac{\pi i}{\tilde{\omega}}\right]^2}{(\alpha+m\omega)(\alpha-m\omega)\frac{\pi^2 i^2}{\tilde{\omega}^2}}\right\},$$

$$f\alpha=\prod_1^\infty{}_m\left(1-\frac{\alpha^2}{(m-\frac{1}{2})^2\omega^2}\right)$$

$$\times\prod_1^\infty{}_m\left(\operatorname{tang}\left[\alpha+(m-\tfrac{1}{2})\omega\right]\frac{\pi i}{\tilde{\omega}}\cdot\operatorname{tang}\left[\alpha-(m-\tfrac{1}{2})\omega\right]\frac{\pi i}{\tilde{\omega}}\cdot\cot^2(m-\tfrac{1}{2})\omega\frac{\pi i}{\tilde{\omega}}\cdot\frac{(m-\frac{1}{2})^2\omega^2}{\alpha^2-(m-\frac{1}{2})^2\omega^2}\right),$$

$$Fα = \cos α \frac{πi}{\varpi} \cdot \prod_1^\infty{}_m \frac{\cos(α + mω)\frac{πi}{\varpi} \cdot \cos(α - mω)\frac{πi}{\varpi} \cdot \cos^2(m - \frac{1}{2})ω\frac{πi}{\varpi}}{\cos[α + (m - \frac{1}{2})ω]\frac{πi}{\varpi} \cdot \cos[α - (m - \frac{1}{2})ω]\frac{πi}{\varpi} \cdot \cos^2 mω\frac{πi}{\varpi}}.$$

On trouvera des expressions réelles, en substituant au lieu des fonctions circulaires leurs expressions en fonctions exponentielles. On a

$$\sin(a - b) . \sin(a + b) = \sin^2 a - \sin^2 b,$$
$$\cos(a + b) . \cos(a - b) = \cos^2 a - \sin^2 b,$$

donc

$$\frac{\sin(α + mω)\frac{πi}{\varpi} \cdot \sin(α - mω)\frac{πi}{\varpi}}{\sin^2 mω\frac{πi}{\varpi}} = -\left\{1 - \frac{\sin^2 α\frac{πi}{\varpi}}{\sin^2 mω\frac{πi}{\varpi}}\right\},$$

$$\frac{\cos[α + (m - \frac{1}{2})ω]\frac{πi}{\varpi} \cdot \cos[α - (m - \frac{1}{2})ω]\frac{πi}{\varpi}}{\cos^2(m - \frac{1}{2})ω\frac{πi}{\varpi}} = 1 - \frac{\sin^2 α\frac{πi}{\varpi}}{\cos^2(m - \frac{1}{2})ω\frac{πi}{\varpi}},$$

$$\operatorname{tang}[α + (m - \tfrac{1}{2})ω]\frac{πi}{\varpi} \cdot \operatorname{tang}[α - (m - \tfrac{1}{2})ω]\frac{πi}{\varpi} . \cot^2(m - \tfrac{1}{2})ω\frac{πi}{\varpi}$$

$$= -\frac{1 - \dfrac{\sin^2 α\frac{πi}{\varpi}}{\sin^2(m - \frac{1}{2})ω\frac{πi}{\varpi}}}{1 - \dfrac{\sin^2 α\frac{πi}{\varpi}}{\cos^2(m - \frac{1}{2})ω\frac{πi}{\varpi}}}.$$

D'après cela, et en remarquant que

$$\frac{m^2ω^2}{α^2 - m^2ω^2} = -\frac{1}{1 - \frac{α^2}{m^2ω^2}} \quad \text{et} \quad \frac{(m - \frac{1}{2})^2ω^2}{α^2 - (m - \frac{1}{2})^2ω^2} = -\frac{1}{1 - \frac{α^2}{(m - \frac{1}{2})^2ω^2}},$$

il est clair qu'on aura

(181) $$φα = \frac{\varpi}{π} \frac{\sin\frac{α}{\varpi}πi}{i} \prod_1^\infty{}_m \frac{1 - \dfrac{\sin^2 α\frac{π}{\varpi}i}{\sin^2 mω\frac{π}{\varpi}i}}{1 - \dfrac{\sin^2 α\frac{π}{\varpi}i}{\cos^2(m - \frac{1}{2})ω\frac{π}{\varpi}i}},$$

$$(182)\qquad f\alpha = \prod_0^\infty {}_m \frac{1-\dfrac{\sin^2\alpha\frac{\pi}{\varpi}i}{\sin^2(m+\frac12)\omega\frac{\pi}{\varpi}i}}{1-\dfrac{\sin^2\alpha\frac{\pi}{\varpi}i}{\cos^2(m+\frac12)\omega\frac{\pi}{\varpi}i}},$$

$$(183)\qquad F\alpha = \cos\left(\frac{\alpha}{\varpi}\pi i\right)\prod_1^\infty {}_m \frac{1-\dfrac{\sin^2\frac{\alpha}{\varpi}\pi i}{\cos^2 m\frac{\omega}{\varpi}\pi i}}{1-\dfrac{\sin^2\frac{\alpha}{\varpi}\pi i}{\cos^2(m-\frac12)\frac{\omega}{\varpi}\pi i}}.$$

En substituant au lieu des cosinus et sinus d'arcs imaginaires leurs valeurs en quantités exponentielles, ces formules deviendront

$$(184)\qquad \varphi\alpha = \frac12\frac{\varpi}{\pi}\left(h^{\frac{\alpha}{\varpi}\pi}-h^{-\frac{\alpha}{\varpi}\pi}\right)\prod_1^\infty {}_m \frac{1-\left\{\dfrac{h^{\frac{\alpha}{\varpi}\pi}-h^{-\frac{\alpha}{\varpi}\pi}}{h^{m\frac{\omega}{\varpi}\pi}-h^{-m\frac{\omega}{\varpi}\pi}}\right\}^2}{1+\left\{\dfrac{h^{\frac{\alpha}{\varpi}\pi}-h^{-\frac{\alpha}{\varpi}\pi}}{h^{(m-\frac12)\frac{\omega}{\varpi}\pi}+h^{-(m-\frac12)\frac{\omega}{\varpi}\pi}}\right\}^2},$$

$$(185)\qquad f\alpha = \prod_0^\infty {}_m \frac{1-\left\{\dfrac{h^{\frac{\alpha}{\varpi}\pi}-h^{-\frac{\alpha}{\varpi}\pi}}{h^{(m+\frac12)\frac{\omega}{\varpi}\pi}-h^{-(m+\frac12)\frac{\omega}{\varpi}\pi}}\right\}^2}{1+\left\{\dfrac{h^{\frac{\alpha}{\varpi}\pi}-h^{-\frac{\alpha}{\varpi}\pi}}{h^{(m+\frac12)\frac{\omega}{\varpi}\pi}+h^{-(m+\frac12)\frac{\omega}{\varpi}\pi}}\right\}^2},$$

$$(186)\qquad F\alpha = \frac12\left(h^{\frac{\alpha}{\varpi}\pi}+h^{-\frac{\alpha}{\varpi}\pi}\right)\prod_1^\infty {}_m \frac{1+\left\{\dfrac{h^{\frac{\alpha}{\varpi}\pi}-h^{-\frac{\alpha}{\varpi}\pi}}{h^{m\frac{\omega}{\varpi}\pi}+h^{-m\frac{\omega}{\varpi}\pi}}\right\}^2}{1+\left\{\dfrac{h^{\frac{\alpha}{\varpi}\pi}-h^{-\frac{\alpha}{\varpi}\pi}}{h^{(m-\frac12)\frac{\omega}{\varpi}\pi}+h^{-(m-\frac12)\frac{\omega}{\varpi}\pi}}\right\}^2},$$

où h est le nombre $2,718281\ldots$

On peut encore transformer ces formules de la manière suivante. Si l'on remplace α par αi, on aura les valeurs de $\varphi(\alpha i)$, $f(\alpha i)$, $F(\alpha i)$. En changeant maintenant c en e et e en c, les quantités

$$\omega,\ \varpi,\ \varphi(\alpha i),\ f(\alpha i),\ F(\alpha i)$$

se changeront respectivement en

$$\varpi,\ \omega,\quad i\varphi\alpha,\quad F\alpha,\quad f\alpha,$$

donc les formules précédentes donneront

$$(187)\qquad \varphi\alpha=\frac{\omega}{\pi}\sin\frac{\alpha\pi}{\omega}\prod_1^\infty{}_m\frac{1+\dfrac{4\sin^2\left[\frac{\alpha\pi}{\omega}\right]}{\left[h^{\frac{m\varpi\pi}{\omega}}-h^{-\frac{m\varpi\pi}{\omega}}\right]^2}}{1-\dfrac{4\sin^2\left[\frac{\alpha\pi}{\omega}\right]}{\left[h^{\frac{(2m-1)\varpi\pi}{2\omega}}+h^{-\frac{(2m-1)\varpi\pi}{2\omega}}\right]^2}},$$

$$(188)\qquad F\alpha=\prod_0^\infty{}_m\frac{1+\dfrac{4\sin^2\left[\frac{\alpha\pi}{\omega}\right]}{\left[h^{\frac{(2m+1)\varpi\pi}{2\omega}}-h^{-\frac{(2m+1)\varpi\pi}{2\omega}}\right]^2}}{1-\dfrac{4\sin^2\left[\frac{\alpha\pi}{\omega}\right]}{\left[h^{\frac{(2m+1)\varpi\pi}{2\omega}}+h^{-\frac{(2m+1)\varpi\pi}{2\omega}}\right]^2}},$$

$$(189)\qquad f\alpha=\cos\left(\frac{\alpha\pi}{\omega}\right)\prod_1^\infty{}_m\frac{1-\dfrac{4\sin^2\left[\frac{\alpha\pi}{\omega}\right]}{\left[h^{\frac{m\varpi\pi}{\omega}}+h^{-\frac{m\varpi\pi}{\omega}}\right]^2}}{1-\dfrac{4\sin^2\left[\frac{\alpha\pi}{\omega}\right]}{\left[h^{\frac{(2m-1)\varpi\pi}{2\omega}}+h^{-\frac{(2m-1)\varpi\pi}{2\omega}}\right]^2}}.$$

32.

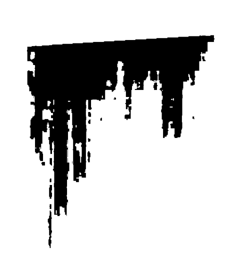
Considérons maintenant les formules (160), (161), (162). On a

$$\sum_0^\infty{}_\mu(-1)^\mu\frac{(2\mu+1)\pi}{y^2+(\mu+\frac{1}{2})^2\pi^2}=\frac{2}{h^y+h^{-y}},$$

donc, en faisant

$$y=[\alpha\pm(m+\tfrac{1}{2})\omega]\frac{\pi}{\varpi}:$$

$$\sum_0^\infty{}_\mu(-1)^\mu\frac{(2\mu+1)\varpi}{[\alpha\pm(m+\frac{1}{2})\omega]^2+(\mu+\frac{1}{2})^2\varpi^2}=\frac{2\pi}{\varpi}\cdot\frac{1}{h^{(\alpha\pm(m+\frac{1}{2})\omega)\frac{\pi}{\varpi}}+h^{-(\alpha\pm(m+\frac{1}{2})\omega)\frac{\pi}{\varpi}}}.$$



En vertu de cette formule il est aisé de voir que les expressions (153), (162) de $\varphi\alpha$ et $F\alpha$ deviendront

(190) $\varphi\alpha =$

$$\frac{2}{ec}\frac{\pi}{\varpi}\sum_0^\infty {}_m(-1)^m\left\{\frac{1}{h^{(\alpha-(m+\frac{1}{2})\omega)\frac{\pi}{\varpi}}+h^{-(\alpha-(m+\frac{1}{2})\omega)\frac{\pi}{\varpi}}}-\frac{1}{h^{(\alpha+(m+\frac{1}{2})\omega)\frac{\pi}{\varpi}}+h^{-(\alpha+(m+\frac{1}{2})\omega)\frac{\pi}{\varpi}}}\right\},$$

(191) $F\alpha =$

$$\frac{2}{c}\frac{\pi}{\varpi}\sum_0^\infty {}_m\left\{\frac{1}{h^{(\alpha-(m+\frac{1}{2})\omega)\frac{\pi}{\varpi}}+h^{-(\alpha-(m+\frac{1}{2})\omega)\frac{\pi}{\varpi}}}+\frac{1}{h^{(\alpha+(m+\frac{1}{2})\omega)\frac{\pi}{\varpi}}+h^{-(\alpha+(m+\frac{1}{2})\omega)\frac{\pi}{\varpi}}}\right\}.$$

Les expressions précédentes de $\varphi\alpha$, $F\alpha$, peuvent être mises encore sous beaucoup d'autres formes; je vais rappeler les plus remarquables. D'abord en réunissant les termes du second membre, on trouvera

$$(192)\qquad \varphi\alpha = \frac{2}{ec}\frac{\pi}{\varpi}\sum_0^\infty {}_m(-1)^m\,\frac{\left[h^{\frac{\alpha\pi}{\varpi}}-h^{-\frac{\alpha\pi}{\varpi}}\right]\left[h^{(m+\frac{1}{2})\frac{\omega\pi}{\varpi}}-h^{-(m+\frac{1}{2})\frac{\omega\pi}{\varpi}}\right]}{h^{\frac{2\alpha\pi}{\varpi}}+h^{-\frac{2\alpha\pi}{\varpi}}+h^{(2m+1)\frac{\omega\pi}{\varpi}}+h^{-(2m+1)\frac{\omega\pi}{\varpi}}},$$

$$(193)\qquad F\alpha = \frac{2}{c}\frac{\pi}{\varpi}\sum_0^\infty {}_m\left\{\frac{\left[h^{\frac{\alpha\pi}{\varpi}}+h^{-\frac{\alpha\pi}{\varpi}}\right]\left[h^{(m+\frac{1}{2})\frac{\omega\pi}{\varpi}}+h^{-(m+\frac{1}{2})\frac{\omega\pi}{\varpi}}\right]}{h^{\frac{2\alpha\pi}{\varpi}}+h^{-\frac{2\alpha\pi}{\varpi}}+h^{(2m+1)\frac{\omega\pi}{\varpi}}+h^{-(2m+1)\frac{\omega\pi}{\varpi}}}\right\}.$$

Si, pour abréger, on suppose

$$(194)\qquad h^{\frac{\alpha\pi}{\varpi}} = \varepsilon \quad\text{et}\quad h^{\frac{\omega\pi}{\varpi}} = r^2,$$

ces formules, en développant le second membre, deviendront

(195) $\varphi\alpha =$

$$\frac{2}{ec}\frac{\pi}{\varpi}\left(\varepsilon-\frac{1}{\varepsilon}\right)\left\{\frac{r-\frac{1}{r}}{r^2+\varepsilon^2+\frac{1}{\varepsilon^2}+\frac{1}{r^2}}-\frac{r^3-\frac{1}{r^3}}{r^6+\varepsilon^2+\frac{1}{\varepsilon^2}+\frac{1}{r^6}}+\frac{r^5-\frac{1}{r^5}}{r^{10}+\varepsilon^2+\frac{1}{\varepsilon^2}+\frac{1}{r^{10}}}-\cdots\right\},$$

(196) $F\alpha =$

$$\frac{2}{c}\frac{\pi}{\varpi}\left(\varepsilon+\frac{1}{\varepsilon}\right)\left\{\frac{r+\frac{1}{r}}{r^2+\varepsilon^2+\frac{1}{\varepsilon^2}+\frac{1}{r^2}}+\frac{r^3+\frac{1}{r^3}}{r^6+\varepsilon^2+\frac{1}{\varepsilon^2}+\frac{1}{r^6}}+\frac{r^5+\frac{1}{r^5}}{r^{10}+\varepsilon^2+\frac{1}{\varepsilon^2}+\frac{1}{r^{10}}}+\cdots\right\},$$

En mettant αi au lieu de α dans les formules (192), (193), en changeant ensuite c en e et e en c, et remarquant que les quantités

$$\omega,\ \varpi,\ \varphi(\alpha i),\ F(\alpha i),\ h^{\alpha i\frac{\pi}{\varpi}}-h^{-\alpha i\frac{\pi}{\varpi}};\ h^{\alpha i\frac{\pi}{\varpi}}+h^{-\alpha i\frac{\pi}{\varpi}},$$

se changeront respectivement en

$$\varpi,\ \omega,\ i\varphi(\alpha),\quad f\alpha,\quad 2i.\sin\alpha\frac{\pi}{\omega},\quad 2\cos\alpha\frac{\pi}{\omega},$$

il viendra

$$(197)\qquad \varphi\alpha=\frac{4}{ec}\frac{\pi}{\omega}\sum_0^\infty{}_m(-1)^m\left\{\frac{\sin\frac{\alpha\pi}{\omega}\cdot\left[h^{(m+\frac{1}{2})\frac{\varpi\pi}{\omega}}-h^{-(m+\frac{1}{2})\frac{\varpi\pi}{\omega}}\right]}{h^{(2m+1)\frac{\varpi\pi}{\omega}}+2\cos 2\alpha\frac{\pi}{\omega}+h^{-(2m+1)\frac{\varpi\pi}{\omega}}}\right\},$$

$$(198)\qquad f\alpha=\frac{4}{e}\frac{\pi}{\omega}\sum_0^\infty{}_m\left\{\frac{\cos\frac{\alpha\pi}{\omega}\cdot\left[h^{(m+\frac{1}{2})\frac{\varpi\pi}{\omega}}+h^{-(m+\frac{1}{2})\frac{\varpi\pi}{\omega}}\right]}{h^{(2m+1)\frac{\varpi\pi}{\omega}}+2\cos 2\alpha\frac{\pi}{\omega}+h^{-(2m+1)\frac{\varpi\pi}{\omega}}}\right\}.$$

En faisant pour abréger

$$(199)\qquad h^{\frac{\varpi\pi}{2\omega}}=\varrho,$$

et en développant, on obtiendra

$$(200)\qquad \varphi\left(\alpha\frac{\omega}{2}\right)=$$

$$\frac{4}{ec}\frac{\pi}{\omega}\sin\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right)\left\{\frac{\varrho-\frac{1}{\varrho}}{\varrho^2+2\cos(\alpha\pi)+\frac{1}{\varrho^2}}-\frac{\varrho^3-\frac{1}{\varrho^3}}{\varrho^6+2\cos(\alpha\pi)+\frac{1}{\varrho^6}}+\frac{\varrho^5-\frac{1}{\varrho^5}}{\varrho^{10}+2\cos(\alpha\pi)+\frac{1}{\varrho^{10}}}-\cdots\right\},$$

$$(201)\qquad f\left(\alpha\frac{\omega}{2}\right)=$$

$$\frac{4}{e}\frac{\pi}{\omega}\cos\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right)\left\{\frac{\varrho+\frac{1}{\varrho}}{\varrho^2+2\cos(\alpha\pi)+\frac{1}{\varrho^2}}+\frac{\varrho^3+\frac{1}{\varrho^3}}{\varrho^6+2\cos(\alpha\pi)+\frac{1}{\varrho^6}}+\frac{\varrho^5+\frac{1}{\varrho^5}}{\varrho^{10}+2\cos(\alpha\pi)+\frac{1}{\varrho^{10}}}+\cdots\right\}.$$

En substituant dans les formules (190), (191) au lieu de $h^{\alpha\frac{\pi}{\varpi}}$ et $h^{\frac{\omega\pi}{2\varpi}}$ leurs valeurs ε et r, il viendra

$$(202)\qquad \varphi\alpha=\frac{2}{ec}\frac{\pi}{\varpi}\sum_0^\infty{}_m(-1)^m\left(\frac{1}{\varepsilon r^{-(2m+1)}+\varepsilon^{-1}r^{2m+1}}-\frac{1}{\varepsilon r^{2m+1}+\varepsilon^{-1}r^{-(2m+1)}}\right),$$

$$(203)\qquad F\alpha=\frac{2}{c}\frac{\pi}{\varpi}\sum_0^\infty{}_m\left(\frac{1}{\varepsilon r^{-2m-1}+\varepsilon^{-1}r^{2m+1}}+\frac{1}{\varepsilon r^{2m+1}+\varepsilon^{-1}r^{-2m-1}}\right).$$

En supposant maintenant $\alpha<\frac{\omega}{2}$, on aura

$$\frac{1}{\varepsilon r^{-2m-1}+\varepsilon^{-1}r^{2m+1}}=\frac{\varepsilon r^{-2m-1}}{1+\varepsilon^2 r^{-4m-2}}=\varepsilon r^{-2m-1}-\varepsilon^3 r^{-6m-3}+\varepsilon^5 r^{-10m-5}-\dots,$$

$$\frac{1}{\varepsilon r^{2m+1}+\varepsilon^{-1}r^{-2m-1}}=\frac{\varepsilon^{-1}r^{-2m-1}}{1+\varepsilon^{-2}r^{-4m-2}}=\varepsilon^{-1}r^{-2m-1}-\varepsilon^{-3}r^{-6m-3}+\varepsilon^{-5}r^{-10m-5}-\dots,$$

donc

$$\varphi\alpha=\frac{2}{ec}\frac{\pi}{\varpi}\sum_0^\infty{}_m(-1)^m\left[(\varepsilon-\varepsilon^{-1})r^{-2m-1}-(\varepsilon^3-\varepsilon^{-3})r^{-6m-3}+(\varepsilon^5-\varepsilon^{-5})r^{-10m-5}-\dots\right)$$

$$=\frac{2}{ec}\frac{\pi}{\varpi}\left[(\varepsilon-\varepsilon^{-1})\sum_0^\infty{}_m(-1)^m r^{-2m-1}-(\varepsilon^3-\varepsilon^{-3})\sum_0^\infty{}_m(-1)^m r^{-6m-3}+\dots\right].$$

Or

$$\sum_0^\infty{}_m(-1)^m r^{-2m-1}=r^{-1}-r^{-3}+r^{-5}-\dots=\frac{r^{-1}}{1+r^{-2}}=\frac{r}{r^2+1},$$

$$\sum_0^\infty{}_m(-1)^m r^{-6m-3}=r^{-3}-r^{-9}+r^{-15}-\dots=\frac{r^{-3}}{1+r^{-6}}=\frac{r^3}{r^6+1},\ \text{etc.},$$

donc

(204) $$\varphi\alpha=\frac{2}{ec}\frac{\pi}{\varpi}\left(\frac{\varepsilon-\varepsilon^{-1}}{r+r^{-1}}-\frac{\varepsilon^3-\varepsilon^{-3}}{r^3+r^{-3}}+\frac{\varepsilon^5-\varepsilon^{-5}}{r^5+r^{-5}}-\dots\right).$$

De la même manière on trouvera

(205) $$F\alpha=\frac{2}{c}\frac{\pi}{\varpi}\left(\frac{\varepsilon+\varepsilon^{-1}}{r-r^{-1}}-\frac{\varepsilon^3+\varepsilon^{-3}}{r^3-r^{-3}}+\frac{\varepsilon^5+\varepsilon^{-5}}{r^5-r^{-5}}-\dots\right).$$

En mettant $\alpha\frac{\varpi}{2}i$ au lieu de α, et changeant ensuite e en c et c en e,

$$\omega,\ \varpi,\ \varphi\left(\alpha\frac{\varpi}{2}i\right),\ F\left(\alpha\frac{\varpi}{2}i\right),\ r,\quad \varepsilon^m+\varepsilon^{-m},\qquad \varepsilon^m-\varepsilon^{-m}$$

se changent en

$$\varpi,\ \omega,\ i\varphi\left(\alpha\frac{\varpi}{2}\right),\ f\left(\alpha\frac{\omega}{2}\right),\ \varrho,\ 2\cos\left(m\alpha\frac{\pi}{2}\right),\ 2i\sin\left(m\alpha\frac{\pi}{2}\right);$$

donc

(206) $$\varphi\left(\alpha\frac{\omega}{2}\right)=\frac{4}{ec}\frac{\pi}{\omega}\left\{\frac{\sin\left[\alpha\frac{\pi}{2}\right]}{\varrho+\frac{1}{\varrho}}-\frac{\sin\left[3\alpha\frac{\pi}{2}\right]}{\varrho^3+\frac{1}{\varrho^3}}+\frac{\sin\left[5\alpha\frac{\pi}{2}\right]}{\varrho^5+\frac{1}{\varrho^5}}-\dots\right\},$$

(207) $$f\left(\alpha\frac{\omega}{2}\right)=\frac{4}{e}\frac{\pi}{\omega}\left\{\frac{\cos\left[\alpha\frac{\pi}{2}\right]}{\varrho-\frac{1}{\varrho}}-\frac{\cos\left[3\alpha\frac{\pi}{2}\right]}{\varrho^3-\frac{1}{\varrho^3}}+\frac{\cos\left[5\alpha\frac{\pi}{2}\right]}{\varrho^5-\frac{1}{\varrho^5}}-\dots\right\}.$$

Ces quatre dernières formules offrent des expressions très simples des fonctions $\varphi\alpha$, $f\alpha$, $F\alpha$. Par différentiation ou intégration on peut en déduire une foule d'autres plus ou moins remarquables.

33.

Dans le cas où $e=c$, les formules précédentes prennent une forme plus simple, à cause de la relation $\omega=\varpi$, qui a lieu dans ce cas. Soit pour plus de simplicité $e=c=1$. On a

$$r=h^{\frac{\omega\pi}{2\varpi}}=h^{\frac{\pi}{2}},\quad \rho=h^{\frac{\varpi\pi}{2\omega}}=h^{\frac{\pi}{2}},$$

donc, en substituant, et faisant dans (204), (205) $\alpha=\alpha\frac{\varpi}{2}$, il vient

$$\varphi\left(\alpha\frac{\omega}{2}\right)=2\frac{\pi}{\omega}\left\{\frac{h^{\frac{\alpha\pi}{2}}-h^{-\frac{\alpha\pi}{2}}}{h^{\frac{\pi}{2}}+h^{-\frac{\pi}{2}}}-\frac{h^{\frac{3\alpha\pi}{2}}-h^{-\frac{3\alpha\pi}{2}}}{h^{\frac{3\pi}{2}}+h^{-\frac{3\pi}{2}}}+\frac{h^{\frac{5\alpha\pi}{2}}-h^{-\frac{5\alpha\pi}{2}}}{h^{\frac{5\pi}{2}}+h^{-\frac{5\pi}{2}}}-\cdots\right\},$$

$$F\left(\alpha\frac{\omega}{2}\right)=2\frac{\pi}{\omega}\left\{\frac{h^{\frac{\alpha\pi}{2}}+h^{-\frac{\alpha\pi}{2}}}{h^{\frac{\pi}{2}}-h^{-\frac{\pi}{2}}}-\frac{h^{\frac{3\alpha\pi}{2}}+h^{-\frac{3\alpha\pi}{2}}}{h^{\frac{3\pi}{2}}-h^{-\frac{3\pi}{2}}}+\frac{h^{\frac{5\alpha\pi}{2}}+h^{-\frac{5\alpha\pi}{2}}}{h^{\frac{5\pi}{2}}-h^{-\frac{5\pi}{2}}}-\cdots\right\},$$

$$\varphi\left(\alpha\frac{\omega}{2}\right)=\frac{4\pi}{\omega}\left\{\sin\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right)\frac{h^{\frac{\pi}{2}}}{1+h^{\pi}}-\sin\left(3\alpha\frac{\pi}{2}\right)\frac{h^{\frac{3\pi}{2}}}{1+h^{3\pi}}+\sin\left(5\alpha\frac{\pi}{2}\right)\frac{h^{\frac{5\pi}{2}}}{1+h^{5\pi}}-\cdots\right\},$$

$$f\left(\alpha\frac{\omega}{2}\right)=\frac{4\pi}{\omega}\left\{\cos\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right)\frac{h^{\frac{\pi}{2}}}{h^{\pi}-1}-\cos\left(3\alpha\frac{\pi}{2}\right)\frac{h^{\frac{3\pi}{2}}}{h^{3\pi}-1}+\cos\left(5\alpha\frac{\pi}{2}\right)\frac{h^{\frac{5\pi}{2}}}{h^{5\pi}-1}-\cdots\right\}.$$

Les fonctions φ, f, F sont déterminées par les équations

$$\alpha\frac{\omega}{2}=\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}};\quad \frac{\omega}{2}=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}};$$

$$x=\varphi\left(\alpha\frac{\omega}{2}\right);\quad \sqrt{1-x^2}=f\left(\alpha\frac{\omega}{2}\right);\quad \sqrt{1+x^2}=F\left(\alpha\frac{\omega}{2}\right).$$

Si dans les deux dernières formules on fait $\alpha=0$, et qu'on remarque qu'alors la valeur de $\dfrac{\varphi\left[\alpha\frac{\omega}{2}\right]}{\sin\left[\alpha\frac{\pi}{2}\right]}$ est égale à $\dfrac{\omega}{\pi}$, et celle de $\dfrac{\sin\left[m\alpha\frac{\pi}{2}\right]}{\sin\left[\alpha\frac{\pi}{2}\right]}$ égale à m, on trouvera

$$\frac{\omega}{2}=2\pi\left\{\frac{h^{\frac{\pi}{2}}}{h^{\pi}-1}-\frac{h^{\frac{3\pi}{2}}}{h^{3\pi}-1}+\frac{h^{\frac{5\pi}{2}}}{h^{5\pi}-1}-\cdots\right\}=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}},$$

$$\frac{\omega^2}{4}=\pi^2\left\{\frac{h^{\frac{\pi}{2}}}{h^{\pi}+1}-3\frac{h^{\frac{3\pi}{2}}}{h^{3\pi}+1}+5\frac{h^{\frac{5\pi}{2}}}{h^{5\pi}+1}-\cdots\right\}=\left(\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}\right)^2.$$

§ VIII.

Expression algébrique de la fonction $\varphi\left(\frac{\omega}{n}\right)$ dans le cas où $e=c=1$. Application à la lemniscate).*

34.

Dans le cinquième paragraphe nous avons traité l'équation $P_n=0$, d'où dépend la détermination des fonctions $\varphi\left(\frac{\omega}{n}\right)$ et $\varphi\left(\frac{\varpi i}{n}\right)$. Cette équation, prise dans toute sa généralité, ne paraît guère résoluble algébriquement pour des valeurs quelconques de e et c; mais néanmoins il y a des cas particuliers, où on peut la résoudre complètement, et par suite obtenir des expressions algébriques des quantités $\varphi\left(\frac{\omega}{n}\right)$ et $\varphi\left(\frac{\varpi i}{n}\right)$ en fonction de e et c. C'est ce qui arrive toujours, si $\varphi\left(\frac{\varpi i}{n}\right)$ peut être exprimé rationnellement par $\varphi\left(\frac{\omega}{n}\right)$ et des quantités connues, ce qui a lieu pour une infinité de valeurs de $\frac{c}{e}$. Dans tous ces cas l'équation $P_n=0$ peut être résolue par une seule et même méthode uniforme, qui est applicable à une infinité d'autres équations de tous les degrés. J'exposerai cette méthode dans un mémoire séparé, et je me contenterai pour le moment à considérer le cas le plus simple, et qui résulte de la supposition $e=c=1$ et $n=4\nu+1$. Dans ce cas on aura

(208) $$\alpha=\int_0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}, \text{ où } x=\varphi\alpha,$$
$$f\alpha=\sqrt{1-\varphi^2\alpha}, \quad F\alpha=\sqrt{1+\varphi^2\alpha}.$$

De même

(209) $$\varphi(\alpha i)=i.\varphi\alpha,$$

ce qui se fait voir, en mettant xi au lieu de x. Cette formule donne ensuite

*) La première partie de ce mémoire contenant les sept premiers paragraphes a paru dans le deuxième tome du Journal für die reine und angewandte Mathematik, la seconde partie se trouve dans le troisième tome.

Note des éditeurs.

(210) $$f(\alpha i) = F\alpha; \quad F(\alpha i) = f\alpha.$$

Les deux quantités e et c étant égales entre elles, il est clair qu'il en sera de même des deux quantités que nous avons désignées par ω et ϖ. En effet on aura

(211) $$\frac{\omega}{2} = \frac{\varpi}{2} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}.$$

35.

En posant dans les formules (10) βi au lieu de β, on en tirera, en ayant égard aux équations (209) et (210),

(212) $$\begin{cases} \varphi(\alpha+\beta i) = \dfrac{\varphi\alpha . f\beta . F\beta + i . \varphi\beta . f\alpha . F\alpha}{1-\varphi^2\alpha . \varphi^2\beta}, \\ f(\alpha+\beta i) = \dfrac{f\alpha . F\beta - i . \varphi\alpha . \varphi\beta . F\alpha . f\beta}{1-\varphi^2\alpha . \varphi^2\beta}, \\ F(\alpha+\beta i) = \dfrac{F\alpha . f\beta + i . \varphi\alpha . \varphi\beta . f\alpha . F\beta}{1-\varphi^2\alpha . \varphi^2\beta}. \end{cases}$$

Donc, pour trouver les fonctions φ, f, F pour une valeur imaginaire quelconque de la variable, il suffira d'en connaître les valeurs pour des valeurs réelles.

En supposant $\alpha = m\delta$, $\beta = \mu\delta$, on voit que $\varphi(m+\mu i)\delta$, $f(m+\mu i)\delta$, $F(m+\mu i)\delta$ pourront être exprimés rationnellement par les six fonctions suivantes:

$$\varphi(m\delta), \quad \varphi(\mu\delta), \quad f(m\delta),$$
$$f(\mu\delta), \quad F(m\delta), \quad F(\mu\delta),$$

et par suite aussi par des fonctions rationnelles des trois fonctions $\varphi\delta$, $f\delta$, $F\delta$, si m et μ sont des nombres entiers. En suivant ce développement, on voit également, et sans peine, que dans le cas où $m+\mu$ est un nombre impair, on aura

$$\varphi(m+\mu i)\delta = \varphi\delta . T,$$

où T est une fonction rationnelle de $(\varphi\delta)^2$, $(f\delta)^2$, $(F\delta)^2$, c'est-à-dire de $(\varphi\delta)^2$. Donc en faisant $\varphi\delta = x$, on aura

$$\varphi(m+\mu i)\delta = x . \psi(x^2).$$

En changeant δ en δi, $\varphi\delta$ se changera en $\varphi(\delta i) = i.\varphi\delta = ix$, et la fonction $\varphi(m+\mu i)\delta$ en $i\varphi(m+\mu i)\delta$, donc

$$\varphi(m+\mu i)\delta = x.\psi(-x^2);$$

par conséquent on doit avoir $\psi(-x^2) = \psi(x^2)$, ce qui fait voir que la fonction $\psi(x^2)$ ne contient que des puissances de la forme x^{4n}. Donc on aura

(213) $$\varphi(m+\mu i)\delta = x.T,$$

où T est une fonction rationnelle de x^4.

Cherchons par exemple l'expression de $\varphi(2+i)\delta$ en x. On a d'après les formules (212), en faisant $\alpha = 2\delta$ et $\beta = \delta$,

$$\varphi(2+i)\delta = \frac{\varphi(2\delta).f\delta.F\delta + i\varphi\delta.f(2\delta).F(2\delta)}{1-(\varphi 2\delta)^2.\varphi^2\delta}.$$

Or les formules (10) donnent

$$\varphi(2\delta) = \frac{2\varphi\delta.f\delta.F\delta}{1+(\varphi\delta)^4}; \quad f(2\delta) = \frac{(f\delta)^2-(\varphi\delta)^2.(F\delta)^2}{1+(\varphi\delta)^4}; \quad F(2\delta) = \frac{(F\delta)^2+(\varphi\delta)^2.(f\delta)^2}{1+(\varphi\delta)^4};$$

c'est-à-dire, en remarquant que $\varphi\delta = x$, $f\delta = \sqrt{1-x^2}$ et $F\delta = \sqrt{1+x^2}$,

$$\varphi(2\delta) = \frac{2x\sqrt{1-x^4}}{1+x^4}; \quad f(2\delta) = \frac{1-2x^2-x^4}{1+x^4}; \quad F(2\delta) = \frac{1+2x^2-x^4}{1+x^4}.$$

En substituant ces valeurs et en réduisant, il viendra

(215) $$\varphi(2+i)\delta = x\frac{2-2x^8+i(1-6x^4+x^8)}{1-2x^4+5x^8} = xi\frac{1-2i-x^4}{1-(1-2i)x^4}.$$

Expression algébrique de $\varphi\left(\frac{\omega}{4\nu+1}\right)$.

36.

On peut, comme on sait, décomposer le nombre $4\nu+1$ en deux carrés. Donc on peut supposer

$$\alpha^2+\beta^2 = 4\nu+1 = (\alpha+\beta i)(\alpha-\beta i).$$

Nous chercherons d'abord la valeur de $\varphi\left(\frac{\omega}{\alpha+\beta i}\right)$; car celle-ci étant trouvée, on en tirera facilement la valeur de $\varphi\left(\frac{\omega}{4\nu+1}\right)$.



La somme des deux carrés α^2 et β^2 étant impaire, l'un des nombres α et β sera pair et l'autre impair. Donc la somme $\alpha+\beta$ est impaire. Donc en vertu de la formule (213), on aura

$$\varphi(\alpha+\beta i)\delta = x\frac{T}{S}, \tag{216}$$

où T et S sont des fonctions entières de $x^4=(\varphi\delta)^4$. En supposant $\delta = \frac{\omega}{\alpha+\beta i}$, le premier membre de l'équation (216) se réduit à zéro, et par conséquent $x=\varphi\left(\frac{\omega}{\alpha+\beta i}\right)$ sera une racine de l'équation

$$T=0. \tag{217}$$

Donc on aura la valeur de $\varphi\left(\frac{\omega}{\alpha+\beta i}\right)$ au moyen de la résolution de cette équation.

D'abord on peut trouver toutes les racines de l'équation $T=0$ à l'aide de la fonction φ de la manière suivante. Si $T=0$, on doit avoir

$$\varphi(\alpha+\beta i)\delta = 0,$$

d'où l'on tire, en vertu de (27),

$$(\alpha+\beta i)\delta = m\omega + \mu\varpi i = (m+\mu i)\omega,$$

et de là

$$\delta = \frac{m+\mu i}{\alpha+\beta i}\omega$$

et

$$x=\varphi\left(\frac{m+\mu i}{\alpha+\beta i}\omega\right). \tag{218}$$

Dans cette expression sont conséquemment contenues toutes les racines de l'équation $T=0$. On les trouvera en donnant à m et μ toutes les valeurs entières depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$.

Or je dis que les valeurs de x qui sont différentes entre elles peuvent être représentées par la formule

$$x=\varphi\left(\frac{\varrho\omega}{\alpha+\beta i}\right), \tag{218'}$$

où ϱ a toutes les valeurs entières depuis $-\frac{\alpha^2+\beta^2-1}{2}$ jusqu'à $+\frac{\alpha^2+\beta^2-1}{2}$. Pour le démontrer, soient λ et λ' deux nombres entiers qui satisfont à l'équation indéterminée

$$\alpha.\lambda'-\beta.\lambda=1;$$

soit de plus t un nombre entier indéterminé, et faisons

$$k = \mu\lambda + t\alpha, \quad k' = -\mu\lambda' - t\beta;$$

on en déduira sans peine

$$\mu + \beta k + \alpha k' = 0,$$

et si l'on fait

$$\varrho = m + \alpha k - \beta k',$$

on vérifiera aisément l'équation

$$\frac{m + \mu i}{\alpha + \beta i} = \frac{\varrho}{\alpha + \beta i} - k - k'i.$$

De là on tire

$$\varphi\left(\frac{m + \mu i}{\alpha + \beta i}\omega\right) = \varphi\left(\frac{\varrho\omega}{\alpha + \beta i} - k\omega - k'\omega i\right)$$

or d'après la relation (22) le second membre se réduit à

$$(-1)^{-k-k'}\varphi\left(\frac{\varrho\omega}{\alpha + \beta i}\right);$$

donc

$$\varphi\left(\frac{m + \mu i}{\alpha + \beta i}\omega\right) = (-1)^{-k-k'}\varphi\left(\frac{\varrho\omega}{\alpha + \beta i}\right) = \varphi\left(\frac{\pm\varrho\omega}{\alpha + \beta i}\right).$$

Maintenant l'expression de ϱ deviendra, en y substituant les valeurs de k et k',

$$\varrho = m + \mu(\lambda\alpha + \lambda'\beta) + t(\alpha^2 + \beta^2),$$

d'où l'on voit qu'on peut prendre t tel que la valeur de ϱ, positive ou négative, soit inférieure à $\frac{\alpha^2 + \beta^2}{2}$. Donc etc.

Toutes les racines de l'équation $T = 0$ seront représentées par la formule (218'); or toutes ces racines sont différentes entre elles. En effet si l'on avait par exemple

$$\varphi\left(\frac{\varrho\omega}{\alpha + \beta i}\right) = \varphi\left(\frac{\varrho'\omega}{\alpha + \beta i}\right),$$

on aurait d'après la formule (31), (en remarquant que $\varpi = \omega$)

$$\frac{\varrho\omega}{\alpha + \beta i} = (-1)^{m+n}\frac{\varrho'\omega}{\alpha + \beta i} + (m + ni)\omega,$$

d'où l'on tire

$$\alpha n + \beta m = 0; \quad \varrho = (-1)^{m+n}\varrho' + \alpha m - \beta n.$$

La première de ces équations donne $n = -\beta t$; $m = \alpha t$, où t est un entier indéterminé. En vertu de ces relations, l'expression de ϱ deviendrait

$$\varrho = (-1)^{m+n}\varrho' + (\alpha^2 + \beta^2)\,t,$$

d'où l'on tire

$$\frac{\varrho \pm \varrho'}{\alpha^2 + \beta^2} = t,$$

ce qui est impossible, car on remarquera que ϱ, ϱ' sont tous deux inférieurs à $\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}$. Donc les racines différentes entre elles de l'équation $T = 0$ sont au nombre de $\frac{\alpha^2+\beta^2-1}{2}$. Il faut voir encore, si l'équation en question a des racines égales. En différentiant l'équation (216) on en tirera, en remarquant que $d\varphi\alpha = d\alpha . f\alpha . F\alpha$,

$$(\alpha + \beta i).f(\alpha+\beta i)\delta . F(\alpha+\beta i)\delta . S + \left(\frac{dS}{d\delta}\right)\cdot \varphi(\alpha+\beta i)\delta$$
$$= x\frac{dT}{dx}\cdot f\delta . F\delta + T.f\delta . F\delta.$$

Si maintenant T a des facteurs égaux, il faut que T et $\frac{dT}{dx}$ soient égaux à zéro en même temps; donc l'équation précédente donnera

$$S.f(\alpha+\beta i)\delta . F(\alpha+\beta i)\delta = 0;$$

or on a $\varphi(\alpha+\beta i)\delta = 0$, donc $f(\alpha+\beta i)\delta = \pm 1 = F(\alpha+\beta i)\delta$, et par conséquent

$$S = 0,$$

ce qui est impossible, car nous supposons, ce qui est permis, que T et S n'aient point de facteurs communs. Par là on voit que l'équation

$$T = 0$$

est du degré $\alpha^2 + \beta^2 - 1$ par rapport à x, et aura pour racines les quantités:

$$\pm\varphi\left(\frac{\omega}{\alpha+\beta i}\right),\ \pm\varphi\left(\frac{2\omega}{\alpha+\beta i}\right), \ldots \pm\varphi\left(\frac{\alpha^2+\beta^2-1}{2}\cdot\frac{\omega}{\alpha+\beta i}\right).$$

En faisant $x^2 = r$, on aura une équation

(219) $$R = 0$$

du degré $\frac{\alpha^2+\beta^2-1}{2} = 2\nu$, dont les racines seront

(220) $$\varphi^2(\delta),\ \varphi^2(2\delta),\ \varphi^2(3\delta)\ \ldots\ \varphi^2(2\nu\delta),$$

où pour abréger on a supposé $\delta = \frac{\omega}{\alpha + \beta i}$.

Cela posé, on peut aisément résoudre l'équation $R = 0$, à l'aide de la méthode de M. *Gauss*.

Soit ε une racine primitive de $\alpha^2 + \beta^2$, je dis qu'on peut exprimer les racines comme il suit:

(221) $$\varphi^2(\delta),\ \varphi^2(\varepsilon\delta),\ \varphi^2(\varepsilon^2\delta),\ \varphi^2(\varepsilon^3\delta)\ \ldots\ \varphi^2(\varepsilon^{2\nu-1}\delta).$$

En effet, en faisant

(222) $$\varepsilon^m = \pm a_m + t(\alpha^2 + \beta^2),$$

où a_m est moindre que $\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}$, on aura

$$\varphi(\varepsilon^m\delta) = \varphi\left(\pm a_m\delta + \frac{t(\alpha^2+\beta^2)}{\alpha+\beta i}\omega\right) = \varphi[\pm a_m\delta + t(\alpha - \beta i)\omega],$$

ou, en vertu de la formule (22),

$$\varphi(\varepsilon^m\delta) = \pm\varphi(a_m\delta),$$

et par suite

$$\varphi^2(\varepsilon^m\delta) = \varphi^2(a_m\delta).$$

Je dis maintenant que tous les nombres $1, a_1, a_2, a_3, \ldots a_{2\nu-1}$ sont inégaux entre eux. En effet soit par exemple $a_m = a_n$, on aura

(223) $$\varepsilon^n = \pm a_m + t'(\alpha^2 + \beta^2).$$

Des deux équations (222) et (223) on tire, en éliminant a_m,

$$\frac{\varepsilon^m \pm \varepsilon^n}{\alpha^2+\beta^2} = \text{un nombre entier.}$$

Donc en multipliant par $\varepsilon^m \mp \varepsilon^n$, on trouve que $\frac{\varepsilon^{2m} - \varepsilon^{2n}}{\alpha^2+\beta^2}$ est entier, et par suite $\frac{\varepsilon^{2m-2n} - 1}{\alpha^2+\beta^2}$, ce qui est impossible, car ε est une racine primitive de $\alpha^2+\beta^2$, et $2m - 2n$ est moindre que $\alpha^2 + \beta^2 - 1$. Donc les 2ν nombres $1, a,$ etc. sont différens entre eux, et par conséquent, pris dans un ordre différent, ils sont les mêmes que les suivans:

$$1,\ 2,\ 3,\ 4\ \ldots\ 2\nu - 1.$$

On voit par la formule $\varphi^2(\varepsilon^m\delta) = \varphi^2(a_m\delta)$, que les quantités (220) et (221) coïncident, mais dans un ordre différent.

Maintenant on pourra résoudre l'équation $R=0$ exactement de la même manière que l'équation (106). On trouvera (116)

$$(224)\quad \varphi^2(\varepsilon^m\delta)=\frac{1}{2\nu}\left(+A+\theta^{-m}.v^{\frac{1}{2\nu}}+s_2\theta^{-2m}.v^{\frac{2}{2\nu}}+\cdots+s_{2\nu-1}\theta^{-(2\nu-1)m}.v^{\frac{2\nu-1}{2\nu}}\right),$$

où θ est une racine imaginaire de l'équation $\theta^{2\nu}-1=0$, et $v, s_2, s_3, \ldots s_{2\nu-1}, A$ seront déterminés par les expressions

$$v=[\varphi^2(\delta)+\theta.\varphi^2(\varepsilon\delta)+\theta^2.\varphi^2(\varepsilon^2\delta)+\cdots+\theta^{2\nu-1}.\varphi^2(\varepsilon^{2\nu-1}\delta)]^{2\nu},$$

$$s_k=\frac{\varphi^2(\delta)+\theta^k.\varphi^2(\varepsilon\delta)+\theta^{2k}.\varphi^2(\varepsilon^2\delta)+\cdots+\theta^{(2\nu-1)k}.\varphi^2(\varepsilon^{2\nu-1}\delta)}{[\varphi^2(\delta)+\theta.\varphi^2(\varepsilon\delta)+\theta^2\varphi^2(\varepsilon^2\delta)+\cdots+\theta^{2\nu-1}.\varphi^2(\varepsilon^{2\nu-1}\delta)]^k}.$$

$$A=\varphi^2(\delta)+\varphi^2(\varepsilon\delta)+\varphi^2(\varepsilon^2\delta)+\cdots+\varphi^2(\varepsilon^{2\nu-1}\delta),$$

qui, par le procédé p. 312, 313, 314, peuvent être exprimées *rationnellement* par les coefficiens de l'équation $R=0$, qui seront de la forme $A+Bi$, où A et B sont des nombres rationnels. Donc la formule (224) donne l'expression algébrique de toutes les racines de l'équation $R=0$, et par conséquent les valeurs des fonctions

$$\varphi\left(\frac{\omega}{\alpha+\beta i}\right),\ \varphi\left(\frac{2\omega}{\alpha+\beta i}\right),\ \cdots\ \varphi\left(\frac{(2\nu-1)\omega}{\alpha+\beta i}\right),\ \varphi\left(\frac{2\nu\omega}{\alpha+\beta i}\right).$$

37.

Ayant trouvé par ce qui précède la valeur de $\varphi\left(\frac{m\omega}{\alpha+\beta i}\right)$, on en tirera celle de la fonction

$$\varphi\left(\frac{\omega}{\alpha^2+\beta^2}\right)=\varphi\left(\frac{\omega}{4\nu+1}\right),$$

comme il suit. La valeur de $\varphi\left(\frac{m\omega}{\alpha+\beta i}\right)$ donnera celle de $\varphi\left(\frac{m\omega}{\alpha-\beta i}\right)$ en changeant seulement i en $-i$. De là on tire la valeur de $\varphi\left(\frac{m\omega}{\alpha+\beta i}+\frac{m\omega}{\alpha-\beta i}\right)$ par la formule (10), savoir

$$(226)\quad \varphi\left(\frac{m\omega}{\alpha+\beta i}+\frac{m\omega}{\alpha-\beta i}\right)=\frac{\varphi\left(\frac{m\omega}{\alpha+\beta i}\right)\sqrt{1-\varphi^4\left(\frac{m\omega}{\alpha-\beta i}\right)}+\varphi\left(\frac{m\omega}{\alpha-\beta i}\right)\cdot\sqrt{1-\varphi^4\left(\frac{m\omega}{\alpha+\beta i}\right)}}{1+\varphi^2\left(\frac{m\omega}{\alpha+\beta i}\right)\cdot\varphi^2\left(\frac{m\omega}{\alpha-\beta i}\right)};$$

or

$$\frac{m\omega}{\alpha+\beta i}+\frac{m\omega}{\alpha-\beta i}=\frac{2m\alpha\omega}{\alpha^2+\beta^2}=\frac{2m\alpha\omega}{4\nu+1},$$

donc on aura la valeur de la fonction

$$\varphi\left(\frac{2m\alpha\omega}{4\nu+1}\right).$$

Maintenant pour avoir la valeur de $\varphi\left(\frac{n\omega}{4\nu+1}\right)$, où n a une valeur déterminée quelconque, il suffit de déterminer m et t de la manière que

$$n=2m\alpha-(4\nu+1)t,$$

ce qui est toujours possible, en remarquant que les deux nombres 2α et $4\nu+1$ sont premiers entre eux; car alors on obtiendra

$$\varphi\left(\frac{2m\alpha\omega}{4\nu+1}\right)=\varphi\left(\frac{n\omega}{4\nu+1}+t\omega\right)=(-1)^t\varphi\left(\frac{n\omega}{4\nu+1}\right).$$

En posant par exemple $n=1$, on aura la valeur de $\varphi\left(\frac{\omega}{4\nu+1}\right)$.

38.

Le cas, où $4\nu+1$ a la forme $1+2^n$, est le plus remarquable; car alors l'expression de $\varphi\left(\frac{\omega}{4\nu+1}\right)$ ne contient que des racines carrées. En effet on a dans ce cas $2\nu=2^{n-1}$, et par suite la formule (224) fait voir qu'on peut déduire $\varphi(\varepsilon^m\delta)$ de θ et v, en extrayant seulement des racines carrées. Or v est une fonction rationnelle de θ et de $\sqrt{-1}$, et θ est déterminée par l'équation $\theta^{2^{n-1}}=1$, d'où l'on tire θ par des racines carrées; donc on trouve aussi v et la fonction

$$\varphi(\varepsilon^m\delta)=\varphi\left(\frac{a_m\omega}{\alpha+\beta i}\right).$$

Connaissant de cette manière $\varphi\left(\frac{m\omega}{\alpha+\beta i}\right)$, on aura de même $\varphi\left(\frac{m\omega}{\alpha-\beta i}\right)$ et de là, par la formule (226) la valeur de $\varphi\left(\frac{n\omega}{\alpha^2+\beta^2}\right)=\varphi\left(\frac{n\omega}{4\nu+1}\right)$, en extrayant des racines carrées.

39.

Un autre cas, où la valeur de $\varphi\left(\frac{m\omega}{n}\right)$ peut être déterminée par des racines carrées est celui où n est une puissance de 2, comme nous l'avons vu n° 13. Donc on connaît la fonction $\varphi\left(\frac{m\omega}{2^n}\right)$, et l'on connaît de même la fonction $\varphi\left(\frac{m\omega}{1+2^n}\right)$ si $1+2^n$ est un nombre premier.

Soient maintenant $1+2^n$, $1+2^{n_1}$, $1+2^{n_2}$, ... $1+2^{n_\mu}$ plusieurs nombres premiers, on connaît les fonctions

$$\varphi\left(\frac{m\omega}{2^n}\right),\ \varphi\left(\frac{m_1\omega}{1+2^{n_1}}\right),\ \varphi\left(\frac{m_2\omega}{1+2^{n_2}}\right), \cdots \varphi\left(\frac{m_\mu\omega}{1+2^{n_\mu}}\right),$$

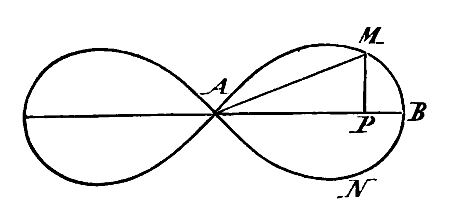
et par suite la fonction

$$\varphi\left(\frac{m}{2^n}+\frac{m_1}{1+2^{n_1}}+\frac{m_2}{1+2^{n_2}}+\cdots+\frac{m_\mu}{1+2^{n_\mu}}\right)\omega$$
$$=\varphi\left(\frac{m'\omega}{2^n(1+2^{n_1})(1+2^{n_2})\cdots(1+2^{n_\mu})}\right),$$

où m' est un nombre entier, qui, à cause des indéterminées $m, m_1, m_2, \ldots m_\mu$ peut avoir une valeur quelconque. On peut donc établir le théorème suivant: "La valeur de la fonction $\varphi\left(\frac{m\omega}{n}\right)$ peut être exprimée par *des racines* "*carrées* toutes les fois que n est un nombre de la forme 2^n ou un nombre "premier de la forme $1+2^n$, ou même un produit de plusieurs nombres de "ces deux formes."

40.

En appliquant ce qui précède à la lemniscate, on parviendra au théorème énoncé n° 22.



Soit l'arc $AM=\alpha$, la corde $AM=x$ et l'angle $MAP=\theta$, on aura

$$d\alpha=\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}.$$

En effet, l'équation polaire de la lemniscate est

$$x = \sqrt{\cos 2\theta},$$

d'où

$$d\theta = -\frac{dx \cdot \sqrt{\cos 2\theta}}{\sin 2\theta}$$

et

$$d\alpha^2 = dx^2 + x^2 d\theta^2,$$

donc

$$d\alpha^2 = dx^2\left(1 + \frac{x^2 \cos 2\theta}{(\sin 2\theta)^2}\right);$$

mais de l'équation $x = \sqrt{\cos 2\theta}$ on tire $\cos 2\theta = x^2$, $\cos^2 2\theta = x^4$, $1 - \cos^2 2\theta = 1 - x^4 = (\sin 2\theta)^2$, donc

$$d\alpha^2 = dx^2\left(1 + \frac{x^4}{1 - x^4}\right) = \frac{dx^2}{1 - x^4},$$

et par suite

$$d\alpha = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^4}}$$

et

$$x = \varphi\alpha.$$

Si l'on suppose $x = 1$, on aura $\alpha = AMB = \frac{\omega}{2}$. Donc la circonférence $AMBN = \omega$. Supposons maintenant qu'il s'agisse de diviser cette circonférence en n parties égales, et soit l'arc $AM = \frac{m}{n} \cdot AMBN = \frac{m}{n}\omega$, on aura

$$AM = \varphi\left(\frac{m\omega}{n}\right).$$

Donc on aura la corde, et par suite le $m^{\text{ième}}$ point de division, si l'on connaît la fonction $\varphi\left(\frac{m\omega}{n}\right)$; or c'est ce qui a toujours lieu lorsque n est décomposable en nombres premiers de la forme 2 et $1 + 2^n$, comme nous l'avons vu dans le numéro précédent. Donc dans ce cas on peut construire les points de division à l'aide de la règle et du compas seulement, ou ce qui revient au même, par l'intersection de lignes droites et de cercles.

§ IX.

Usage des fonctions φ, f, F dans la transformation des fonctions elliptiques.

41.

M. *Legendre* a fait voir dans ses Exercices de calc. int., comment l'intégrale $\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi}}$, qui, en faisant $\sin\varphi = x$, se change en $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}}$, peut être transformée en d'autres intégrales de la même forme, avec un module différent. Je suis parvenu à généraliser cette théorie par le théorème suivant:

Si l'on désigne par α la quantité $\frac{(m+\mu)\omega+(m-\mu)\varpi i}{2n+1}$, où l'un au moins des deux nombres entiers m et μ est premier avec $2n+1$, on aura

(227)
$$\left\{\begin{aligned}
&\int \frac{dy}{\sqrt{(1-c_1^2y^2)(1+e_1^2y^2)}} = \pm a \int \frac{dx}{\sqrt{(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)}},\\
&\text{où}\\
&y = f.x.\frac{(\varphi^2\alpha - x^2)(\varphi^2 2\alpha - x^2)\cdots(\varphi^2 n\alpha - x^2)}{(1+e^2c^2\varphi^2\alpha . x^2)(1+e^2c^2\varphi^2 2\alpha . x^2)\cdots(1+e^2c^2\varphi^2 n\alpha . x^2)},\\
&\frac{1}{c_1} = \frac{f}{c}\left[\varphi\left(\frac{\omega}{2}+\alpha\right).\varphi\left(\frac{\omega}{2}+2\alpha\right)\ldots\varphi\left(\frac{\omega}{2}+n\alpha\right)\right]^2,\\
&\frac{1}{e_1} = \frac{f}{e}\left[\varphi\left(\frac{\varpi i}{2}+\alpha\right).\varphi\left(\frac{\varpi i}{2}+2\alpha\right)\ldots\varphi\left(\frac{\varpi i}{2}+n\alpha\right)\right]^2,\\
&a = f.(\varphi\alpha.\varphi 2\alpha.\varphi 3\alpha\ldots\varphi n\alpha)^2,
\end{aligned}\right.$$

f étant une indéterminée, de sorte qu'il n'existe qu'une seule relation entre les quantités c_1, e_1, c, e. Les quantités e^2 et c^2 pourront être positives ou négatives.

Par ce théorème on peut trouver une infinité de transformations différentes entre elles et de celles de M. *Legendre.*

42.

Soient m et μ deux nombres entiers, et faisons pour abréger

(228)
$$\alpha = \frac{(m+\mu)\omega+(m-\mu)\varpi i}{2n+1},$$

où l'on suppose que l'un des deux nombres m, μ soit premier avec $2n+1$.

En désignant par θ une quantité quelconque, il viendra, en vertu de la formule (22)

$$\varphi[\theta+(2n+1)\alpha]=\varphi\theta. \tag{229}$$

En mettant $\theta-n\alpha$ au lieu de θ, on obtiendra

$$\varphi[\theta+(n+1)\alpha]=\varphi(\theta-n\alpha). \tag{230}$$

Cela posé, considérons l'expression suivante

$$\varphi_1\theta=\varphi\theta+\varphi(\theta+\alpha)+\cdots+\varphi(\theta+n\alpha)+\cdots+\varphi(\theta+2n\alpha). \tag{231}$$

En mettant $\theta+\alpha$ au lieu de θ, il viendra à cause de l'équation (229)

$$\varphi_1(\theta+\alpha)=\varphi_1\theta, \tag{232}$$

donc si m désigne un nombre entier quelconque,

$$\varphi_1(\theta+m\alpha)=\varphi_1\theta. \tag{233}$$

En vertu de l'équation (230) on peut écrire l'expression de $\varphi_1\theta$, comme il suit:

$$\varphi_1\theta=\varphi\theta+\varphi(\theta+\alpha)+\varphi(\theta-\alpha)+\varphi(\theta+2\alpha)+\varphi(\theta-2\alpha)+\cdots+\varphi(\theta+n\alpha)+\varphi(\theta-n\alpha), \tag{234}$$

ou, en vertu de la formule

$$\varphi(\theta+\nu\alpha)+\varphi(\theta-\nu\alpha)=\frac{2\varphi\theta.f(\nu\alpha)F(\nu\alpha)}{1+e^2c^2(\varphi\theta)^2(\varphi\nu\alpha)^2}:$$

$$\varphi_1\theta=\varphi\theta+\frac{2\varphi\theta.f\alpha.F\alpha}{1+e^2c^2\varphi^2\alpha.\varphi^2\theta}+\frac{2\varphi\theta.f2\alpha.F2\alpha}{1+e^2c^2\varphi^22\alpha.\varphi^2\theta}+\cdots+\frac{2\varphi\theta.fn\alpha.Fn\alpha}{1+e^2c^2\varphi^2n\alpha.\varphi^2\theta}. \tag{235}$$

En faisant $\varphi\theta=x$, $\varphi_1\theta$ devient une fonction rationnelle de x. En la désignant par ψx, on aura

$$\psi x=x.\left(1+\frac{2f\alpha.F\alpha}{1+e^2c^2\varphi^2\alpha.x^2}+\cdots+\frac{2fn\alpha.Fn\alpha}{1+e^2c^2\varphi^2n\alpha.x^2}\right). \tag{236}$$

43.

Maintenant soit ε une quantité quelconque, je dis qu'on aura

$$(237)\quad 1-\frac{\psi x}{\varphi_1\varepsilon}=\frac{\left(1-\frac{x}{\varphi\varepsilon}\right)\left(1-\frac{x}{\varphi(\varepsilon+\alpha)}\right)\left(1-\frac{x}{\varphi(\varepsilon+2\alpha)}\right)\cdots\left(1-\frac{x}{\varphi(\varepsilon+2n\alpha)}\right)}{(1+e^2c^2\varphi^2\alpha\,.\,x^2)(1+e^2c^2\varphi^2 2\alpha\,.\,x^2)\cdots(1+e^2c^2\varphi^2 n\alpha\,.\,x^2)}.$$

En effet il est clair que la fonction

$$(238)\qquad R=\left(1-\frac{\psi x}{\varphi_1\varepsilon}\right)(1+e^2c^2\varphi^2\alpha\,.\,x^2)\ldots(1+e^2c^2\varphi^2 n\alpha\,.\,x^2)$$

sera entière et du degré $2n+1$; mais en faisant $x=\varphi\varepsilon$, ψx deviendra $=\varphi_1\varepsilon$, et par suite R se réduira à zéro pour cette valeur de x. De même en faisant $x=\varphi(\varepsilon+m\alpha)$, où m est entier, on aura $\psi x=\varphi_1(\varepsilon+m\alpha)$, ou, en vertu de l'équation (233), $\psi x=\varphi_1\varepsilon$. Donc $1-\frac{\psi x}{\varphi_1\varepsilon}=0$, et par conséquent $x=\varphi(\varepsilon+m\alpha)$ sera une racine de l'équation $R=0$, quel que soit le nombre entier m. Or généralement toutes les quantités

$$(239)\qquad \varphi\varepsilon,\ \varphi(\varepsilon+\alpha),\ \varphi(\varepsilon+2\alpha),\ \ldots\ \varphi(\varepsilon+2n\alpha)$$

sont différentes entre elles. En effet si l'on avait

$$\varphi(\varepsilon+m'\alpha)=\varphi(\varepsilon+\mu'\alpha),$$

il s'ensuivrait en vertu de la formule (31)

$$\varepsilon+m'\alpha=(-1)^{k+k'}(\varepsilon+\mu'\alpha)+k\omega+k'\varpi i,$$

d'où

$$k+k'=2k'',$$
$$k=k''+l,\ \ k'=k''-l,$$
$$(m'-\mu')\alpha=(k''+l)\omega+(k''-l)\varpi i.$$

De là, en substituant la valeur de $\alpha=\frac{(m+\mu)\omega+(m-\mu)\varpi i}{2n+1}$, on tire

$$(m'-\mu')(m+\mu)=(2n+1)(k''+l),$$
$$(m'-\mu')(m-\mu)=(2n+1)(k''-l)$$

et

$$m'-\mu'=(2n+1)\frac{k''}{m}=(2n+1)\frac{l}{\mu},$$

équation contradictoire, parce que nous avons supposé que l'un des deux nombres m et μ soit premier avec $2n+1$, et que $m'-\mu'$ est toujours moindre que $2n+1$. Maintenant les $2n+1$ quantités (239) étant différentes entre elles, elles sont précisément les $2n+1$ racines de l'équation $R=0$. Donc on a



(240) $$R = A\left(1-\frac{x}{\varphi\varepsilon}\right)\left(1-\frac{x}{\varphi(\varepsilon+\alpha)}\right)\cdots\left(1-\frac{x}{\varphi(\varepsilon+2n\alpha)}\right),$$

où A est un coefficient constant, qu'on trouvera en attribuant à x une valeur particulière; par exemple en faisant $x=0$, on a $R=A$; or l'équation (238) donne pour $x=0$: $R=1$, donc $A=1$, et par conséquent l'équation (237) a lieu.

En multipliant cette équation par $\varphi\varepsilon$ et faisant ensuite $\varepsilon=0$, il viendra

(241) $$\psi(x) = gx\frac{\left(1-\frac{x}{\varphi\alpha}\right)\left(1-\frac{x}{\varphi 2\alpha}\right)\cdots\left(1-\frac{x}{\varphi 2n\alpha}\right)}{(1+e^2c^2\varphi^2\alpha.x^2)\cdots(1+e^2c^2\varphi^2n\alpha.x^2)},$$

où g est la valeur de $\frac{\varphi_1\varepsilon}{\varphi\varepsilon}$ pour $\varepsilon=0$. En faisant, dans la formule (235), $\theta=0$, après avoir divisé par $\varphi\theta$, on trouve l'expression suivante de cette constante

(242) $$g = 1+2f\alpha.F\alpha+2f2\alpha.F2\alpha+\cdots+2fn\alpha.Fn\alpha.$$

En faisant dans la formule (230) $\theta = n\alpha-(m'+1)\alpha$, on trouve

$$\varphi(2n\alpha-m'\alpha)=\varphi[-(m'+1)\alpha]=-\varphi(m'+1)\alpha.$$

Donc on peut écrire l'expression de ψx comme il suit:

(243) $$\psi x = gx\frac{\left(1-\frac{x^2}{\varphi^2\alpha}\right)\left(1-\frac{x^2}{\varphi^2 2\alpha}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{\varphi^2 n\alpha}\right)}{(1+e^2c^2\varphi^2\alpha.x^2)(1+e^2c^2\varphi^2 2\alpha.x^2)\cdots(1+e^2c^2\varphi^2n\alpha.x^2)}.$$

44.

Maintenant faisons dans l'expression de $1-\frac{\psi x}{\varphi_1\varepsilon}$, $\varepsilon=\frac{\omega}{2}$. En supposant pour abréger

(244) $$\varrho = (1+e^2c^2\varphi^2\alpha.x^2)(1+e^2c^2\varphi^2 2\alpha.x^2)\cdots(1+e^2c^2\varphi^2n\alpha.x^2),$$

on aura

$$1-\frac{\psi x}{\varphi_1\frac{\omega}{2}} = \left\{1-\frac{x}{\varphi\frac{\omega}{2}}\right\}\left\{1-\frac{x}{\varphi\left(\frac{\omega}{2}+\alpha\right)}\right\}\left\{1-\frac{x}{\varphi\left(\frac{\omega}{2}+2\alpha\right)}\right\}\cdots\left\{1-\frac{x}{\varphi\left(\frac{\omega}{2}+2n\alpha\right)}\right\}\cdot\frac{1}{\varrho};$$

or, en faisant dans la formule (230)

$$\theta = \frac{\omega}{2} + (n - m' - 1)\alpha,$$

on a

$$\varphi\left(\frac{\omega}{2} + (2n - m')\alpha\right) = \varphi\left(\frac{\omega}{2} - (m' + 1)\alpha\right),$$

donc en vertu de la formule (17),

$$\varphi\left(\frac{\omega}{2} - \alpha\right) = \varphi\left(\frac{\omega}{2} + \alpha\right),$$

il viendra

$$\varphi\left(\frac{\omega}{2} + (2n - m')\alpha\right) = \varphi\left(\frac{\omega}{2} + (m' + 1)\alpha\right).$$

Cette équation fait voir qu'on peut écrire l'expression de $1 - \frac{\psi x}{\varphi_1 \frac{\omega}{2}}$ comme il suit:

(245) $$1 - \frac{\psi x}{\varphi_1 \frac{\omega}{2}}$$
$$= (1 - cx)\left\{1 - \frac{x}{\varphi\left(\frac{\omega}{2} + \alpha\right)}\right\}^2 \left\{1 - \frac{x}{\varphi\left(\frac{\omega}{2} + 2\alpha\right)}\right\}^2 \cdots \left\{1 - \frac{x}{\varphi\left(\frac{\omega}{2} + n\alpha\right)}\right\}^2 \cdot \frac{1}{\varrho}.$$

En mettant $-x$ au lieu de $+x$, on aura semblablement

(246) $$1 + \frac{\psi x}{\varphi_1 \frac{\omega}{2}}$$
$$= (1 + cx)\left\{1 + \frac{x}{\varphi\left(\frac{\omega}{2} + \alpha\right)}\right\}^2 \left\{1 + \frac{x}{\varphi\left(\frac{\omega}{2} + 2\alpha\right)}\right\}^2 \cdots \left\{1 + \frac{x}{\varphi\left(\frac{\omega}{2} + n\alpha\right)}\right\}^2 \cdot \frac{1}{\varrho}.$$

Donc si l'on fait

(247) $$y = k \cdot \psi x, \quad c_1 = \frac{1}{k \cdot \varphi_1 \frac{\omega}{2}},$$

où k est indéterminé, et

(248) $$\begin{cases} t = \left\{1 - \frac{x}{\varphi\left(\frac{\omega}{2} + \alpha\right)}\right\} \cdots \left\{1 - \frac{x}{\varphi\left(\frac{\omega}{2} + n\alpha\right)}\right\}, \\ t_1 = \left\{1 + \frac{x}{\varphi\left(\frac{\omega}{2} + \alpha\right)}\right\} \cdots \left\{1 + \frac{x}{\varphi\left(\frac{\omega}{2} + n\alpha\right)}\right\}, \end{cases}$$

on aura

$$(249) \qquad 1 - c_1 y = (1 - cx)\frac{t^2}{\varrho}; \quad 1 + c_1 y = (1 + cx)\frac{t_1^2}{\varrho}.$$

De la même manière, en faisant

$$(250) \qquad \begin{cases} s = \left\{1 - \dfrac{x}{\varphi\left(\frac{\omega}{2} i + \alpha\right)}\right\} \cdots \left\{1 - \dfrac{x}{\varphi\left(\frac{\omega}{2} i + n\alpha\right)}\right\}, \\ s_1 = \left\{1 + \dfrac{x}{\varphi\left(\frac{\omega}{2} i + \alpha\right)}\right\} \cdots \left\{1 + \dfrac{x}{\varphi\left(\frac{\omega}{2} i + n\alpha\right)}\right\}; \end{cases}$$

et

$$(251) \qquad c_1 = \pm \frac{i}{k \cdot \varphi_1\left(\frac{\omega}{2} i\right)},$$

on trouvera ces deux équations:

$$(252) \qquad 1 \mp c_1 iy = (1 - eix)\frac{s_1^2}{\varrho}; \quad 1 \pm c_1 iy = (1 + eix)\frac{s^2}{\varrho}.$$

Les équations (249) et (252) donneront

$$(1 - c_1^2 y^2) = (1 - c^2 x^2)\frac{t^2 t_1^2}{\varrho^2}; \quad (1 + c_1^2 y^2) = (1 + e^2 x^2)\frac{s^2 s_1^2}{\varrho^2}$$

et par conséquent

$$(253) \qquad \sqrt{(1 - c_1^2 y^2)(1 + c_1^2 y^2)} = \pm \frac{t t_1 s s_1}{\varrho^2} \sqrt{(1 - c^2 x^2)(1 + e^2 x^2)}.$$

Maintenant l'expression de y donne $dy = \frac{P}{\varrho^2} dx$, où P sera une fonction entière de x du degré $4n$, donc

$$\frac{dy}{\sqrt{(1 - c_1^2 y^2)(1 + c_1^2 y^2)}} = \pm \frac{P}{t t_1 s s_1} \cdot \frac{dx}{\sqrt{(1 - c^2 x^2)(1 + e^2 x^2)}}.$$

Or je dis que la fonction $\frac{P}{t t_1 s s_1}$ se réduira à une quantité constante. En effet on a

$$1 - c_1 y = (1 - cx)\frac{t^2}{\varrho};$$

en différentiant, et mettant pour dy sa valeur $\frac{P dx}{\varrho^2}$, on aura

$$P=\frac{t}{c_1}\left[ct\varrho-(1-cx)\left(2\varrho\frac{dt}{dx}-t\frac{d\varrho}{dx}\right)\right].$$

On voit de là que P est divisible par t. De la même manière on prouvera que P est divisible par les trois fonctions t_1, s, s_1. Donc si deux quelconques des quatre fonctions t, t_1, s, s_1 n'ont point de facteur commun, P sera divisible par leur produit. Or c'est ce qu'on peut voir aisément à l'aide des expressions de ces fonctions. Donc $\frac{P}{tt_1ss_1}$ est une fonction entière de x. Or P est du degré $4n$, et chacune des fonctions t, t_1, s, s_1 est du degré n. Donc il est prouvé que $\frac{P}{tt_1ss_1}$ est une quantité constante. En la désignant par a, il viendra

(254) $$\frac{dy}{\sqrt{(1-c_1^2y^2)(1+e_1^2y^2)}}=\pm a\frac{dx}{\sqrt{(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)}}.$$

Pour déterminer a il suffit d'attribuer à x une valeur particulière. En faisant par exemple $x=0$, on aura

$$t=t_1=s=s_1=1;\quad P=\varrho^2\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dx}=k\psi'x.$$

Or en différentiant l'expression de ψx, et faisant ensuite $x=0$, il viendra $\psi'x=g$, donc

(255) $$a=kg.$$

On peut donner aux expressions de c_1, e_1, g, a d'autres formes plus simples, et qui mettront en évidence plusieurs propriétés remarquables de ces quantités.

Par la formule (240) on voit que le coefficient de x^{2n+1} dans la fonction R est $-\frac{A}{\varphi\varepsilon.\varphi(\varepsilon+\alpha)\dots\varphi(\varepsilon+2n\alpha)}$; or d'après les équations (238) et (243) le même coefficient sera

$$-\frac{(-1)^n}{\varphi_1\varepsilon}\cdot\frac{g}{(\varphi\alpha.\varphi2\alpha\dots\varphi n\alpha)^2},$$

donc, puisque $A=1$,

$$\varphi_1(\varepsilon)=\frac{(-1)^ng}{(\varphi\alpha.\varphi2\alpha\dots\varphi n\alpha)^2}\varphi\varepsilon.\varphi(\varepsilon+\alpha).\varphi(\varepsilon+2\alpha)\dots\varphi(\varepsilon+2n\alpha).$$

En faisant dans les équations (236), (243) $x = \frac{1}{0}$, après avoir divisé par x, on obtiendra deux valeurs de $\frac{\psi x}{x}$, savoir

$$1 \quad \text{et} \quad \frac{g(-1)^n}{(ec)^{2n}(\varphi\alpha\,.\,\varphi 2\alpha \ldots \varphi n\alpha)^4},$$

donc, en les égalant,

(256) $$g = (-1)^n (ec)^{2n} (\varphi\alpha\,.\,\varphi 2\alpha \ldots \varphi n\alpha)^4,$$

et par conséquent

(257) $$\begin{aligned}\varphi_1(\varepsilon) &= (ec)^{2n}(\varphi\alpha\,.\,\varphi 2\alpha \ldots \varphi n\alpha)^2 \varphi\varepsilon\,.\,\varphi(\varepsilon+\alpha)\,.\,\varphi(\varepsilon+2\alpha)\ldots\varphi(\varepsilon+2n\alpha)\\ &= \varphi(\varepsilon)+\varphi(\varepsilon+\alpha)+\varphi(\varepsilon+2\alpha)+\cdots+\varphi(\varepsilon+2n\alpha).\end{aligned}$$

Cette équation exprime une propriété remarquable de la fonction φ. En y posant $\varepsilon = \frac{\omega}{2}$ et $\varepsilon = \frac{\varpi}{2} i$, on obtiendra

(258) $$\left\{\begin{aligned}\varphi_1\left(\frac{\omega}{2}\right) &= \frac{1}{ke_1} = (ec)^{2n}\delta^2\,.\,\varphi\left(\frac{\omega}{2}\right)\,.\,\varphi\left(\frac{\omega}{2}+\alpha\right)\ldots\varphi\left(\frac{\omega}{2}+2n\alpha\right),\\ \varphi_1\left(\frac{\varpi}{2}i\right) &= \frac{\pm i}{ke_1} = (ec)^{2n}\delta^2\,.\,\varphi\left(\frac{\varpi}{2}i\right)\,.\,\varphi\left(\frac{\varpi}{2}i+\alpha\right)\ldots\varphi\left(\frac{\varpi}{2}i+2n\alpha\right),\end{aligned}\right.$$

où l'on a fait pour abréger

(259) $$\delta = \varphi\alpha\,.\,\varphi 2\alpha\,.\,\varphi 3\alpha \ldots \varphi n\alpha.$$

En remarquant que

$$\varphi\left(\frac{\omega}{2}+(2n-m')\alpha\right) = \varphi\left(\frac{\omega}{2}+(m'+1)\alpha\right)$$

et

$$\varphi\left(\frac{\varpi}{2}i+(2n-m')\alpha\right) = \varphi\left(\frac{\varpi}{2}i+(m'+1)\alpha\right),$$

et en faisant

(260) $$k(e^2c^2)^n\delta^2 = f,$$

on tire de ces équations

(261) $$\left\{\begin{aligned}\frac{1}{e_1} &= \frac{f}{e}\left[\varphi\left(\frac{\omega}{2}+\alpha\right)\,.\,\varphi\left(\frac{\omega}{2}+2\alpha\right)\ldots\varphi\left(\frac{\omega}{2}+n\alpha\right)\right]^2,\\ \frac{1}{e_1} &= \pm\frac{f}{e}\left[\varphi\left(\frac{\varpi}{2}i+\alpha\right)\,.\,\varphi\left(\frac{\varpi}{2}i+2\alpha\right)\ldots\varphi\left(\frac{\varpi}{2}i+n\alpha\right)\right]^2,\end{aligned}\right.$$

Multipliant et remarquant qu'on a (18)

$$\varphi\left(\frac{\omega}{2}+\alpha\right)\varphi\left(\frac{\varpi}{2}i+\alpha\right)=\frac{i}{ec},$$

on obtiendra

$$\pm\frac{1}{c_1 e_1}=\frac{(-1)^n f^2}{(ec)^{2n+1}},$$

d'où

(262) $$c_1 e_1=\pm\frac{(-1)^n.(ec)^{2n+1}}{f^2}.$$

De même en divisant on obtiendra

(263) $$\begin{cases}\pm\frac{e_1}{c_1}=(-1)^n\frac{e}{c}(ec)^{2n}\left[\varphi\left(\frac{\omega}{2}+\alpha\right).\varphi\left(\frac{\omega}{2}+2\alpha\right)\dots\varphi\left(\frac{\omega}{2}+n\alpha\right)\right]^4,\\ \pm\frac{c_1}{e_1}=(-1)^n\frac{c}{e}(ec)^{2n}\left[\varphi\left(\frac{\varpi}{2}i+\alpha\right).\varphi\left(\frac{\varpi}{2}i+2\alpha\right)\dots\varphi\left(\frac{\varpi}{2}i+n\alpha\right)\right]^4.\end{cases}$$

Précédemment nous avons trouvé $a=kg$, et $g=(-1)^n(ec)^{2n}\delta^4$, donc

(264) $$a=(-1)^n f.\delta^2.$$

Également nous avons $y=k.\psi x$, donc en vertu de l'équation (243)

(265) $$y=(-1)^n f.x\frac{(\varphi^2\alpha-x^2)(\varphi^2 2\alpha-x^2)(\varphi^2 3\alpha-x^2)\dots(\varphi^2 n\alpha-x^2)}{(1+e^2c^2\varphi^2\alpha.x^2)(1+e^2c^2\varphi^2 2\alpha.x^2)\dots(1+e^2c^2\varphi^2 n\alpha.x^2)}.$$

Donc les valeurs précédentes de c_1, e_1, a et y donneront

(266) $$\frac{dy}{\sqrt{(1-c_1^2y^2)(1+e_1^2y^2)}}=\pm\frac{a\,dx}{\sqrt{(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)}},$$

d'où

(267) $$\int\frac{dy}{\sqrt{(1-c_1^2y^2)(1+e_1^2y^2)}}=\pm a\int\frac{dx}{\sqrt{(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)}}.$$

45.

Les formules (261) donnent les valeurs des quantités c_1 et e_1, exprimées en c et e à l'aide de la fonction φ. Or on peut aussi les déterminer à l'aide d'une équation algébrique. En effet on a

$$\left[\varphi\left(\frac{\omega}{2}+\alpha\right)\right]^2=\frac{1}{c^2}\left(\frac{f\alpha}{F\alpha}\right)^2=\frac{1}{c^2}\cdot\frac{1-c^2\varphi^2\alpha}{1+e^2\varphi^2\alpha}$$

et

$$\left[\varphi\left(\frac{\varpi}{2}i+\alpha\right)\right]^2=-\frac{1}{e^2}\left(\frac{F\alpha}{f\alpha}\right)^2=-\frac{1}{e^2}\cdot\frac{1+e^2\varphi^2\alpha}{1-c^2\varphi^2\alpha};$$

donc il est clair que les valeurs de c_1 et e_1 pourront être exprimées en fonctions rationnelles et symétriques des quantités $\varphi\alpha$, $\varphi 2\alpha$, ... $\varphi n\alpha$. Donc si $2n+1$ est un nombre premier, on peut, en vertu de ce qu'on a vu (§ V), déterminer c_1 et e_1 à l'aide d'une équation algébrique du $(2n+2)^{\text{ième}}$ degré. On peut encore démontrer que la même chose aura lieu dans le cas où $2n+1$ est un nombre composé. Alors on peut même déterminer c_1 et e_1 à l'aide d'une équation d'un degré moindre que $2n+2$.

Donc on aura un certain nombre de transformations correspondantes à chaque valeur de $2n+1$.

46.

On a supposé dans ce qui précède que e et c soient des quantités réelles et positives; mais ayant exprimé c_1 et e_1 en e et c par des équations algébriques, il est clair que la formule (266) aura lieu également en donnant à e et c des valeurs réelles et imaginaires quelconques. Dans le cas où e^2, c^2 sont réelles, on peut même se servir des expressions (261), (265). Mais alors ω et ϖ ne seront pas toujours des quantités réelles. Au reste l'une des quantités c_1 et e_1, à cause de l'indéterminée f, peut être prise à volonté; seulement il faut excepter les valeurs zéro et l'infini.

47.

Si l'on suppose c et e réels et $2n+1$ premier, les valeurs de c_1 et e_1 seront imaginaires, excepté deux d'entre elles, dont l'une répond à

$$\alpha = \frac{2m\omega}{2n+1}$$

et l'autre à

$$\alpha = \frac{2\mu\varpi i}{2n+1}.$$

A. Supposons d'abord

$$\alpha = \frac{2m\omega}{2n+1}.$$

Dans ce cas on aura (261)

$$\frac{1}{c_1} = \frac{f}{c}\left[\varphi\left(\frac{\omega}{2} + \frac{2m\omega}{2n+1}\right)\cdot\varphi\left(\frac{\omega}{2} + 2\frac{2m\omega}{2n+1}\right)\cdots\varphi\left(\frac{\omega}{2} + n\frac{2m\omega}{2n+1}\right)\right]^2.$$

Soit $\mu . 2m = (2n+1)t \pm a_\mu$, où t est entier, et a_μ entier positif et moindre que $\frac{2n+1}{2}$, on aura

$$\varphi\left(\frac{\omega}{2} + \mu \frac{2m\omega}{2n+1}\right) = \varphi\left(\frac{\omega}{2} \pm \frac{a_\mu \omega}{2n+1} + t\omega\right) = (-1)^t \varphi\left(\frac{\omega}{2} \pm \frac{a_\mu \omega}{2n+1}\right)$$
$$= \pm \varphi\left(\frac{2n+1-2a_\mu}{2n+1} \frac{\omega}{2}\right).$$

Or les nombres $a_1, a_2, a_3, \dots a_n$ seront les mêmes que les suivans 1, 2, 3, ... n, mais dans un ordre différent; donc l'expression de $\frac{1}{c_1}$ pourra être mise sous la forme

(268) $$\frac{1}{c_1} = \frac{f}{c}\left[\varphi\left(\frac{1}{2n+1}\frac{\omega}{2}\right)\varphi\left(\frac{3}{2n+1}\frac{\omega}{2}\right)\cdots\varphi\left(\frac{2n-1}{2n+1}\frac{\omega}{2}\right)\right]^2.$$

De même l'équation (263) donnera

(269) $$\frac{e_1}{c_1} = \pm(-1)^n \frac{e}{c}(ec)^{2n}\left[\varphi\left(\frac{1}{2n+1}\frac{\omega}{2}\right)\varphi\left(\frac{3}{2n+1}\frac{\omega}{2}\right)\cdots\varphi\left(\frac{2n-1}{2n+1}\frac{\omega}{2}\right)\right]^4.$$

Soit maintenant $c=1$, $c_1=1$, on aura, en posant $\pm(-1)^n = 1$,

(269′) $$e_1 = e^{2n+1}\left[\varphi\left(\frac{1}{2n+1}\frac{\omega}{2}\right)\varphi\left(\frac{3}{2n+1}\frac{\omega}{2}\right)\cdots\varphi\left(\frac{2n-1}{2n+1}\frac{\omega}{2}\right)\right]^4,$$

(270) $$\int \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1+e_1^2 y^2)}} = \pm a \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1+e^2x^2)}} + \text{Const.}$$

(271) $y =$

$$(-1)^n f . x \frac{\left[\varphi^2\left(\frac{\omega}{2n+1}\right) - x^2\right]\left[\varphi^2\left(\frac{2\omega}{2n+1}\right) - x^2\right]\cdots\left[\varphi^2\left(\frac{n\omega}{2n+1}\right) - x^2\right]}{\left[1+e^2\varphi^2\left(\frac{\omega}{2n+1}\right)x^2\right]\left[1+e^2\varphi^2\left(\frac{2\omega}{2n+1}\right)x^2\right]\cdots\left[1+e^2 . \varphi^2\left(\frac{n\omega}{2n+1}\right)x^2\right]},$$

$$f = \frac{e^{n+\frac{1}{2}}}{\sqrt{e_1}},$$

(272) $$a = (-1)^n f . \left[\varphi\left(\frac{\omega}{2n+1}\right)\cdot\varphi\left(\frac{2\omega}{2n+1}\right)\cdots\varphi\left(\frac{n\omega}{2n+1}\right)\right]^2,$$

ou bien

(273) $$a = (-1)^n \left\{\frac{\varphi\left(\frac{\omega}{2n+1}\right)\cdot\varphi\left(\frac{2\omega}{2n+1}\right)\cdots\varphi\left(\frac{n\omega}{2n+1}\right)}{\varphi\left(\frac{1}{2n+1}\frac{\omega}{2}\right)\cdot\varphi\left(\frac{3}{2n+1}\frac{\omega}{2}\right)\cdots\varphi\left(\frac{2n-1}{2n+1}\frac{\omega}{2}\right)}\right\}^2.$$

Si l'on suppose e moindre que l'unité ou égal à l'unité, e_1 sera toujours

moindre que e, et lorsque $2n+1$ est un très grand nombre, e_1 sera extrêmement petit.

48.

Le signe du second membre de l'équation (270) dépend de la grandeur de x. Il pourra être jugé aisément comme il suit. On a par ce qui précède

$$\sqrt{(1-y^2)(1+e_1^2y^2)}=\pm\frac{tt_1ss_1}{\varrho^2}\sqrt{(1-x^2)(1+e^2x^2)}.$$

En supposant x réel, ϱ^2 sera toujours fini et positif, de même que $\sqrt{1+e_1^2y^2}$ et $\sqrt{1+e^2x^2}$. Donc le signe du second membre de l'équation est le même que celui de la quantité

$$tt_1ss_1\sqrt{\frac{1-x^2}{1-y^2}};$$

maintenant on a

$$ss_1=\left\{1-\frac{x^2}{\varphi^2\left(\frac{\tilde\omega}{2}i+\alpha\right)}\right\}\cdots\left\{1-\frac{x^2}{\varphi^2\left(\frac{\tilde\omega}{2}i+n\alpha\right)}\right\};$$

or $\varphi\left(\frac{\tilde\omega}{2}i+\alpha\right)=\frac{i}{e}\cdot\frac{F\alpha}{f\alpha}$ etc., donc

$$ss_1=\left[1+\left(\frac{ef\alpha\,.\,x}{F\alpha}\right)^2\right]\cdots\left[1+\left(\frac{efn\alpha\,.\,x}{Fn\alpha}\right)^2\right];$$

donc, en remarquant que α est réel dans le cas que nous considérons, on voit que ss_1 sera toujours une quantité positive; or tt_1 est réel, donc la quantité $\sqrt{\frac{1-x^2}{1-y^2}}$ sera positive également, et par conséquent le signe dont il s'agit sera le même que celui de la quantité tt_1. Il n'est pas difficile de voir qu'en se servant de la formule (248) et en mettant pour α sa valeur $\frac{2m\omega}{2n+1}$, on aura

$$tt_1=\left\{1-\frac{x^2}{\varphi^2\left(\frac{1}{2n+1}\frac{\omega}{2}\right)}\right\}\left\{1-\frac{x^2}{\varphi^2\left(\frac{3}{2n+1}\frac{\omega}{2}\right)}\right\}\cdots\left\{1-\frac{x^2}{\varphi^2\left(\frac{2n-1}{2n+1}\frac{\omega}{2}\right)}\right\},$$

quantité qui est positive depuis $x=0$ jusqu'à $x=\varphi\left(\frac{1}{2n+1}\frac{\omega}{2}\right)$, négative

depuis $x=\varphi\left(\frac{1}{2n+1}\,\frac{\omega}{2}\right)$ jusqu'à $x=\varphi\left(\frac{3}{2n+1}\,\frac{\omega}{2}\right)$, positive depuis $x=\varphi\left(\frac{3}{2n+1}\,\frac{\omega}{2}\right)$ jusqu'à $x=\varphi\left(\frac{5}{2n+1}\,\frac{\omega}{2}\right)$ etc.

Si x est plus grand que l'unité tt_1 aura toujours le même signe, savoir $(-1)^n$. Donc, dans ce cas, l'équation (270) donnera, en intégrant à partir de $x=1$,

(274) $$\int_1^y \frac{dy}{\sqrt{(y^2-1)(1+e_1^2y^2)}} = a\int_1^x \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(1+e^2x^2)}}.$$

Si la valeur de x est moindre que l'unité, on aura

(275) $$\int \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1+e_1^2y^2)}} = a\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1+e^2x^2)}} + \text{Const.}$$

entre les limites $x=\varphi\left(\frac{4m-1}{2n+1}\,\frac{\omega}{2}\right)$ et $x=\varphi\left(\frac{4m+1}{2n+1}\,\frac{\omega}{2}\right)$, et

(276) $$-\int \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1+e_1^2y^2)}} = a\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1+e^2x^2)}} + \text{Const.}$$

entre les limites $x=\varphi\left(\frac{4m+1}{2n+1}\,\frac{\omega}{2}\right)$ et $x=\varphi\left(\frac{4m+3}{2n+1}\,\frac{\omega}{2}\right)$.

Si par exemple on suppose x renfermé entre les limites

$$-\varphi\left(\frac{1}{2n+1}\,\frac{\omega}{2}\right) \quad \text{et} \quad +\varphi\left(\frac{1}{2n+1}\,\frac{\omega}{2}\right)$$

on aura, en intégrant à partir de $x=0$,

(277) $$\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1+e_1^2y^2)}} = a\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1+e^2x^2)}}.$$

En faisant $x=\varphi\left(\frac{\omega}{(2n+1).2}\right)$, on aura $y=(-1)^n$, et par suite

$$\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1+e_1^2y^2)}} = \frac{a\omega}{2(2n+1)}(-1)^n,$$

d'où

(278) $$(-1)^n a = \frac{4n+2}{\omega}\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1+e_1^2y^2)}}.$$

Cette expression de a est très commode pour le calcul. En négligeant les quantités de l'ordre e_1^2, on obtiendra

(279) $$(-1)^n a = (2n+1)\frac{\pi}{\omega}.$$

En substituant et négligeant toujours e_1^2, la formule (277) donnera

(280) $$\left\{\begin{aligned} &\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1+e^2x^2)}} = \frac{(-1)^n\omega}{(2n+1)\pi}\,\text{arc. sin}\,(y), \\ &y = (-1)^n(2n+1)\frac{\pi}{\omega}x\frac{\left\{1-\dfrac{x^2}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2n+1}\right)}\right\}\cdots\left\{1-\dfrac{x^2}{\varphi^2\left(\frac{n\omega}{2n+1}\right)}\right\}}{\left[1+e^2\varphi^2\left(\frac{\omega}{2n+1}\right)x^2\right]\cdots\left[1+e^2\varphi^2\left(\frac{n\omega}{2n+1}\right)x^2\right]}. \end{aligned}\right.$$

B. Dans le cas où $\alpha = \dfrac{2\mu\varpi i}{2n+1}$, on trouvera de la même manière la formule suivante

(281) $$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1+e^2x^2)}} = a'\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1+e_1^2y^2)}},$$

où

$$e_1 = \frac{1}{e^{2n-1}\left[\varphi\left(\frac{1}{2n+1}\frac{\varpi i}{2}\right)\varphi\left(\frac{3}{2n+1}\frac{\varpi i}{2}\right)\cdots\varphi\left(\frac{2n-1}{2n+1}\frac{\varpi i}{2}\right)\right]^4},$$

$$a' = \frac{1}{e^{2n}\left[\varphi\left(\frac{1}{2n+1}\frac{\varpi}{2}i\right)\cdot\varphi\left(\frac{2}{2n+1}\frac{\varpi}{2}i\right)\varphi\left(\frac{3}{2n+1}\frac{\varpi}{2}i\right)\cdots\varphi\left(\frac{2n}{2n+1}\frac{\varpi}{2}i\right)\right]^2},$$

$$y = \frac{e^{n+\frac{1}{2}}}{\sqrt{e_1}}x\frac{\left[x^2-\varphi^2\left(\frac{\varpi i}{2n+1}\right)\right]\left[x^2-\varphi^2\left(\frac{2\varpi i}{2n+1}\right)\right]\cdots\left[x^2-\varphi^2\left(\frac{n\varpi i}{2n+1}\right)\right]}{\left[1+e^2\varphi^2\left(\frac{\varpi i}{2n+1}\right)x^2\right]\left[1+e^2\varphi^2\left(\frac{2\varpi i}{2n+1}\right)x^2\right]\cdots\left[1+e^2\varphi^2\left(\frac{n\varpi i}{2n+1}\right)x^2\right]}.$$

La formule précédente a lieu pour toutes les valeurs de x moindres que l'unité.

49.

Pour avoir une théorie complète de la transformation des fonctions elliptiques, il faudrait connaître toutes les transformations possibles; or je suis parvenu à démontrer qu'on les obtient toutes, en combinant celle de M. *Legendre* avec celles contenues dans la formule ci-dessus, *même en cherchant la relation la plus générale entre un nombre quelconque de fonctions elliptiques.*

Ce théorème, dont les conséquences embrassent presque toute la théorie des fonctions elliptiques, m'a conduit à un très grand nombre de belles propriétés de ces fonctions.

§ X.

Sur l'intégration de l'équation séparée

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1+\mu y^2)}} = a\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1+\mu x^2)}}.$$

50.

On peut toujours, comme on sait, présenter l'intégrale complète de cette équation sous une forme algébrique, lorsque la quantité constante a est un *nombre rationnel*, quelle que soit d'ailleurs la valeur réelle ou imaginaire de μ. Mais si a n'est pas un nombre rationnel, cela n'a pas lieu. A cet égard je suis parvenu aux théorèmes suivants:

Théorème I. En supposant a réel, et l'équation intégrable algébriquement, il faut nécessairement que a soit un nombre rationnel.

Théorème II. En supposant a *imaginaire*, et l'équation intégrable *algébriquement*, il faut nécessairement que a soit de la forme $m \pm \sqrt{-1}.\sqrt{n}$, où m et n sont des nombres rationnels. Dans ce cas la quantité μ n'est pas arbitraire; il faut qu'elle satisfasse à une équation qui a une infinité de racines réelles et imaginaires. Chaque valeur de μ satisfait à la question.

La démonstration de ces théorèmes fait partie d'une théorie très étendue des fonctions elliptiques dont je m'occupe actuellement, et qui paraîtra aussitôt qu'il me sera possible. Je me borne ici à considérer un cas particulier, qu'on peut tirer des formules du paragraphe précédent.

Si dans la formule (270) on pose

$$e_1 = \frac{1}{e},$$

et si l'on remplace y par $\frac{ey}{i}$, il viendra

(282) $$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1+e^2y^2)}} = a\sqrt{-1}\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1+e^2x^2)}},$$

où

(283) $$y = \pm\sqrt{-1}\,.\,e^n x \frac{\left[\varphi^2\left(\frac{\omega}{2n+1}\right) - x^2\right] \cdots \left[\varphi^2\left(\frac{n\omega}{2n+1}\right) - x^2\right]}{\left[1 + e^2\varphi^2\left(\frac{\omega}{2n+1}\right)x^2\right] \cdots \left[1 + e^2\varphi^2\left(\frac{n\omega}{2n+1}\right)x^2\right]};$$

e est déterminé par l'équation (269′), qui deviendra

(284) $$1 = e^{n+1}\left[\varphi\left(\frac{1}{2n+1}\,\frac{\omega}{2}\right) \cdots \varphi\left(\frac{2n-1}{2n+1}\,\frac{\omega}{2}\right)\right]^2,$$

et a par

$$a = \pm\frac{1}{e}\left\{\frac{\varphi\left(\frac{\omega}{2n+1}\right) \cdots \varphi\left(\frac{n\omega}{2n+1}\right)}{\varphi\left(\frac{1}{2n+1}\,\frac{\omega}{2}\right) \cdots \varphi\left(\frac{2n-1}{2n+1}\,\frac{\omega}{2}\right)}\right\}^2.$$

Donc on connaît une intégrale particulière de l'équation (282) et par conséquent on en pourra trouver l'intégrale complète.

Dans le cas que nous considérons, la valeur de a est $\sqrt{2n+1}$, ce qu'on démontrera aisément comme il suit:

En mettant dans l'équation (282) $y = z\sqrt{-1}$, et intégrant entre les limites zéro et $\varphi\left(\frac{\omega}{4n+2}\right)$, il viendra

$$\frac{\varpi}{2} = \int_0^{\frac{1}{e}} \frac{dz}{\sqrt{(1+z^2)(1-e^2z^2)}} = a\frac{\omega}{4n+2},$$

en remarquant que les limites de z seront zéro et $\frac{1}{e}$. En faisant de même $x\sqrt{-1} = z$, et intégrant entre les limites zéro et $\frac{1}{e}$, on trouvera que les limites de y seront zéro et l'unité et par conséquent

$$\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1+e^2y^2)}} = \frac{\omega}{2} = a\int_0^{\frac{1}{e}} \frac{dz}{\sqrt{(1+z^2)(1-e^2z^2)}} = a\frac{\varpi}{2}.$$

Donc on a

$$\frac{\varpi}{2} = \frac{a}{2n+1}\,\frac{\omega}{2}$$

et

$$\frac{\omega}{2} = a\,\frac{\varpi}{2},$$

d'où l'on tire

(285) $$a = \sqrt{2n+1},$$

(286) $$\frac{\omega}{\varpi} = \sqrt{2n+1}.$$

Donc l'équation différentielle deviendra

(287) $$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1+e^2y^2)}} = \sqrt{-1}\,.\sqrt{2n+1}\,\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1+e^2x^2)}}.$$

51.

Pour donner un exemple, considérons le cas où $n=1$ et $n=2$.

A. Si $n=1$, on aura

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1+e^2y^2)}} = \sqrt{-3}\,\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1+e^2x^2)}},$$

$$y = \sqrt{-1}\,.\,ex\,\frac{\varphi^2\left(\frac{\omega}{3}\right) - x^2}{1 + e^2\,.\,\varphi^2\left(\frac{\omega}{3}\right).\,x^2},$$

e est déterminée par l'équation

$$1 = e^2\left[\varphi\left(\frac{1}{3}\,\frac{\omega}{2}\right)\right]^2.$$

On a

$$\varphi\left(\frac{\omega}{6}\right) = \varphi\left(\frac{\omega}{2} - \frac{\omega}{3}\right) = \varphi\left(\frac{\omega}{2}\right)\frac{f\left(\frac{\omega}{3}\right)}{F\left(\frac{\omega}{3}\right)} = \frac{\sqrt{1-\varphi^2\left(\frac{\omega}{3}\right)}}{\sqrt{1+e^2\varphi^2\left(\frac{\omega}{3}\right)}},$$

donc

$$1 = e^2\,\frac{1-\varphi^2\left(\frac{\omega}{3}\right)}{1+e^2\varphi^2\left(\frac{\omega}{3}\right)} = \frac{e^2 - e^2\varphi^2\left(\frac{\omega}{3}\right)}{1+e^2\varphi^2\left(\frac{\omega}{3}\right)},$$

$$a = \frac{\varphi^2\left(\frac{\omega}{3}\right)}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{6}\right)}\cdot\frac{1}{e}.$$

Maintenant on trouvera, en combinant ces équations et remettant pour a sa valeur $\sqrt{3}$,

$$\sqrt{3} = e\,\varphi^2\left(\frac{\omega}{3}\right),$$

donc

$$\varphi^2\left(\frac{\omega}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{e},$$

et par suite

$$1 = \frac{e^2 - e\sqrt{3}}{1 + e\sqrt{3}},$$

d'où

$$e^2 - 2\sqrt{3} . e = 1,$$

et

$$e = \sqrt{3} + 2.$$

Ayant trouvé e, on aura

$$\varphi^2\left(\frac{\omega}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} - 3.$$

Donc on aura l'équation différentielle

(288) $$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)[1+(2+\sqrt{3})^2y^2]}} = \sqrt{-3} . \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)[1+(2+\sqrt{3})^2x^2]}},$$

qui sera satisfaite par l'intégrale algébrique

$$y = \sqrt{-1} . x \frac{\sqrt{3} - (2+\sqrt{3})x^2}{1 + \sqrt{3}(2+\sqrt{3})x^2}.$$

Si l'on pose $x\sqrt{2-\sqrt{3}}$ au lieu de x, et $y\sqrt{2-\sqrt{3}} . \sqrt{-1}$ au lieu de y, on obtiendra l'équation

(289) $$\frac{dy}{\sqrt{1 - 2\sqrt{3} . y^2 - y^4}} = \sqrt{3} \frac{dx}{\sqrt{1 + 2\sqrt{3} . x^2 - x^4}},$$

qui sera satisfaite par

$$y = x \frac{\sqrt{3} - x^2}{1 + \sqrt{3} . x^2}.$$

B. Si $n = 2$, on aura l'équation différentielle

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1+e^2y^2)}} = \sqrt{-5} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1+e^2x^2)}},$$

où

$$y = \sqrt{-1} . e^2 x \frac{\varphi^2\left(\frac{\omega}{5}\right) - x^2}{1 + e^2\varphi^2\left(\frac{\omega}{5}\right) . x^2} . \frac{\varphi^2\left(\frac{2\omega}{5}\right) - x^2}{1 + e^2\varphi^2\left(\frac{2\omega}{5}\right) . x^2},$$

(290) $$1 = e^3\varphi^2\left(\frac{\omega}{10}\right)\varphi^2\left(\frac{3\omega}{10}\right); \quad \sqrt{5} = e^2\varphi^2\left(\frac{\omega}{5}\right)\varphi^2\left(\frac{2\omega}{5}\right).$$

On a

$$(291)\quad \begin{cases} \varphi^2\left(\frac{\omega}{10}\right)=\varphi^2\left(\frac{\omega}{2}-\frac{2\omega}{5}\right)=\dfrac{f^2\left(\frac{2\omega}{5}\right)}{F^2\left(\frac{2\omega}{5}\right)}, \\ \varphi^2\left(\frac{3\omega}{10}\right)=\varphi^2\left(\frac{\omega}{2}-\frac{\omega}{5}\right)=\dfrac{f^2\left(\frac{\omega}{5}\right)}{F^2\left(\frac{\omega}{5}\right)}, \end{cases}$$

$$\frac{f\left(\frac{2\omega}{5}+\frac{\omega}{5}\right)}{F\left(\frac{2\omega}{5}+\frac{\omega}{5}\right)}=\frac{f\left(\frac{3\omega}{5}\right)}{F\left(\frac{3\omega}{5}\right)}=\frac{f\left(\frac{2\omega}{5}\right)f\left(\frac{\omega}{5}\right)-\varphi\left(\frac{2\omega}{5}\right)\varphi\left(\frac{\omega}{5}\right)F\left(\frac{2\omega}{5}\right)F\left(\frac{\omega}{5}\right)}{F\left(\frac{2\omega}{5}\right)F\left(\frac{\omega}{5}\right)+e^2\varphi\left(\frac{2\omega}{5}\right)\varphi\left(\frac{\omega}{5}\right)f\left(\frac{2\omega}{5}\right)f\left(\frac{\omega}{5}\right)},$$

$$\frac{f\left(\frac{2\omega}{5}-\frac{\omega}{5}\right)}{F\left(\frac{2\omega}{5}-\frac{\omega}{5}\right)}=\frac{f\left(\frac{\omega}{5}\right)}{F\left(\frac{\omega}{5}\right)}=\frac{f\left(\frac{2\omega}{5}\right)f\left(\frac{\omega}{5}\right)+\varphi\left(\frac{2\omega}{5}\right)\varphi\left(\frac{\omega}{5}\right)F\left(\frac{2\omega}{5}\right)F\left(\frac{\omega}{5}\right)}{F\left(\frac{2\omega}{5}\right)F\left(\frac{\omega}{5}\right)-e^2\varphi\left(\frac{2\omega}{5}\right)\varphi\left(\frac{\omega}{5}\right)f\left(\frac{2\omega}{5}\right)f\left(\frac{\omega}{5}\right)}.$$

En multipliant ces valeurs de $\dfrac{f\left(\frac{3\omega}{5}\right)}{F\left(\frac{3\omega}{5}\right)}$ et $\dfrac{f\left(\frac{\omega}{5}\right)}{F\left(\frac{\omega}{5}\right)}$ entre elles, et remarquant que

$$f\left(\frac{3\omega}{5}\right)=-f\left(\frac{2\omega}{5}\right),$$

$$F\left(\frac{3\omega}{5}\right)=\quad F\left(\frac{2\omega}{5}\right),$$

on obtiendra

$$-P=\frac{P^2-\varphi^2\left(\frac{\omega}{5}\right)\varphi^2\left(\frac{2\omega}{5}\right)}{1-e^4\cdot\varphi^2\left(\frac{\omega}{5}\right)\varphi^2\left(\frac{2\omega}{5}\right)\cdot P^2},$$

où l'on a fait pour abréger

$$P=\frac{f\left(\frac{2\omega}{5}\right).f\left(\frac{\omega}{5}\right)}{F\left(\frac{2\omega}{5}\right)F\left(\frac{\omega}{5}\right)}.$$

Cela posé les équations (290, 291) donneront

$$1=e^3P^2,\quad \varphi^2\left(\frac{\omega}{5}\right)\varphi^2\left(\frac{2\omega}{5}\right)=\frac{\sqrt{5}}{e^2},$$

donc, en substituant,

$$-\frac{1}{e\sqrt{e}}=\frac{\frac{1}{e^3}-\frac{\sqrt{5}}{e^2}}{1-\frac{\sqrt{5}}{e}}=\frac{1}{e^2}\,\frac{1-e\sqrt{5}}{e-\sqrt{5}},$$

d'où

$$-\sqrt{e}=\frac{1-e\sqrt{5}}{e-\sqrt{5}},$$

$$e^3-1-(5+2\sqrt{5})e(e-1)=0.$$

Les racines de cette équation sont

$$e=1,\quad e=2+\sqrt{5}-2\sqrt{2+\sqrt{5}},\quad e=2+\sqrt{5}+2\sqrt{2+\sqrt{5}}.$$

La dernière de ces racines,

$$e=2+\sqrt{5}+2\sqrt{2+\sqrt{5}}=\left[\frac{\sqrt{5}+1}{2}+\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}\right]^2,$$

répond à la question, car l'équation

$$1=e^3\varphi^2\left(\frac{\omega}{10}\right)\varphi^2\left(\frac{3\omega}{10}\right)$$

fait voir que e doit être plus grand que l'unité. Connaissant e, on trouve la valeur des quantités $\varphi\left(\frac{\omega}{5}\right)$ et $\varphi\left(\frac{2\omega}{5}\right)$ comme il suit.

Nous avons

$$1=e^3P^2=e^3\frac{f^2\left(\frac{\omega}{5}\right)f^2\left(\frac{2\omega}{5}\right)}{F^2\left(\frac{\omega}{5}\right)F^2\left(\frac{2\omega}{5}\right)};$$

or en faisant $\varphi\left(\frac{\omega}{5}\right)=\alpha$ et $\varphi\left(\frac{2\omega}{5}\right)=\beta$, on aura

$$f^2\left(\frac{\omega}{5}\right)=1-\alpha^2,\qquad f^2\left(\frac{2\omega}{5}\right)=1-\beta^2,$$

$$F^2\left(\frac{\omega}{5}\right)=1+e^2\alpha^2,\quad F^2\left(\frac{2\omega}{5}\right)=1+e^2\beta^2,$$

donc

$$(1+e^2\alpha^2)(1+e^2\beta^2)=e^3(1-\alpha^2)(1-\beta^2),$$

$$1+e^2(\alpha^2+\beta^2)+e^4\alpha^2\beta^2=e^3-e^3(\alpha^2+\beta^2)+e^3\alpha^2\beta^2,$$

$$e^3-1-e^3(e-1)\alpha^2\beta^2=e^2(e+1)(\alpha^2+\beta^2);$$

or nous avons trouvé plus haut, $\alpha^2\beta^2=\frac{\sqrt{5}}{e^2}$, donc

$$e^3-1-e(e-1)\sqrt{5}=e^2(e+1)(\alpha^2+\beta^2).$$

Donc on connaît $\alpha^2\beta^2$ et $\alpha^2+\beta^2$, et par suite α^2 et β^2 par la résolution d'une équation du second degré. On a donc aussi la valeur de y, qui satisfait à l'équation

(292)
$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)[1+(2+\sqrt{5}+2\sqrt{2+\sqrt{5}})^2y^2]}} = \sqrt{-5}\,\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)[1+(2+\sqrt{5}+2\sqrt{2+\sqrt{5}})^2x^2]}}.$$

Si l'on pose $\frac{x}{\sqrt{e}}$ au lieu de x, et $\frac{y\sqrt{-1}}{\sqrt{e}}$ au lieu de y, on obtiendra l'équation

(293)
$$\frac{dy}{\sqrt{1-4\sqrt{2+\sqrt{5}}\,.\,y^2-y^4}} = \sqrt{5}\,\frac{dx}{\sqrt{1+4\sqrt{2+\sqrt{5}}\,.\,x^2-x^4}},$$

où

$$y = x\cdot\frac{\sqrt{5}-\sqrt{10+10\sqrt{5}}\,.\,x^2+x^4}{1+\sqrt{10+10\sqrt{5}}\,.\,x^2+\sqrt{5}\,.\,x^4}.$$

52.

Dans les deux cas que nous venons de considérer, il n'était pas difficile de trouver la valeur de la quantité e, mais la valeur de n étant plus grande, on parviendra à des équations algébriques, qui peut-être ne seront pas résolubles algébriquement.

Néanmoins on peut dans tous les cas exprimer la valeur de e par des séries, et comme leur forme est très remarquable, je vais les rapporter ici.

En faisant dans la formule (206) $\alpha=1$, on aura, en remarquant que $c=1$, $\varphi\left(\frac{\omega}{2}\right)=\frac{1}{c}$,

(294)
$$e\omega = 4\pi\left(\frac{\varrho}{\varrho^2+1}+\frac{\varrho^3}{\varrho^6+1}+\frac{\varrho^5}{\varrho^{10}+1}+\cdots\right),$$

où

$$\varrho = h^{\frac{\varpi}{\omega}\frac{\pi}{2}}.$$

En faisant de même dans la formule (204) $\alpha=\frac{\varpi}{2}i$, on aura $\varphi\left(\frac{\varpi}{2}i\right) =\frac{i}{e}$; $\varepsilon=h^{\frac{\pi}{2}i}=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=i$, donc

$$\frac{i}{e} = \frac{2}{e}\frac{\pi}{\varpi}\left(\frac{i - i^{-1}}{r + r^{-1}} - \frac{i^3 - i^{-3}}{r^3 + r^{-3}} + \cdots\right),$$

c'est-à-dire

$$\varpi = 4\pi\left(\frac{r}{r^2+1} + \frac{r^3}{r^6+1} + \frac{r^5}{r^{10}+1} + \cdots\right),$$

où

$$r = h^{\frac{\omega}{\varpi}\frac{\pi}{2}}.$$

Maintenant dans le cas que nous considérons, on a

$$\frac{\omega}{\varpi} = \sqrt{2n+1},$$

et par conséquent

(295) $$\omega = 4\pi\sqrt{2n+1}\left\{\frac{h^{\frac{\pi}{2}\sqrt{2n+1}}}{h^{\pi\sqrt{2n+1}}+1} + \frac{h^{\frac{3\pi}{2}\sqrt{2n+1}}}{h^{3\pi\sqrt{2n+1}}+1} + \cdots\right\}.$$

Cette formule donne la valeur de

$$\omega = 2\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1+e^2x^2)}}.$$

Ensuite on aura la valeur de e par la formule (294) qui donne, en substituant pour ϱ sa valeur $h^{\frac{\varpi}{\omega}\frac{\pi}{2}} = h^{\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\frac{\pi}{2}}$,

(296) $$e = \frac{4\pi}{\omega}\left\{\frac{h^{\frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{2n+1}}}}{h^{\frac{\pi}{\sqrt{2n+1}}}+1} + \frac{h^{\frac{3\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{2n+1}}}}{h^{\frac{3\pi}{\sqrt{2n+1}}}+1} + \cdots\right\},$$

h est le nombre 2,7182818 ....

Addition au mémoire précédent.

Ayant terminé le mémoire précédent sur les fonctions elliptiques, une note sur les mêmes fonctions par M. *C. G. J. Jacobi*, inserée dans le n° 123, année 1827, du recueil de M. *Schumacher* qui a pour titre "*Astronomische Nachrichten*", m'est venue sous les yeux. M. *Jacobi* donne le théorème suivant:

Soit p un nombre impair et θ' un angle tel qu'on ait, en désignant l'intégrale $\int \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$, prise de 0 jusqu'à θ, par $F(k,\theta)$,

$$F(k,\theta') = \frac{1}{p} F(k, 90^\circ),$$

et en général $\theta^{(m)}$ un angle tel qu'on ait

$$F(k,\theta^{(m)}) = \frac{m}{p} F(k, 90^\circ);$$

soit déterminé encore l'angle ψ par l'équation

$$\operatorname{tang}(45^\circ - \tfrac{1}{2}\psi) = \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\theta'-\theta)}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\theta'+\theta)} \cdot \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\theta'''+\theta)}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\theta'''-\theta)} \cdots \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\theta^{(p-2)}\pm\theta)}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\theta^{(p-2)}\mp\theta)} \operatorname{tang}(45^\circ \mp \tfrac{1}{2}\theta):$$

on aura

$$F(k,\theta) = \mu . F(\lambda, \psi).$$

Il faut admettre le signe supérieur si p est de la forme $4n+1$, et le signe inférieur, si p est de la forme $4n-1$. ψ doit être pris entre $\frac{m}{2}\pi$ et $\frac{m+1}{2}\pi$, si θ tombe entre $\theta^{(m)}$ et $\theta^{(m+1)}$. Les constantes μ et λ se déterminent de différentes manières. On a par exemple

$$\mu = \frac{1}{2(\operatorname{cosec}\theta' - \operatorname{cosec}\theta''' + \cdots \mp \operatorname{cosec}\theta^{(p-2)} \pm \frac{1}{2})},$$

$$\lambda = 2k\mu(\sin\theta' - \sin\theta''' + \cdots \mp \sin\theta^{(p-2)} \pm \tfrac{1}{2}).$$

Ce théorème élégant que M. *Jacobi* donne sans démonstration est contenu comme cas particulier dans la formule (227) du mémoire précédent, et au fond il est le même que celui de la formule (270). Nous allons le démontrer.

En faisant dans l'intégrale

$$\alpha = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

$x = \sin\theta$, on aura

$$\alpha = \int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}};$$

mais

$$x = \varphi\alpha,$$

donc

$$\alpha = F(k, \theta) \quad \text{donne} \quad \sin\theta = \varphi\alpha.$$

Si $\theta = 90^\circ$, on a $x = 1$, donc

$$\frac{\omega}{2} = F(k, 90^\circ).$$

Donc en faisant $\theta = \theta^{(m)}$, on aura

$$F(k, \theta^{(m)}) = \frac{m}{p}\,\frac{\omega}{2} \quad \text{et} \quad \sin\theta^{(m)} = \varphi\left(\frac{m}{p}\,\frac{\omega}{2}\right).$$

Cela posé, faisons dans les formules (269′) et (270),

$$e_1^2 = -\lambda^2, \quad e^2 = -k^2, \quad \mu = \frac{(-1)^n}{a},$$

$$x = (-1)^n \sin\theta, \quad y = \sin\psi, \quad 2n+1 = p,$$

il viendra

(1) $$\int \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\theta}} = \pm\mu \int \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2\psi}} + C,$$

où les quantités μ, λ, ψ sont déterminées par les équations

$$\lambda = k^{2n+1} (\sin\theta' . \sin\theta''' \ldots \sin\theta^{(2n-1)})^4,$$

$$\mu = \left(\frac{\sin\theta' . \sin\theta''' \ldots \sin\theta^{(2n-1)}}{\sin\theta'' . \sin\theta'''' \ldots \sin\theta^{(2n)}}\right)^2,$$

(2) $\sin\psi$

$$= \frac{k^{n+\frac{1}{2}}}{\sqrt{\lambda}} \sin\theta \, \frac{(\sin^2\theta'' - \sin^2\theta)(\sin^2\theta'''' - \sin^2\theta) \ldots (\sin^2\theta^{(2n)} - \sin^2\theta)}{(1 - k^2 \sin^2\theta'' \sin^2\theta)(1 - k^2 \sin^2\theta'''' \sin^2\theta) \ldots (1 - k^2 \sin^2\theta^{(2n)} \sin^2\theta)}.$$

Nous supposons k moindre que l'unité, car dans le cas contraire ω serait une quantité imaginaire.

Cela posé, considérons les équations (249). En remarquant que $c_1 = c = 1$, on en tire

$$\sqrt{\frac{1-y}{1+y}} = \frac{t}{t_1} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}},$$

où

$$\frac{t}{t_1} = \frac{\varphi\left(\frac{\omega}{2} + \alpha\right) - x}{\varphi\left(\frac{\omega}{2} + \alpha\right) + x} \cdot \frac{\varphi\left(\frac{\omega}{2} + 2\alpha\right) - x}{\varphi\left(\frac{\omega}{2} + 2\alpha\right) + x} \cdots \frac{\varphi\left(\frac{\omega}{2} + n\alpha\right) - x}{\varphi\left(\frac{\omega}{2} + n\alpha\right) + x},$$

ou, en faisant $\alpha = \frac{2m\omega}{2n+1}$ et $m = -1$,

$$\frac{t}{t_1} = \frac{\varphi\left(\frac{2n-1}{2n+1}\frac{\omega}{2}\right)+x}{\varphi\left(\frac{2n-1}{2n+1}\frac{\omega}{2}\right)-x}\cdot\frac{\varphi\left(\frac{2n-3}{2n+1}\frac{\omega}{2}\right)-x}{\varphi\left(\frac{2n-3}{2n+1}\frac{\omega}{2}\right)+x}\cdots\frac{(-1)^n\varphi\left(\frac{1}{2n+1}\frac{\omega}{2}\right)-x}{(-1)^n\varphi\left(\frac{1}{2n+1}\frac{\omega}{2}\right)+x}.$$

Maintenant on a

$$x = (-1)^n \sin\theta, \quad \text{et} \quad \varphi\left(\frac{m}{2n+1}\frac{\omega}{2}\right) = \sin\theta^{(m)},$$

donc en substituant:

$$\sqrt{\frac{1-\sin\psi}{1+\sin\psi}} = \sqrt{\frac{1-(-1)^n\sin\theta}{1+(-1)^n\sin\theta}}\cdot\frac{\sin\theta'-\sin\theta}{\sin\theta'+\sin\theta}\cdot\frac{\sin\theta'''+\sin\theta}{\sin\theta'''-\sin\theta}\cdots\frac{\sin\theta^{(2n-1)}+(-1)^n\sin\theta}{\sin\theta^{(2n-1)}-(-1)^n\sin\theta},$$

et de là

$$\operatorname{tang}(45^\circ - \tfrac{1}{2}\psi)$$
$$= \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\theta'-\theta)}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\theta'+\theta)}\cdot\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\theta'''+\theta)}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\theta'''-\theta)}\cdots\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}[\theta^{(2n-1)}+(-1)^n\theta]}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}[\theta^{(2n-1)}-(-1)^n\theta]}\operatorname{tang}[45^\circ-(-1)^n\tfrac{1}{2}\theta].$$

C'est précisément la formule de M. *Jacobi.*

Dans la formule (1), on peut toujours supposer le second membre positif. En effet, en différentiant, on aura

$$\pm \mu\, d\psi = \frac{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\psi}}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}\cdot d\theta.$$

En supposant θ toujours croissant, le second membre sera toujours positif. Donc en déterminant la valeur ψ de sorte qu'elle soit croissante et décroissante en même temps que θ, on doit prendre le signe supérieur. On a donc

$$\int_0 \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} = \mu\int_0 \frac{d\psi}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\psi}},$$

ou bien

$$F(k,\theta) = \mu F(\lambda,\psi).$$

En remarquant que ψ doit être croissant et décroissant en même temps que θ, et en ayant égard à la formule (2), on tirera aisément la conséquence que ψ doit tomber entre $\frac{m}{2}\pi$ et $\frac{m+1}{2}\pi$, si θ tombe entre $\theta^{(m)}$ et $\theta^{(m+1)}$.

Quant aux quantités λ et μ, il est évident qu'elles ont nécessairement les mêmes valeurs que celles de M. *Jacobi*. Mais les expressions que j'ai données seront plus commodes pour l'application, et font voir clairement que λ est extrêmement petit, si n est un peu grand. Au reste on peut sans difficulté démontrer leur identité à l'aide de la formule (257).

XVII.

SUR LES FONCTIONS QUI SATISFONT A L'ÉQUATION $\varphi x + \varphi y = \psi(x f y + y f x)$.

Journal für die reine und angewandte Mathematik, herausgegeben von *Crelle*, Bd. 2, Berlin 1827.

L'équation

$$\varphi x + \varphi y = \psi(x f y + y f x),$$

est satisfaite lorsque

$$f y = \tfrac{1}{2} y \quad \text{et} \quad \varphi x = \psi x = \log x;$$

car cela donne

$$\log x + \log y = \log xy;$$

de même lorsque

$$f y = \sqrt{1 - y^2} \quad \text{et} \quad \varphi x = \psi x = \operatorname{arc\,sin} x,$$

ce qui donne

$$\operatorname{arc\,sin} x + \operatorname{arc\,sin} y = \operatorname{arc\,sin}\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right).$$

Il serait possible qu'on pût encore satisfaire à la même équation d'autres manières. C'est ce que nous allons examiner. Soit pour abréger

$$x f y + y f x = r,$$

l'équation de condition devient

(1) $$\varphi x + \varphi y = \psi r.$$

En différentiant cette équation par rapport à x et à y, on aura, en faisant usage de la notation de Lagrange,

$$\varphi' x = \psi' r \frac{dr}{dx} \quad \text{et} \quad \varphi' y = \psi' r \frac{dr}{dy}.$$

De ces équations on tire, en éliminant la fonction $\psi' r$,

$$\varphi' x \frac{dr}{dy} = \varphi' y \frac{dr}{dx}.$$

Or l'expression de r donne

(2) $$\frac{dr}{dx} = fy + yf'x \quad \text{et} \quad \frac{dr}{dy} = fx + xf'y$$

donc en substituant,

(3) $$\varphi' y (fy + yf'x) = \varphi' x (fx + xf'y).$$

En donnant maintenant à la quantité variable y la valeur particulière zéro, ce qui est permis parce que x et y sont des quantités indépendantes entre elles, et en faisant pour abréger

$$\varphi'(0) = a, \quad f(0) = \alpha, \quad f'(0) = \alpha',$$

l'équation (3) prendra la forme

$$a\alpha - \varphi' x (fx + \alpha' x) = 0,$$

d'où l'on tire, en écrivant y au lieu de x,

$$a\alpha - \varphi' y (fy + \alpha' y) = 0.$$

Ces deux équations donnent

(4) $$\varphi' x = \frac{a\alpha}{fx + \alpha' x} \quad \text{et} \quad \varphi' y = \frac{a\alpha}{fy + \alpha' y};$$

donc en intégrant,

(5) $$\varphi x = a\alpha \int \frac{dx}{fx + \alpha' x}.$$

De cette manière la fonction φx est déterminée par fx. Il s'agit donc de trouver la fonction fx. En substituant dans l'équation (3) les expressions (4) des fonctions $\varphi' x$ et $\varphi' y$, et réduisant, on trouvera

(6) $$(fx + \alpha' x)(fy + yf'x) = (fy + \alpha' y)(fx + xf'y)$$

d'où l'on tire, en développant,

(7) $$fx.fy + \alpha' x fy + yfx.f'x + \alpha' xyf'x$$
$$- fx.fy - \alpha' y fx - xfy.f'y - \alpha' xyf'y = 0,$$

ou bien

(8) $$x(\alpha' fy - fy.f'y - \alpha' y f'y) - y(\alpha' fx - fx.f'x - \alpha' x f'x) = 0,$$

ou en divisant par xy

(9) $$\frac{1}{y}(\alpha' fy - fy.f'y - \alpha' y f'y) - \frac{1}{x}(\alpha' fx - fx.f'x - \alpha' x f'x) = 0.$$

Les quantités x et y étant indépendantes entre elles, cette équation ne peut avoir lieu à moins qu'on n'ait

$$\frac{1}{y}(\alpha' fy - fy.f'y - \alpha' y f'y) = \frac{1}{x}(\alpha' fx - fx.f'x - \alpha' x f'x) = \text{Const.}$$

Soit donc

(10) $$\frac{1}{x}(\alpha' fx - fx.f'x - \alpha' x f'x) = m;$$

on aura

(11) $$f'x(fx + \alpha' x) + (mx - \alpha' fx) = 0.$$

Par cette équation la fonction fx est déterminée. On peut l'intégrer en faisant

$$fx = xz;$$

car alors on a

$$f'x.dx = z\,dx + x\,dz,$$

d'où l'on tire en substituant,

$$(z\,dx + x\,dz)(xz + \alpha' x) + (mx - \alpha' xz)\,dx = 0,$$

ce qui donne, en divisant par x,

$$(z\,dx + x\,dz)(z + \alpha') + (m - \alpha' z)\,dx = 0,$$

ou

$$[z(z + \alpha') + m - \alpha' z]\,dx + x\,dz(z + \alpha') = 0,$$

ou bien

$$(z^2 + m)\,dx + x\,dz(z + \alpha') = 0,$$

ou en divisant par $x(z^2 + m)$,

$$\frac{dx}{x} = -\frac{dz(z + \alpha')}{z^2 + m},$$

donc en intégrant,

$$\int \frac{dx}{x} = -\int \frac{z\,dz}{z^2 + m} - \alpha' \int \frac{dz}{z^2 + m}.$$

Soit $m=-n^2$, on aura

$$\int\frac{dx}{x}=\log x,\ \int\frac{zdz}{z^2-n^2}=\tfrac{1}{2}\log(z^2-n^2),\ \int\frac{dz}{z^2-n^2}=\frac{1}{2n}\log\frac{z-n}{z+n},$$

donc en substituant et en ajoutant une constante c,

$$\log c-\log x=\tfrac{1}{2}\log(z^2-n^2)+\frac{\alpha'}{2n}\log\frac{z-n}{z+n},$$

ou

$$\log\frac{c}{x}=\log\left\{(z^2-n^2)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{z-n}{z+n}\right)^{\frac{\alpha'}{2n}}\right\}$$

d'où

$$\frac{c}{x}=(z^2-n^2)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{z-n}{z+n}\right)^{\frac{\alpha'}{2n}}.$$

Mais on avait $fx=xz$; donc $z=\frac{fx}{x}$, et par suite en substituant,

$$\frac{c}{x}=\frac{[(fx)^2-n^2x^2]^{\frac{1}{2}}}{x}\left(\frac{fx-nx}{fx+nx}\right)^{\frac{\alpha'}{2n}},$$

ou bien

$$c=(fx-nx)^{\frac{1}{2}+\frac{\alpha'}{2n}}(fx+nx)^{\frac{1}{2}-\frac{\alpha'}{2n}},$$

ou en élevant à la $2n^{\text{ième}}$ puissance,

(12) $$c^{2n}=(fx-nx)^{n+\alpha'}(fx+nx)^{n-\alpha'};$$

$x=0$ donne $c=\alpha$, à cause de $f(0)=\alpha$.

Voilà l'équation de laquelle dépend la fonction fx. Elle n'est pas en général résoluble, parce que n et α' sont deux quantités indéterminées, qui peuvent même être imaginaires. L'équation (12) contient la forme la plus générale de la fonction fx, et on peut démontrer qu'elle satisfait à l'équation de condition donnée dans toute sa généralité. En effet la fonction fx satisfait à l'équation (11), et on voit par la forme de l'équation (9) qu'elle satisfait aussi à cette équation. Or l'équation (6) est l'équation (9) sous une forme différente. Donc la fonction fx satisfait aussi à l'équation (6). De l'équation (6) on tire l'équation (3) en faisant $\varphi'x=\frac{a\alpha}{fx+\alpha'x}$, et l'équation (3) donne, en faisant $xfy+yfx=r$,

$$\varphi'x\frac{dr}{dy}-\varphi'y\frac{dr}{dx}=0.$$

En intégrant cette équation différentielle partielle par les règles connues, on trouvera

$$r=F(\varphi x+\varphi y),$$

d'où

$$\varphi x+\varphi y=\psi r,$$

ou bien

$$\varphi x+\varphi y=\psi(xfy+yfx),$$

ce qui est l'équation de condition donnée.

Il reste encore à trouver la fonction ψ. A cet effet soit $y=0$, on aura, en remarquant que $f(0)=\alpha$,

$$\varphi x=\psi(\alpha x)-\varphi(0),$$

ou, en mettant $\frac{x}{\alpha}$ au lieu de x,

$$\psi x=\varphi\left(\frac{x}{\alpha}\right)+\varphi(0).$$

On trouve donc, en résumant, que les formes les plus générales des fonctions satisfaisant à l'équation de condition

$$\varphi x+\varphi y=\psi(xfy+yfx)$$

sont les suivantes:

$$\varphi x=a\alpha\int\frac{dx}{fx+\alpha' x}$$

et

$$\psi x=\varphi(0)+\varphi\left(\frac{x}{\alpha}\right)=a\alpha\int\frac{dx}{\alpha f\left(\frac{x}{\alpha}\right)+\alpha' x}+\varphi(0),$$

où fx dépend de l'équation

$$\alpha^{2n}=(fx-nx)^{n+\alpha'}(fx+nx)^{n-\alpha'}.$$

Soit par exemple

$$n=\alpha'=\tfrac{1}{2},$$

on aura

$$\alpha=fx-\tfrac{1}{2}x;$$

donc

$$fx=\alpha+\tfrac{1}{2}x,$$

et par suite

$$\varphi x=a\alpha\int\frac{dx}{\alpha+x}=a\alpha\log(\alpha+x)+k,$$

$$\psi x=\varphi(0)+\varphi\left(\frac{x}{\alpha}\right)=2k+a\alpha\log\alpha+a\alpha\log\left(\alpha+\frac{x}{\alpha}\right),$$

ou

$$\psi x = 2k + a\alpha \log(\alpha^2 + x).$$

L'équation de condition devient donc

$$k + a\alpha \log(\alpha + x) + k + a\alpha \log(\alpha + y)$$
$$= 2k + a\alpha \log[\alpha^2 + x(\alpha + \tfrac{1}{2}y) + y(\alpha + \tfrac{1}{2}x)];$$

ce qui a effectivement lieu, car les deux membres de cette équation se réduisent à

$$2k + a\alpha \log(\alpha^2 + \alpha x + \alpha y + xy).$$

La fonction φx est trouvée ci-dessus sous forme d'intégrale. On peut aussi trouver une forme finie pour cette fonction par des logarithmes, en supposant la fonction fx connue. Soit

$$fx + nx = v \quad \text{et} \quad fx - nx = t,$$

l'équation (12) donne

$$\alpha^{2n} = v^{n-\alpha'} t^{n+\alpha'},$$

donc

$$t^{n+\alpha'} = \alpha^{2n} v^{\alpha'-n},$$

d'où

$$t = \alpha^{\frac{2n}{n+\alpha'}} v^{\frac{\alpha'-n}{\alpha'+n}}.$$

Or $fx = \frac{1}{2}(v + t)$ et $nx = \frac{1}{2}(v - t)$, donc

$$fx = \frac{1}{2}\left(v + \alpha^{\frac{2n}{n+\alpha'}} v^{\frac{\alpha'-n}{\alpha'+n}}\right),$$

et

$$x = \frac{1}{2n} v - \frac{1}{2n} \alpha^{\frac{2n}{n+\alpha'}} v^{\frac{\alpha'-n}{\alpha'+n}},$$

d'où l'on tire en différentiant

$$dx = \left\{ \frac{1}{2n} - \frac{\alpha'-n}{2n(\alpha'+n)} \alpha^{\frac{2n}{n+\alpha'}} v^{\frac{-2n}{\alpha'+n}} \right\} dv.$$

On trouve de même

$$fx + \alpha' x = \left(\frac{1}{2} + \frac{\alpha'}{2n}\right) v + \left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha'}{2n}\right) \alpha^{\frac{2n}{n+\alpha'}} v^{\frac{\alpha'-n}{\alpha'+n}},$$

ou bien

$$fx + \alpha' x = (n + \alpha') \left\{ \frac{1}{2n} - \frac{\alpha'-n}{2n(\alpha'+n)} \alpha^{\frac{2n}{n+\alpha'}} v^{-\frac{2n}{\alpha'+n}} \right\} v;$$

donc

$$\frac{dx}{fx+\alpha' x}=\frac{dv}{(n+\alpha')v},$$

ce qui donne en intégrant,

$$\int\frac{dx}{fx+\alpha' x}=\frac{1}{n+\alpha'}\log cv=\frac{\varphi x}{a\alpha};$$

où c est une constante arbitraire. En mettant donc pour v sa valeur $fx+nx$, on aura

$$\varphi x=\frac{a\alpha}{n+\alpha'}\log(cnx+cfx). \tag{13}$$

Dans les deux cas $\alpha'=\infty$, et $n=0$, la fonction fx prend une valeur particulière. Pour la trouver, il faut recourir à l'équation différentielle (11).

Soit d'abord $n=0$, l'équation (11) donne, à cause de $m=-n^2$,

$$f'x(fx+\alpha' x)-\alpha' fx=0.$$

Soit

$$fx=zx,$$

on trouvera

$$\frac{dx}{x}=-\frac{dz(z+\alpha')}{z^2}=-\frac{dz}{z}-\frac{\alpha' dz}{z^2},$$

et en intégrant

$$\log c'+\log x=-\log z+\frac{\alpha'}{z},\quad\text{ou}\quad\log(c'xz)=\frac{\alpha'}{z},$$

ou, puisque $z=\frac{fx}{x}$,

$$\log(c'fx)=\frac{\alpha' x}{fx},\quad\text{ou}\quad \alpha' x=fx.\log(c'fx).$$

Pour $x=0$, on a $0=\alpha\log c'\alpha$, donc $c'\alpha=1$ et $c'=\frac{1}{\alpha}$, donc

$$\alpha' x=fx.\log\left(\frac{fx}{\alpha}\right), \tag{14}$$

où

$$e^{\alpha' x}=\left(\frac{fx}{\alpha}\right)^{fx}.$$

Cette équation détermine donc la fonction fx dans le cas où $n=0$. L'équation (13) donne dans ce cas

$$\varphi x=\frac{a\alpha}{\alpha'}\log(cfx)=\frac{a\alpha}{\alpha'}\log(c\alpha)+\frac{a\alpha}{\alpha'}\log\left(\frac{fx}{\alpha}\right);$$

en vertu de (14) on a

$$\log\left(\frac{fx}{\alpha}\right) = \frac{\alpha' x}{fx},$$

donc

(15) $$\varphi x = \frac{a\alpha}{\alpha'} \log c\alpha + \frac{a\alpha x}{fx}.$$

De plus

(16) $$\psi x = \varphi(0) + \varphi\left(\frac{x}{\alpha}\right) = \frac{2a\alpha}{\alpha'} \log c\alpha + \frac{ax}{f\left(\frac{x}{\alpha}\right)}.$$

L'équation de condition devient donc

$$\frac{a\alpha}{\alpha'} \log c\alpha + \frac{a\alpha x}{fx} + \frac{a\alpha}{\alpha'} \log c\alpha + \frac{a\alpha y}{fy} = \frac{2a\alpha}{\alpha'} \log c\alpha + \frac{a(xfy + yfx)}{f\left(\frac{xfy + yfx}{\alpha}\right)},$$

c'est-à-dire qu'on aura

(17) $$\alpha f\left(\frac{xfy + yfx}{\alpha}\right) = fx . fy.$$

Pour examiner cette équation, nous mettrons au lieu de x et de y leurs valeurs $\frac{fx}{\alpha'} \log \frac{fx}{\alpha}$ et $\frac{fy}{\alpha'} \log \frac{fy}{\alpha}$ tirées de l'équation (14), ce qui donne

(18) $$\alpha f\left\{\frac{fx . fy \log \frac{fx . fy}{\alpha^2}}{\alpha\alpha'}\right\} = fy . fx = \alpha fr,$$

en faisant pour abréger

(19) $$\frac{fx . fy . \log \frac{fx . fy}{\alpha^2}}{\alpha\alpha'} = r.$$

Il s'ensuit

$$2 \log \alpha + \log \frac{fr}{\alpha} = \log (fx . fy).$$

Or en vertu de l'équation (14) on a $\log \frac{fr}{\alpha} = \frac{\alpha' r}{fr}$, donc en substituant,

(20) $$2 \log \alpha + \frac{\alpha' r}{fr} = \log (fx . fy).$$

Mais puisque $fr = \frac{fx . fy}{\alpha}$ (18), on a en vertu de (19) $\frac{fr . \log\left(\frac{fx . fy}{\alpha^2}\right)}{\alpha'} = r$, donc $\frac{\alpha' r}{fr} = \log\left(\frac{fx . fy}{\alpha^2}\right)$, et par conséquent: $2 \log \alpha + \log\left(\frac{fx . fy}{\alpha^2}\right) = \log (fx . fy)$, ce qui a effectivement lieu comme on le voit aisément.

Soit ensuite $\alpha' = \infty$. En mettant dans ce cas l'équation (11) sous la forme

$$\frac{fx \cdot f'x}{\alpha'} + xf'x + \frac{mx}{\alpha'} - fx = 0,$$

il est clair qu'on doit avoir $xf'x - fx = 0$, lorsque m est fini. Il faut donc que

$$\frac{f'x \cdot dx}{fx} = \frac{dx}{x}, \quad \text{ou} \quad fx = cx.$$

Si

$$m = -p\alpha'$$

on a

$$xf'x - px - fx = 0.$$

Soit

$$fx = xz,$$

on aura

$$x(x\,dz + z\,dx) - (px + xz)\,dx = 0,$$

ou

$$x\,dz = p\,dx;$$

donc

$$z = p \log cx = \frac{fx}{x},$$

et par suite

$$fx = px \log cx.$$

Pour trouver φx, on substituera la valeur de la fonction fx dans l'équation (3); on aura, à cause de $f'x = p \log cx + p$,

$$\varphi' y(py \log cy + yp \log cx + py) - \varphi' x(px \log cx + xp \log cy + px) = 0;$$

donc, en divisant par $p(\log c^2 xy + 1)$,

$$y\varphi' y - x\varphi' x = 0,$$

donc

$$x\varphi' x = k \quad \text{et} \quad d\varphi x = \frac{k\,dx}{x},$$

d'où

$$\varphi x = k \log mx.$$

L'équation de condition donnée deviendra donc

$$k \log mx + k \log my = \psi(xpy \log cy + ypx \log cx),$$

ou

$$k \log m^2 xy = \psi(pxy \log c^2 xy),$$

ou, en faisant $pxy \log c^2 xy = r$ et $xy = v$,



$$\psi r = k \log m^2 v.$$

Par le même procédé, qui a donné ci-dessus les fonctions qui satisfont à l'équation

$$\varphi x + \varphi y = \psi(xfy + yfx),$$

on peut trouver les fonctions inconnues dans toute autre équation à deux quantités variables. En effet, on peut, par des différentiations successives par rapport aux deux quantités variables, trouver autant d'équations qu'il est nécessaire pour éliminer des fonctions quelconques, de sorte qu'on parviendra à une équation qui ne contient qu'une seule de ces fonctions, et qui sera en général une équation différentielle d'un certain ordre. On peut donc en général trouver chacune de ces fonctions par une seule équation. Il s'ensuit qu'une telle équation n'est que très rarement possible. Car, comme la forme d'une fonction quelconque contenue dans l'équation de condition donnée, en vertu de l'équation même, doit être indépendante des formes des autres fonctions, il est évident qu'en général on ne peut considérer aucune de ces fonctions comme donnée. Ainsi par exemple l'équation ci-dessus ne pourrait plus être satisfaite, si la fonction fx avait eu une forme différente de celle qu'on vient de trouver.

XVIII.

NOTE SUR UN MÉMOIRE DE M. *L. OLIVIER,* AYANT POUR TITRE "REMARQUES SUR LES SÉRIES INFINIES ET LEUR CONVERGENCE."

Journal für die reine und angewandte Mathematik, herausgegeben von *Crelle,* Bd. 3, Berlin 1828.

On trouve p. 34 de ce mémoire le théorème suivant pour reconnaître si une série est convergente ou divergente:

"Si l'on trouve que dans une série infinie le produit du $n^{ième}$ terme, ou "du $n^{ième}$ des groupes de termes qui conservent le même signe, par n, est "zéro pour $n=\infty$, on peut regarder cette seule circonstance comme une "marque, que la série est convergente; et réciproquement, la série ne peut "pas être convergente si le produit $n.a_n$ n'est pas nul pour $n=\infty$."

La dernière partie de ce théorème est très juste, mais la première ne semble pas l'être. Par exemple la série

$$\frac{1}{2\log 2}+\frac{1}{3\log 3}+\frac{1}{4\log 4}+\cdots+\frac{1}{n\log n}+\cdots$$

est divergente, quoique $na_n=\frac{1}{\log n}$ soit zéro pour $n=\infty$. En effet les logarithmes hyperboliques, dont il est question, sont toujours moindres que leurs nombres moins 1, c'est-à-dire, qu'on a toujours $\log(1+x)<x$. Si $x>1$ cela est évident. Si $x<1$ on a

$$\log(1+x)=x-x^2(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{3}x)-x^4(\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{5}x)-\cdots,$$

donc aussi dans ce dernier cas $\log(1+x)<x$, puisque $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}x$, $\frac{1}{4}-\frac{1}{5}x$ ... sont tous positifs. En faisant $x=\frac{1}{n}$, cela donne

$$\log\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n} \quad \text{ou bien} \quad \log\frac{1+n}{n} < \frac{1}{n},$$

ou

$$\log(1+n) < \frac{1}{n} + \log n = \left(1 + \frac{1}{n \log n}\right)\log n;$$

donc

$$\log\log(1+n) < \log\log n + \log\left(1 + \frac{1}{n\log n}\right).$$

Mais puisque $\log(1+x) < x$, on a $\log\left(1+\frac{1}{n\log n}\right) < \frac{1}{n\log n}$, donc, en vertu de l'expression précédente,

$$\log\log(1+n) < \log\log n + \frac{1}{n\log n}.$$

En faisant successivement $n = 2, 3, 4, \ldots$, on trouve

$$\log\log 3 < \log\log 2 + \frac{1}{2\log 2},$$

$$\log\log 4 < \log\log 3 + \frac{1}{3\log 3},$$

$$\log\log 5 < \log\log 4 + \frac{1}{4\log 4},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\log\log(1+n) < \log\log n + \frac{1}{n\log n},$$

donc, en prenant la somme,

$$\log\log(1+n) < \log\log 2 + \frac{1}{2\log 2} + \frac{1}{3\log 3} + \frac{1}{4\log 4} + \cdots + \frac{1}{n\log n}.$$

Mais $\log\log(1+n) = \infty$ pour $n = \infty$, donc la somme de la série proposée $\frac{1}{2\log 2} + \frac{1}{3\log 3} + \frac{1}{4\log 4} + \cdots + \frac{1}{n\log n} + \cdots$ est infiniment grande, et par conséquent cette série est divergente. Le théorème énoncé dans l'endroit cité est donc en défaut dans ce cas.

En général on peut démontrer qu'il est impossible de trouver une fonction φn telle qu'une série quelconque $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$, dont nous supposons tous les termes positifs, soit convergente si $\varphi n . a_n$ est zéro pour $n = \infty$, et divergente dans le cas contraire. C'est ce qu'on peut faire voir à l'aide du théorème suivant:

Si la série $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$ est divergente, la suivante

$$\frac{a_1}{a_0} + \frac{a_2}{a_0 + a_1} + \frac{a_3}{a_0 + a_1 + a_2} + \cdots + \frac{a_n}{a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1}} + \cdots$$

le sera aussi.

En effet, en remarquant que les quantités a_0, a_1, a_2, ... sont positives, on a en vertu du théorème $\log(1+x) < x$, démontré ci-dessus,

$$\log(a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n) - \log(a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}),$$

c'est-à-dire

$$\log\left(1 + \frac{a_n}{a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}}\right) < \frac{a_n}{a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}},$$

donc, en faisant successivement $n = 1, 2, 3, \ldots$,

$$\log(a_0 + a_1) - \log a_0 < \frac{a_1}{a_0},$$

$$\log(a_0 + a_1 + a_2) - \log(a_0 + a_1) < \frac{a_2}{a_0 + a_1},$$

$$\log(a_0 + a_1 + a_2 + a_3) - \log(a_0 + a_1 + a_2) < \frac{a_3}{a_0 + a_1 + a_2},$$

. . . .

$$\log(a_0 + a_1 + \cdots + a_n) - \log(a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1}) < \frac{a_n}{a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1}},$$

et en prenant la somme,

$$\log(a_0 + a_1 + \cdots + a_n) - \log a_0 < \frac{a_1}{a_0} + \frac{a_2}{a_0 + a_1} + \cdots + \frac{a_n}{a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1}}.$$

Mais si la série $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$ est divergente, sa somme est infinie, et le logarithme de cette somme l'est également; donc la somme de la série $\frac{a_1}{a_0} + \frac{a_2}{a_0 + a_1} + \cdots + \frac{a_n}{a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1}} + \cdots$ est aussi infiniment grande, et cette série est par conséquent divergente, si la série $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$ l'est. Cela posé, supposons que φn soit une fonction de n, telle que la série $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$ soit convergente ou divergente selon que $\varphi n . a_n$ est zéro ou non pour $n = \infty$. Alors la série

$$\frac{1}{\varphi(1)} + \frac{1}{\varphi(2)} + \frac{1}{\varphi(3)} + \frac{1}{\varphi(4)} + \cdots + \frac{1}{\varphi n} + \cdots$$

sera divergente, et la série

$$\frac{1}{\varphi(2)\cdot\frac{1}{\varphi(1)}}+\frac{1}{\varphi(3)\left(\frac{1}{\varphi(1)}+\frac{1}{\varphi(2)}\right)}+\frac{1}{\varphi(4)\left(\frac{1}{\varphi(1)}+\frac{1}{\varphi(2)}+\frac{1}{\varphi(3)}\right)}+\cdots$$
$$+\frac{1}{\varphi n\left(\frac{1}{\varphi(1)}+\frac{1}{\varphi(2)}+\frac{1}{\varphi(3)}+\cdots+\frac{1}{\varphi(n-1)}\right)}+\cdots$$

convergente; car dans la première on a $a_n \varphi n = 1$ et dans la seconde $a_n \varphi n = 0$ pour $n = \infty$. Or, selon le théorème établi plus haut, la seconde série est nécessairement divergente en même temps que la première; donc une fonction φn telle qu'on l'a supposée n'existe pas. En faisant $\varphi n = n$, les deux séries en question deviendront

$$1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

et

$$\frac{1}{2.1}+\frac{1}{3(1+\frac{1}{2})}+\frac{1}{4(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3})}+\cdots+\frac{1}{n\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}\right)}+\cdots,$$

qui par conséquent sont divergentes toutes deux.

XIX.

SOLUTION D'UN PROBLÈME GÉNÉRAL CONCERNANT LA TRANSFORMATION DES FONCTIONS ELLIPTIQUES.

Astronomische Nachrichten, herausgegeben von *Schumacher,* Bd. 6, Nr. 138. Altona 1828.

Dans le n° 127 de ce journal M. *Jacobi* démontre un théorème très élégant relatif à la transformation des fonctions elliptiques. Ce théorème est un cas particulier d'un autre plus général, auquel je suis parvenu depuis longtemps sans connaître le mémoire de M. *Jacobi.* On en trouve la démonstration dans un mémoire inséré dans le journal de M. *Crelle*, et qui a pour titre "Recherches sur les fonctions elliptiques." Mais on peut envisager cette théorie sous un point de vue beaucoup plus général, en se proposant comme un problème d'analyse indéterminée de trouver toutes les transformations possibles d'une fonction elliptique qui peuvent s'effectuer d'une certaine manière. Je suis parvenu à résoudre complètement un grand nombre de problèmes de cette espèce. Parmi eux est le suivant, qui est d'une grande importance dans la théorie des fonctions elliptiques:

"Trouver tous les cas possibles dans lesquels on pourra satisfaire à l'é-
"quation différentielle:

$$(1)\qquad \frac{dy}{\sqrt{(1-c_1^2y^2)(1-e_1^2y^2)}}=\pm a\frac{dx}{\sqrt{(1-c^2x^2)(1-e^2x^2)}},$$

"en mettant pour y une fonction algébrique de x, rationnelle ou irra-
"tionnelle."

Ce problème, vu la généralité de la fonction y, paraît au premier

coup d'oeil bien difficile, mais on peut le ramener au cas où l'on suppose y rationnelle. En effet on peut démontrer que si l'équation (1) a lieu pour une valeur irrationnelle de y, on en pourra toujours déduire une autre de la même forme, dans laquelle y est rationnelle, en changeant convenablement le coefficient a, les quantités c_1, e_1, c, e restant les mêmes. La méthode qui s'offre d'abord pour résoudre le problème dans le cas où y est rationnelle est celle des coefficiens indéterminés; or on serait bientôt fatigué à cause de l'extrême complication des équations à satisfaire. Je crois donc que le procédé suivant, qui conduit de la manière la plus simple à une solution complète, doit peut-être mériter l'attention des géomètres.

En faisant

$$\theta = \int_0 \frac{dx}{\sqrt{(1-c^2x^2)(1-e^2x^2)}}, \tag{2}$$

la quantité x sera une certaine fonction de θ; nous la désignerons par $\lambda\theta$. De même nous désignerons par $\frac{\omega}{2}$ et $\frac{\omega'}{2}$ les valeurs de θ qui répondent respectivement à $x=\frac{1}{c}$ et à $x=\frac{1}{e}$, et par $\Delta\theta$ la fonction $\sqrt{(1-c^2x^2)(1-e^2x^2)}$. Cela posé, on pourra démontrer les théorèmes suivans:

Théorème I. En désignant par θ et θ' deux quantités quelconques, on aura toujours

$$\lambda(\theta \pm \theta') = \frac{\lambda\theta \,.\, \Delta\theta' \pm \lambda\theta' \,.\, \Delta\theta}{1-c^2e^2\lambda^2\theta \,.\, \lambda^2\theta'} \tag{3}$$

(Voy. Exercices de calcul int., t. I, p. 23).

Théorème II. On satisfait de la manière la plus générale à l'équation

$$\lambda\theta' = \lambda\theta$$

en prenant

$$\theta' = (-1)^{m+m'}\theta + m\omega + m'\omega',$$

où m et m' sont des nombres entiers quelconques positifs ou négatifs. On aura donc

$$\lambda[(-1)^{m+m'}\theta + m\omega + m'\omega'] = \lambda\theta. \tag{4}$$

Ce théorème a lieu généralement, quelles que soient les quantités e et c, réelles ou imaginaires. Je l'ai démontré pour le cas où e^2 est négatif et c^2 positif dans le mémoire cité plus haut (*Crelle's* Journal für die reine und

angewandte Mathematik, Bd. 2, p. 114). Les quantités ω, ω' sont toujours dans un rapport imaginaire. Elles jouent d'ailleurs dans la théorie des fonctions elliptiques le même rôle que le nombre π dans celle des fonctions circulaires.

Nous allons voir comment à l'aide de ces deux théorèmes on pourra déterminer facilement l'expression générale de y, et les valeurs qui en résulteront pour c_1 et e_1.

Soit

$$y = \psi(x) \tag{5}$$

la fonction rationnelle cherchée. Si l'on considère x comme fonction de y, sa valeur sera déterminée par l'équation (5), qui aura un certain nombre de racines. Or il existe entre ces racines des relations qui nous conduiront à l'expression de $\psi(x)$.

Si l'équation (5) passe le premier degré par rapport à x, désignons par x_1 une autre racine, et par θ_1 la valeur correspondante de θ, de sorte que $x_1 = \lambda\theta_1$, $y = \psi(x) = \psi(x_1)$.

En vertu de la formule (2), l'équation (1) deviendra, en désignant le radical du premier membre par $\sqrt{R}$,

$$\frac{dy}{\sqrt{R}} = \pm\, a\, d\theta.$$

En changeant x en x_1, ou, ce qui revient au même, θ en θ_1, la valeur de y reste la même, et par conséquent $\frac{dy}{\sqrt{R}}$ reste le même, ou se change en $-\frac{dy}{\sqrt{R}}$. On aura donc

$$\pm \frac{dy}{\sqrt{R}} = \pm\, a\, d\theta_1,$$

et par suite $d\theta_1 = \pm\, d\theta$, d'où l'on tire en intégrant $\theta_1 = \alpha \pm \theta$, α étant une quantité indépendante de θ. On aura par conséquent $x_1 = \lambda(\alpha \pm \theta)$. Il suffit de prendre θ avec le signe $+$; car on a, d'après la formule (4), en y faisant $m=1$, $m'=0$, $\lambda\theta = \lambda(\omega-\theta)$ et par conséquent $\lambda(\alpha-\theta) = \lambda(\omega-\alpha+\theta)$, où $\omega-\alpha$ est une nouvelle constante. On pourra donc faire $x_1 = \lambda(\theta+\alpha)$. On a ainsi établi ce théorème.

Théorème III. „Si une racine de l'équation $y = \psi(x)$ est représentée „par $\lambda\theta$, une autre racine quelconque sera de la forme $\lambda(\theta+\alpha)$, où α est „une quantité constante.“



Si l'on pouvait parvenir à trouver toutes les valeurs de α, rien ne serait plus facile que de déterminer ensuite celle de y. Or c'est ce que nous allons faire à l'aide du Théorème II. Les quantités $\lambda\theta$ et $\lambda(\theta+\alpha)$ étant des racines, on aura à la fois:

$$y=\psi(\lambda\theta)=\psi[\lambda(\theta+\alpha)],$$

équation qui doit avoir lieu pour une valeur quelconque de θ. On en tire, en mettant au lieu de θ successivement $\theta+\alpha$, $\theta+2\alpha$, $\ldots\ \theta+k\alpha$,

$$\psi(\lambda\theta)=\psi[\lambda(\theta+\alpha)]=\psi[\lambda(\theta+2\alpha)]=\cdots=\psi[\lambda(\theta+k\alpha)],$$

donc on aura

$$y=\psi[\lambda(\theta+k\alpha)],$$

k désignant un nombre entier quelconque. On voit par là que, non seulement $\lambda(\theta+\alpha)$, mais toute quantité de la forme $\lambda(\theta+k\alpha)$ sera une racine de l'équation $y=\psi(x)$. Or, k pouvant avoir une infinité de valeurs différentes, il faut nécessairement que plusieurs des quantités $\lambda(\theta+k\alpha)$ soient égales pour des valeurs différentes de k, car l'équation $y=\psi(x)$ n'a qu'un nombre limité de racines.

Soit donc $\lambda(\theta+k\alpha)=\lambda(\theta+k'\alpha)$, où nous supposons k plus grand que k'. En mettant $\theta-k'\alpha$ au lieu de θ, il viendra: $\lambda[\theta+(k-k')\alpha]=\lambda\theta$, ou bien, en faisant $k-k'=n$,

$$\lambda(\theta+n\alpha)=\lambda\theta. \tag{6}$$

Cette équation détermine la valeur de α, car en vertu du théorème II on en tire

$$\theta+n\alpha=(-1)^{m+m'}\theta+m\omega+m'\omega',$$

ce qui donne, en remarquant que θ est variable, $(-1)^{m+m'}=1$ et $n\alpha=m\omega+m'\omega'$; $m+m'$ doit donc être un nombre pair, et alors on aura

$$\alpha=\frac{m}{n}\omega+\frac{m'}{n}\omega', \tag{7}$$

$\frac{m}{n}$ et $\frac{m'}{n}$ pouvant désigner des quantités rationnelles quelconques; on voit donc que, pour que la quantité $\lambda(\theta+\alpha)$ puisse être racine de l'équation $y=\psi(x)$ en même temps que $\lambda\theta$, il faut que la constante α ait la forme

$$\alpha=\mu\omega+\mu'\omega', \tag{8}$$

où μ et μ' sont des quantités rationnelles positives ou négatives. La quan-

tité α ayant une telle valeur, l'expression $\lambda(\theta+k\alpha)$ n'aura qu'un nombre limité de valeurs différentes, car ayant $\lambda(\theta+n\alpha)=\lambda\theta$, on aura de même $\lambda[\theta+(n+1)\alpha]=\lambda(\theta+\alpha)$; $\lambda[\theta+(n+2)\alpha]=\lambda(\theta+2\alpha)$ etc.

Cela posé, si le degré de l'équation $y=\psi(x)$ surpasse le nombre des valeurs inégales de $\lambda(\theta+k\alpha)$, soit $\lambda(\theta+\alpha_1)$ une nouvelle racine, différente des racines $\lambda(\theta+k\alpha)$; on doit avoir de la même manière: $\alpha_1=\mu_1\omega+\mu_1'\omega'$ et $\psi(\lambda\theta)=\psi[\lambda(\theta+k_1\alpha_1)]$. En mettant $\theta+k\alpha$ au lieu de θ, il viendra, en remarquant que $\psi[\lambda(\theta+k\alpha)]=\psi(\lambda\theta)=y$,

$$y=\psi[\lambda(\theta+k\alpha+k_1\alpha_1)],$$

donc $\lambda(\theta+k\alpha+k_1\alpha_1)$ sera une racine quels que soient les nombres entiers k et k_1. Si maintenant le degré de l'équation $y=\psi(x)$ surpasse le nombre des valeurs inégales de l'expression $\lambda(\theta+k\alpha+k_1\alpha_1)$, soit $\lambda(\theta+\alpha_2)$ une nouvelle racine; on doit avoir $\alpha_2=\mu_2\omega+\mu_2'\omega'$ et $\psi(\lambda\theta)=\psi[\lambda(\theta+k_2\alpha_2)]$, d'où l'on tire, en mettant $\theta+k\alpha+k_1\alpha_1$ au lieu de θ,

$$y=\psi[\lambda(\theta+k\alpha+k_1\alpha_1+k_2\alpha_2)],$$

et par conséquent toutes les quantités contenues dans l'expression $\lambda(\theta+k\alpha+k_1\alpha_1+k_2\alpha_2)$ seront des racines, quels que soient les nombres entiers k, k_1, k_2. En continuant ce raisonnement jusqu'à ce qu'on ait épuisé toutes les racines de l'équation $y=\psi(x)$, on aura le théorème suivant:

Théorème IV. Toutes les racines de l'équation $y=\psi(x)$ pourront être représentées par les valeurs inégales de l'expression:

$$\lambda(\theta+k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+\cdots+k_\nu\alpha_\nu),$$

en donnant à $k_1, k_2, \ldots k_\nu$ toutes les valeurs entières, et les quantités $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\nu$ étant de la forme

$$\mu\omega+\mu'\omega',$$

où μ et μ' sont des quantités rationnelles.

Cela posé, désignons ces valeurs de l'expression $\lambda(\theta+k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_\nu\alpha_\nu)$ par $\lambda(\theta)$, $\lambda(\theta+\alpha_1)$, $\lambda(\theta+\alpha_2)$, $\ldots$ $\lambda(\theta+\alpha_{m-1})$, et faisons $\psi(x)=\frac{p}{q}$, p et q étant des fonctions entières de x sans diviseur commun, on aura

$$p-qy=A(x-\lambda\theta)[x-\lambda(\theta+\alpha_1)][x-\lambda(\theta+\alpha_2)]\ldots[x-\lambda(\theta+\alpha_{m-1})],$$

équation qui a lieu pour une valeur quelconque de x. A est le coefficient

de x^m dans $p - qy$, il est donc de la forme $f - gy$, où f et g sont des constantes. On aura par conséquent

$$(9) \quad p - qy = (f - gy)[x - \lambda\theta][x - \lambda(\theta + \alpha_1)] \ldots [x - \lambda(\theta + \alpha_{m-1})].$$

De là on déduira une expression de y en θ, en attribuant à x une valeur particulière, ou bien en comparant les coefficiens d'une même puissance de x dans les deux membres. Une telle expression de y contiendra trois quantités constantes inconnues, et le problème se réduit maintenant à trouver tous les cas dans lesquels ces trois quantités pourront être déterminées de telle sorte que l'équation proposée soit satisfaite. Or nous allons voir tout-à-l'heure que cela sera toujours possible, quelles que soient les quantités $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\nu$, en déterminant convenablement deux des quantités a, e_1, c_1. Mais avant de considérer le cas général nous allons commencer par celui où p et q sont du premier degré, car un théorème qui en résulte nous sera utile pour parvenir à la solution du problème général.

Soit donc

$$y = \frac{f' + fx}{g' + gx},$$

on en tire

$$1 \pm c_1 y = \frac{g' \pm c_1 f' + (g \pm c_1 f)x}{g' + gx}, \quad 1 \pm e_1 y = \frac{g' \pm e_1 f' + (g \pm e_1 f)x}{g' + gx},$$

$$dy = \frac{fg' - f'g}{(g' + gx)^2}\, dx.$$

Par là l'équation (1) deviendra, en substituant,

$$\frac{fg' - f'g}{\sqrt{(g'^2 - c_1^2 f'^2)(g'^2 - e_1^2 f'^2)}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{\left(1 + \frac{g + c_1 f}{g' + c_1 f'}x\right)\left(1 + \frac{g - c_1 f}{g' - c_1 f'}x\right)\left(1 + \frac{g + e_1 f}{g' + e_1 f'}x\right)\left(1 + \frac{g - e_1 f}{g' - e_1 f'}x\right)}}$$

$$= \pm a \frac{dx}{\sqrt{(1 - c^2 x^2)(1 - e^2 x^2)}}.$$

On trouve aisement que cette formule ne peut être satisfaite que de l'une des manières suivantes:

$$(10) \qquad y = ax, \quad c_1^2 = \frac{c^2}{a^2}, \quad e_1^2 = \frac{e^2}{a^2},$$

$$(11) \qquad y = \frac{a}{ec} \cdot \frac{1}{x}, \quad c_1^2 = \frac{c^2}{a^2}, \quad e_1^2 = \frac{e^2}{a^2},$$

$$(12)\quad \begin{cases} y = m\dfrac{1 - x\sqrt{ec}}{1 + x\sqrt{ec}}, & c_1 = \dfrac{1}{m}\dfrac{\sqrt{c} - \sqrt{e}}{\sqrt{c} + \sqrt{e}}, \\ e_1 = \dfrac{1}{m}\dfrac{\sqrt{c} + \sqrt{e}}{\sqrt{c} - \sqrt{e}}, & a = \dfrac{m\sqrt{-1}}{2}(c - e). \end{cases}$$

On peut prendre les quantités c, e, $\sqrt{c}$, $\sqrt{e}$ avec le signe qu'on voudra.

Cela posé, reprenons l'équation (9). En désignant par f' et g' les coefficiens de x^{m-1} dans p et q, on aura

$$f' - g'y = -(f - gy)[\lambda\theta + \lambda(\theta + \alpha_1) + \lambda(\theta + \alpha_2) + \cdots + \lambda(\theta + \alpha_{m-1})],$$

d'où l'on tire, en faisant pour abréger

$$(13)\qquad \varphi\theta = \lambda\theta + \lambda(\theta + \alpha_1) + \lambda(\theta + \alpha_2) + \cdots + \lambda(\theta + \alpha_{m-1}),$$

$$(14)\qquad y = \frac{f' + f\cdot\varphi\theta}{g' + g\cdot\varphi\theta},$$

équation qui pourra servir à déterminer la fonction y, excepté dans le cas où $\varphi\theta$ se réduit à une quantité constante.

Selon l'hypothèse, y doit être une fonction rationnelle de x, donc la fonction $\varphi\theta$ doit l'être de même. Il faut donc examiner d'abord dans quels cas cela pourra avoir lieu.

Soit $\lambda(\theta + \alpha)$ une quelconque des quantités $\lambda(\theta + \alpha_1)$, $\lambda(\theta + \alpha_2)$, ..., il suit de ce qui précède que $\lambda(\theta + k\alpha)$ sera de même égale à l'une d'entre elles. Or soit $\lambda(\theta + n\alpha) = \lambda\theta$, ce qui a toujours lieu en déterminant convenablement le nombre entier n, on aura, en mettant $\theta - \alpha$ au lieu de θ, $\lambda[\theta + (n-1)\alpha] = \lambda(\theta - \alpha)$; donc $\lambda(\theta - \alpha)$ sera encore contenue parmi les quantités dont il s'agit. Il suit de là que si $\lambda(\theta - \alpha_1)$ est différente de $\lambda(\theta + \alpha_1)$, la quantité $\lambda(\theta - \alpha_1)$ sera égale à l'une des quantités $\lambda(\theta + \alpha_2)$, $\lambda(\theta + \alpha_3)$, ... Cherchons donc d'abord les valeurs de α qui donneront $\lambda(\theta - \alpha) = \lambda(\theta + \alpha)$; c'est-à-dire $\lambda(\theta + 2\alpha) = \lambda\theta$. D'après l'équation (7) on aura

$$\alpha = \frac{m}{2}\omega + \frac{m'}{2}\omega',$$

où $m + m'$ est un nombre pair. En donnant à m et m' à partir de zéro toutes les valeurs entières telles que $m + m'$ soit pair, $\lambda(\theta + \alpha)$ prendra les valeurs suivantes:

$$\lambda\theta,\ \lambda(\theta+\omega),\ \lambda(\theta+\omega'),\ \lambda\left(\theta+\frac{\omega}{2}+\frac{\omega'}{2}\right),\ \lambda\left(\theta+\frac{3\omega}{2}+\frac{\omega'}{2}\right),$$
$$\lambda(\theta+\omega+\omega'),\ \text{etc.},$$

mais, d'après le théorème II, il est clair que les seules de ces valeurs qui soient différentes entre elles sont celles-ci

$$\lambda\theta,\ \lambda(\theta+\omega),\ \lambda\left(\theta+\frac{\omega}{2}+\frac{\omega'}{2}\right),\ \lambda\left(\theta+\frac{3\omega}{2}+\frac{\omega'}{2}\right),$$

donc, puisque $\lambda(\theta+\alpha)$ doit être différent de $\lambda\theta$, $\lambda(\theta+\alpha)$ ne pourra avoir que l'une de ces trois valeurs

$$\lambda(\theta+\omega),\ \lambda\left(\theta+\frac{\omega}{2}+\frac{\omega'}{2}\right),\ \lambda\left(\theta+\frac{3\omega}{2}+\frac{\omega'}{2}\right).$$

En exceptant ces quantités, il répond donc toujours à $\lambda(\theta+\alpha)$ un autre terme $\lambda(\theta-\alpha)$. De là il suit qu'on pourra écrire l'expression de $\varphi\theta$ comme il suit:

(15) $$\varphi\theta=\lambda\theta+k.\lambda(\theta+\omega)+k'.\lambda\left(\theta+\frac{\omega}{2}+\frac{\omega'}{2}\right)+k''.\lambda\left(\theta+\frac{3\omega}{2}+\frac{\omega'}{2}\right)$$
$$+\lambda(\theta+\alpha_1)+\lambda(\theta-\alpha_1)+\lambda(\theta+\alpha_2)+\lambda(\theta-\alpha_2)+\cdots+\lambda(\theta+\alpha_n)+\lambda(\theta-\alpha_n),$$

où k, k', k'' sont égaux à zéro ou à l'unité.

Pour avoir maintenant l'expression de $\varphi\theta$ en x, il faut recourir à la formule (3). En y faisant d'abord $\theta'=\frac{\omega}{2}$, on aura $\lambda\theta'=\frac{1}{c}$, donc $\Delta(\theta')=0$, et par conséquent

$$\lambda\left(\theta\pm\frac{\omega}{2}\right)=\pm\frac{1}{c}\cdot\frac{\Delta\theta}{1-c^2\lambda^2\theta};$$

or $\Delta\theta=\sqrt{(1-e^2x^2)(1-c^2x^2)}$, donc

$$\lambda\left(\theta\pm\frac{\omega}{2}\right)=\pm\frac{1}{c}\sqrt{\frac{1-e^2x^2}{1-c^2x^2}}.$$

On aura de la même manière, en faisant $\theta'=\frac{\omega'}{2}$,

$$\lambda\left(\theta+\frac{\omega'}{2}\right)=\frac{1}{e}\sqrt{\frac{1-c^2x^2}{1-e^2x^2}}.$$

La première formule donne

(16) $$\lambda\left(\theta-\frac{\omega}{2}\right)=-\lambda\left(\theta+\frac{\omega}{2}\right),$$

donc, en mettant $\theta + \frac{\omega}{2}$ au lieu de θ,

$$(17) \qquad \lambda(\theta + \omega) = -\lambda\theta = -x.$$

En multipliant $\lambda\left(\theta - \frac{\omega}{2}\right)$ par $\lambda\left(\theta + \frac{\omega'}{2}\right)$, on aura

$$(18) \qquad \lambda\left(\theta - \frac{\omega}{2}\right) \cdot \lambda\left(\theta + \frac{\omega'}{2}\right) = -\frac{1}{ec},$$

d'où l'on tire, en mettant $\theta + \frac{\omega}{2}$ et $\theta + \frac{3\omega}{2}$ au lieu de θ,

$$(19) \qquad \begin{cases} \lambda\left(\theta + \frac{\omega}{2} + \frac{\omega'}{2}\right) = -\frac{1}{ec} \cdot \frac{1}{\lambda\theta} = -\frac{1}{ec} \cdot \frac{1}{x}, \\ \lambda\left(\theta + \frac{3\omega}{2} + \frac{\omega'}{2}\right) = -\frac{1}{ec} \cdot \frac{1}{\lambda(\theta + \omega)} = \frac{1}{ec} \cdot \frac{1}{x}. \end{cases}$$

La formule (3) donne encore, en faisant $\theta' = \alpha$,

$$(20) \qquad \lambda(\theta + \alpha) + \lambda(\theta - \alpha) = \frac{2x \cdot \Delta\alpha}{1 - e^2c^2\lambda^2\alpha \cdot x^2}.$$

On voit par là que l'expression de $\varphi\theta$ sera toujours une fonction rationnelle de x, savoir

$$(21) \qquad \varphi\theta = (1 - k)x + \frac{k'' - k'}{ec} \cdot \frac{1}{x} + \Sigma \frac{2x \cdot \Delta\alpha}{1 - e^2c^2\lambda^2\alpha \cdot x^2},$$

en employant pour abréger le signe de sommation Σ.

Cela posé, il faut considérer plusieurs cas, selon les valeurs différentes de k, k', k''.

Premier cas. Si $k = k' = k'' = 0$.

Si les trois quantités k, k', k'', sont égales à zéro, l'expression de $\varphi\theta$ deviendra

$$(22) \qquad \varphi\theta = \lambda\theta + \lambda(\theta + \alpha_1) + \lambda(\theta - \alpha_1) + \lambda(\theta + \alpha_2) + \lambda(\theta - \alpha_2) + \cdots + \lambda(\theta + \alpha_n) + \lambda(\theta - \alpha_n)$$

et

$$(23) \qquad \varphi\theta = x + 2x\,\Sigma \frac{\Delta\alpha}{1 - e^2c^2\lambda^2\alpha \cdot x^2}.$$

Donc la première condition, que y soit rationnelle en x, est remplie. Il faut

maintenant substituer son expression dans l'équation proposée et voir si elle pourra être satisfaite.

On tire d'abord de l'équation (14)

$$1 \pm c_1 y = \frac{g' \pm c_1 f' + (g \pm c_1 f)\varphi\theta}{g' + g\varphi\theta},$$

$$1 \pm e_1 y = \frac{g' \pm e_1 f' + (g \pm e_1 f)\varphi\theta}{g' + g\varphi\theta}.$$

Cela posé, désignons par δ, δ', ε, ε' des valeurs de θ qui répondent respectivement à $y = +\frac{1}{c_1}$, $y = -\frac{1}{c_1}$, $y = +\frac{1}{e_1}$, $y = -\frac{1}{e_1}$, on doit avoir

(24) $$\begin{cases} g' - c_1 f' + (g - c_1 f)\varphi\delta = 0, & g' + c_1 f' + (g + c_1 f)\varphi\delta' = 0, \\ g' - e_1 f' + (g - e_1 f)\varphi\varepsilon = 0, & g' + e_1 f' + (g + e_1 f)\varphi\varepsilon' = 0. \end{cases}$$

En vertu de ces équations les valeurs de $1 - c_1 y$, $1 + c_1 y$, $1 - e_1 y$, $1 + e_1 y$ deviendront, en faisant pour abréger

(25) $$g' + g\varphi\theta = r:$$

(26) $$\begin{cases} 1 - c_1 y = \frac{g' - c_1 f'}{r}\left(1 - \frac{\varphi\theta}{\varphi\delta}\right), \\ 1 + c_1 y = \frac{g' + c_1 f'}{r}\left(1 - \frac{\varphi\theta}{\varphi\delta'}\right), \\ 1 - e_1 y = \frac{g' - e_1 f'}{r}\left(1 - \frac{\varphi\theta}{\varphi\varepsilon}\right), \\ 1 + e_1 y = \frac{g' + e_1 f'}{r}\left(1 - \frac{\varphi\theta}{\varphi\varepsilon'}\right). \end{cases}$$

En substituant dans $1 - \frac{\varphi\theta}{\varphi\delta}$ l'expression de $\varphi\theta$ en x, on obtiendra un résultat de la forme

$$1 - \frac{\varphi\theta}{\varphi\delta} = \frac{1 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots + A_{2n+1} x^{2n+1}}{(1 - e^2 c^2 \lambda^2 \alpha_1 x^2)(1 - e^2 c^2 \lambda^2 \alpha_2 x^2) \cdots (1 - e^2 c^2 \lambda^2 \alpha_n x^2)}.$$

En faisant $\theta = \delta$ le second membre s'évanouira, mais il est clair par ce qui précède que $\varphi(\theta)$ ne change pas de valeur si l'on met au lieu de θ l'une quelconque des quantités $\theta \pm \alpha_1$, $\theta \pm \alpha_2 \ldots \theta \pm \alpha_n$. Donc le numérateur du second membre doit s'évanouir toutes les fois que x a l'une des valeurs $\lambda\delta$, $\lambda(\delta \pm \alpha_1)$, $\lambda(\delta \pm \alpha_2)$, ... $\lambda(\delta \pm \alpha_n)$. Donc, puisque le nombre de

ces valeurs, en général toutes différentes entre elles, est $2n+1$, il s'ensuit que

$$1+A_1x+\cdots+A_{2n+1}x^{2n+1}=\left(1-\frac{x}{\lambda\delta}\right)\left(1-\frac{x}{\lambda(\delta+\alpha_1)}\right)\left(1-\frac{x}{\lambda(\delta-\alpha_1)}\right)\\ \cdots\left(1-\frac{x}{\lambda(\delta+\alpha_n)}\right)\left(1-\frac{x}{\lambda(\delta-\alpha_n)}\right);$$

donc en substituant et faisant pour abréger,

(27) $$\varrho=(1-e^2c^2\lambda^2\alpha_1x^2)(1-e^2c^2\lambda^2\alpha_2x^2)\ldots(1-e^2c^2\lambda^2\alpha_nx^2),$$

il viendra

(28) $$1-\frac{\varphi\theta}{\varphi\delta}=\frac{1}{\varrho}\cdot\left(1-\frac{x}{\lambda\delta}\right)\left(1-\frac{x}{\lambda(\delta+\alpha_1)}\right)\left(1-\frac{x}{\lambda(\delta-\alpha_1)}\right)\\ \cdots\left(1-\frac{x}{\lambda(\delta+\alpha_n)}\right)\left(1-\frac{x}{\lambda(\delta-\alpha_n)}\right),$$

formule qui a lieu pour des valeurs quelconques de δ et θ.

A l'aide de cette formule il sera facile de trouver les cas dans lesquels on pourra satisfaire à l'équation proposée. On peut écrire cette équation comme il suit:

(29) $$\sqrt{(1-c_1^2y^2)(1-e_1^2y^2)}=\frac{1}{a}\frac{dy}{dx}\sqrt{(1-c^2x^2)(1-e^2x^2)},$$

ce qui nous fait voir que l'une des quatre fonctions $1\pm c_1y$, $1\pm e_1y$ doit s'évanouir en attribuant à x une des quatre valeurs $\pm\frac{1}{c}$, $\pm\frac{1}{e}$, c'est-à-dire à θ une des valeurs $\pm\frac{\omega}{2}$, $\pm\frac{\omega'}{2}$.

Supposons d'abord $1-c_1y=0$ pour $\theta=\frac{\omega}{2}$, $1+c_1y=0$ pour $\theta=-\frac{\omega}{2}$, $1-e_1y=0$ pour $\theta=\frac{\omega'}{2}$, $1+e_1y=0$ pour $\theta=-\frac{\omega'}{2}$, on pourra prendre $\delta=\frac{\omega}{2}$, $\delta'=-\frac{\omega}{2}$, $\varepsilon=\frac{\omega'}{2}$, $\varepsilon'=-\frac{\omega'}{2}$. En substituant ces valeurs dans les équations (24) et remarquant que $\varphi\left(-\frac{\omega}{2}\right)=-\varphi\left(\frac{\omega}{2}\right)$, $\varphi\left(-\frac{\omega'}{2}\right)=-\varphi\left(\frac{\omega'}{2}\right)$, on en tire

$$g'=c_1f.\varphi\left(\frac{\omega}{2}\right)=e_1f.\varphi\left(\frac{\omega'}{2}\right);\quad f'=\frac{g}{c_1}\varphi\left(\frac{\omega}{2}\right)=\frac{g}{e_1}\varphi\left(\frac{\omega'}{2}\right).$$

On satisfait à ces équations en prenant

(30) $$g = f' = 0, \quad \frac{f}{g'} = \frac{1}{k}, \quad c_1 = \frac{k}{\varphi\left(\frac{\omega}{2}\right)}, \quad e_1 = \frac{k}{\varphi\left(\frac{\omega'}{2}\right)},$$

où k est arbitraire.

La valeur de y deviendra

(31) $$y = \frac{1}{k}\varphi\theta$$

et l'on aura ensuite

$$1 \pm c_1 y = 1 \pm \frac{\varphi\theta}{\varphi\left(\frac{\omega}{2}\right)}, \quad 1 \pm e_1 y = 1 \pm \frac{\varphi\theta}{\varphi\left(\frac{\omega'}{2}\right)}.$$

Cela posé, faisons dans la formule (28) $\delta = \pm\frac{\omega}{2}, \pm\frac{\omega'}{2}$, on obtiendra

(32) $$1 - \frac{\varphi\theta}{\varphi\left(\frac{\omega}{2}\right)} = \frac{1}{\varrho}\left\{1 - \frac{x}{\lambda\frac{\omega}{2}}\right\}\left\{1 - \frac{x}{\lambda\left(\frac{\omega}{2}+\alpha_1\right)}\right\}\left\{1 - \frac{x}{\lambda\left(\frac{\omega}{2}-\alpha_1\right)}\right\}\cdots$$
$$\cdots\left\{1 - \frac{x}{\lambda\left(\frac{\omega}{2}+\alpha_n\right)}\right\}\left\{1 - \frac{x}{\lambda\left(\frac{\omega}{2}-\alpha_n\right)}\right\};$$

or $\lambda\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{1}{c}$, et d'après la formule (16) on aura $\lambda\left(\frac{\omega}{2}+\alpha\right) = \lambda\left(\frac{\omega}{2}-\alpha\right)$, donc

(33) $$1 - \frac{\varphi\theta}{\varphi\left(\frac{\omega}{2}\right)} = \frac{1}{\varrho}(1-cx)\left\{1 - \frac{x}{\lambda\left(\frac{\omega}{2}-\alpha_1\right)}\right\}^2\left\{1 - \frac{x}{\lambda\left(\frac{\omega}{2}-\alpha_2\right)}\right\}^2\cdots$$
$$\cdots\left\{1 - \frac{x}{\lambda\left(\frac{\omega}{2}-\alpha_n\right)}\right\}^2.$$

On aura des expressions analogues pour $1 + \frac{\varphi\theta}{\varphi\left(\frac{\omega}{2}\right)}$, $1 \pm \frac{\varphi\theta}{\varphi\left(\frac{\omega'}{2}\right)}$ en faisant $\delta = -\frac{\omega}{2}$, $\delta = \pm\frac{\omega'}{2}$.

En faisant donc pour abréger

(34) $$\begin{cases} t = \left\{1 - \dfrac{x^2}{\lambda^2\left(\frac{\omega}{2}-\alpha_1\right)}\right\}\left\{1 - \dfrac{x^2}{\lambda^2\left(\frac{\omega}{2}-\alpha_2\right)}\right\}\cdots\left\{1 - \dfrac{x^2}{\lambda^2\left(\frac{\omega}{2}-\alpha_n\right)}\right\}, \\ t' = \left\{1 - \dfrac{x^2}{\lambda^2\left(\frac{\omega'}{2}-\alpha_1\right)}\right\}\left\{1 - \dfrac{x^2}{\lambda^2\left(\frac{\omega'}{2}-\alpha_2\right)}\right\}\cdots\left\{1 - \dfrac{x^2}{\lambda^2\left(\frac{\omega'}{2}-\alpha_n\right)}\right\}, \end{cases}$$

on trouvera

(35) $$1-c_1^2y^2=(1-c^2x^2)\frac{t^2}{\varrho^2}, \quad 1-e_1^2y^2=(1-e^2x^2)\frac{t'^2}{\varrho^2},$$

et de là

(36) $$\sqrt{(1-c_1^2y^2)(1-e_1^2y^2)}=\pm\frac{tt'}{\varrho^2}\sqrt{(1-c^2x^2)(1-e^2x^2)}.$$

Maintenant les deux équations (35) nous montrent que $\varrho^2\frac{dy}{dx}$ est une fonction entière de x, qui est divisible par les deux fonctions entières t et t'; donc, puisque ces fonctions n'ont point de diviseur commun, il en résulte que $\varrho^2\frac{dy}{dx}$ sera divisible par leur produit; mais le degré de la fonction $\varrho^2\frac{dy}{dx}$ est précisément le même que celui de la fonction tt', savoir $4n$. Donc l'expression $\frac{\varrho^2\frac{dy}{dx}}{tt'}$ se réduit à une constante. En la désignant par a, on aura donc

(37) $$dy=a\frac{tt'}{\varrho^2}dx,$$

et par suite l'équation (36) donnera

(38) $$\frac{dy}{\sqrt{(1-c_1^2y^2)(1-e_1^2y^2)}}=\pm a\frac{dx}{\sqrt{(1-c^2x^2)(1-e^2x^2)}},$$

c'est-à-dire l'équation proposée.

Pour déterminer le coefficient a faisons dans (37) x infini, on obtiendra, d'après les valeurs des fonctions ϱ, t, t',

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a}{(-e^2c^2)^{2n}.\lambda^4\alpha_1\ldots\lambda^4\alpha_n.\lambda^2\left(\frac{\omega}{2}-\alpha_1\right)\ldots\lambda^2\left(\frac{\omega}{2}-\alpha_n\right).\lambda^2\left(\frac{\omega'}{2}-\alpha_1\right)\ldots\lambda^2\left(\frac{\omega'}{2}-\alpha_n\right)};$$

mais d'après la formule (18) on a $\lambda^2\left(\frac{\omega}{2}-\alpha\right).\lambda^2\left(\frac{\omega'}{2}-\alpha\right)=\frac{1}{c^2e^2}$, donc

(39) $$\frac{dy}{dx}=\frac{a}{\lambda^4\alpha_1.\lambda^4\alpha_2\ldots\lambda^4\alpha_n}\cdot\frac{1}{(e^2c^2)^n};$$

or, en différentiant l'équation

(40) $$y=\frac{1}{k}\varphi\theta=\frac{1}{k}\left(x+2x\Sigma\frac{\Delta(\alpha)}{1-e^2c^2\lambda^2\alpha.x^2}\right)$$

et en faisant ensuite $x=\frac{1}{0}$, on aura $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{k}$. En égalant cette valeur à la précédente on en tire

(41) $$a=(e^2c^2)^n\frac{1}{k}\lambda^4\alpha_1.\lambda^4\alpha_2\ldots\lambda^4\alpha_n.$$

On pourra donner à l'expression de y une autre forme plus simple à quelques égards. En multipliant les deux membres de l'équation (28) par $\varphi\delta$ et faisant ensuite $\delta=0$, il viendra

$$\varphi\theta=\frac{Ax}{\varrho}\left(1-\frac{x^2}{\lambda^2\alpha_1}\right)\left(1-\frac{x^2}{\lambda^2\alpha_2}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{\lambda^2\alpha_n}\right),$$

où A est une quantité constante. En attribuant à x la valeur $\frac{1}{0}$, après avoir divisé par x, on trouvera

(42) $$A=(e^2c^2)^n.\lambda^4\alpha_1.\lambda^4\alpha_2\ldots\lambda^4\alpha_n=ak.$$

L'expression de y deviendra donc

(43) $$y=a\frac{x\left(1-\frac{x^2}{\lambda^2\alpha_1}\right)\left(1-\frac{x^2}{\lambda^2\alpha_2}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{\lambda^2\alpha_n}\right)}{(1-e^2c^2\lambda^2\alpha_1x^2)(1-e^2c^2\lambda^2\alpha_2x^2)\ldots(1-e^2c^2\lambda^2\alpha_nx^2)}.$$

Il y a encore une autre manière d'exprimer y qui est très simple. En faisant dans (28) $x=\frac{1}{0}$, après avoir divisé les deux membres par x, on trouvera

(44) $$\varphi\delta=$$
$$(e^2c^2)^n\lambda^2\alpha_1.\lambda^2\alpha_2\ldots\lambda^2\alpha_n.\lambda\delta.\lambda(\alpha_1+\delta)\lambda(\alpha_1-\delta)\ldots\lambda(\alpha_n+\delta)\lambda(\alpha_n-\delta)$$
$$=\lambda\delta+\lambda(\delta+\alpha_1)+\lambda(\delta-\alpha_1)+\cdots+\lambda(\delta+\alpha_n)+\lambda(\delta-\alpha_n),$$

formule qui a lieu pour une valeur quelconque de δ.

En mettant donc θ au lieu de δ et multipliant par $\frac{1}{k}$, on aura y exprimé comme il suit:

(45) $$y=\frac{1}{k}(ec)^{2n}b.\lambda\theta.\lambda(\alpha_1+\theta).\lambda(\alpha_1-\theta)\ldots\lambda(\alpha_n+\theta).\lambda(\alpha_n-\theta),$$

où l'on a fait pour abréger

(46) $$b=\lambda^2\alpha_1.\lambda^2\alpha_2.\lambda^2\alpha_3\ldots\lambda^2\alpha_n.$$

En faisant $\theta = +\frac{\omega}{2}$, $\theta = +\frac{\omega'}{2}$, les valeurs correspondantes de y seront $\frac{1}{c_1}$ et $\frac{1}{e_1}$, donc:

$$(47)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{c_1} = (-1)^n \dfrac{b}{k} e^{2n} \cdot c^{2n-1} \cdot \left[\lambda\left(\dfrac{\omega}{2} - \alpha_1\right) \cdot \lambda\left(\dfrac{\omega}{2} - \alpha_2\right) \ldots \lambda\left(\dfrac{\omega}{2} - \alpha_n\right)\right]^2 \\ \dfrac{1}{e_1} = (-1)^n \dfrac{b}{k} e^{2n-1} \cdot c^{2n} \cdot \left[\lambda\left(\dfrac{\omega'}{2} - \alpha_1\right) \cdot \lambda\left(\dfrac{\omega'}{2} - \alpha_2\right) \ldots \lambda\left(\dfrac{\omega'}{2} - \alpha_n\right)\right]^2. \end{cases}$$

Si donc les quantités c_1, e_1, a, y ont les valeurs exprimées par les équations (41), (43), (45), (47), l'équation (1) sera satisfaite en déterminant convenablement le signe du second membre. Il faut remarquer que ce signe n'est pas le même pour toutes les valeurs de x; mais il sera toujours le même pour des valeurs de x comprises entre certaines limites. On doit prendre le signe $+$ si x est très petit; et alors on doit conserver le même signe jusqu'à une certaine limite. Dans tous les cas le signe qu'il faut prendre se détermine par l'équation (36).

Le théorème de M. *Jacobi* est contenu comme cas particulier dans ce qui précède. En effet on l'obtiendra en faisant $\alpha_1 = \frac{2\omega}{2n+1}$, $c = 1$, $c_1 = 1$. Alors on trouvera $\alpha_2 = \frac{4\omega}{2n+1}$, $\alpha_3 = \frac{6\omega}{2n+1}$, $\ldots\ \alpha_n = \frac{2n\omega}{2n+1}$,

$$(48)\quad \begin{cases} k = b \cdot e^{2n}\left[\lambda\left(\dfrac{1}{2n+1}\dfrac{\omega}{2}\right) \cdot \lambda\left(\dfrac{3}{2n+1}\dfrac{\omega}{2}\right) \ldots \lambda\left(\dfrac{2n-1}{2n+1}\dfrac{\omega}{2}\right)\right]^2, \\ e_1 = e^{2n+1} \cdot \left[\lambda\left(\dfrac{1}{2n+1}\dfrac{\omega}{2}\right) \cdot \lambda\left(\dfrac{3}{2n+1}\dfrac{\omega}{2}\right) \ldots \lambda\left(\dfrac{2n-1}{2n+1}\dfrac{\omega}{2}\right)\right]^4, \\ a = \left\{\dfrac{\lambda\left(\frac{\omega}{2n+1}\right) \cdot \lambda\left(\frac{2\omega}{2n+1}\right) \cdot \lambda\left(\frac{3\omega}{2n+1}\right) \ldots \lambda\left(\frac{n\omega}{2n+1}\right)}{\lambda\left(\frac{1}{2n+1}\frac{\omega}{2}\right) \cdot \lambda\left(\frac{3}{2n+1}\frac{\omega}{2}\right) \ldots \lambda\left(\frac{2n-1}{2n+1}\frac{\omega}{2}\right)}\right\}^2, \\ y = \dfrac{\lambda\theta \cdot \lambda\left(\frac{2\omega}{2n+1} + \theta\right) \cdot \lambda\left(\frac{2\omega}{2n+1} - \theta\right) \ldots \lambda\left(\frac{2n\omega}{2n+1} + \theta\right) \cdot \lambda\left(\frac{2n\omega}{2n+1} - \theta\right)}{\left[\lambda\left(\frac{1}{2n+1}\frac{\omega}{2}\right) \cdot \lambda\left(\frac{3}{2n+1}\frac{\omega}{2}\right) \ldots \lambda\left(\frac{2n-1}{2n+1}\frac{\omega}{2}\right)\right]^2}, \\ \dfrac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-e_1^2y^2)}} = \pm a \dfrac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-e^2x^2)}} = \pm a\, d\theta. \end{cases}$$

Il faut prendre le signe supérieur si x est compris entre les limites

$+\lambda\left(\frac{4m+1}{2n+1}\frac{\omega}{2}\right)$ et $+\lambda\left(\frac{4m+3}{2n+1}\frac{\omega}{2}\right)$ et le signe inférieur si x est compris entre les limites $\lambda\left(\frac{4m+3}{2n+1}\frac{\omega}{2}\right)$ et $\lambda\left(\frac{4m+5}{2n+1}\frac{\omega}{2}\right)$.

En faisant dans notre formule générale $\alpha_1=\frac{m\omega+m'\omega'}{2n+1}$, où $m+m'$ est un nombre pair et où les trois nombres m, m', $2n+1$ ne sont pas divisibles par un même facteur, on aura une formule plus générale que celle de M. *Jacobi*, savoir celle que j'ai demontrée dans les „Recherches sur les fonctions elliptiques.“ On aura dans ce cas, en faisant $\alpha=\frac{m\omega+m'\omega'}{2n+1}$, $\alpha_1=\alpha$, $\alpha_2=2\alpha$, $\alpha_3=3\alpha$, $\ldots$ $\alpha_n=n\alpha$, ce qui suffit pour déterminer les quantités c_1, e_1, a et y.

Dans ce qui précède nous avons démontré qu'on aura une valeur convenable de la fonction y, en prenant, dans l'expression générale de cette fonction $y=\frac{f'+f.\varphi\theta}{g'+g.\varphi\theta}$, $f'=g=0$. On peut aisément trouver toutes les autres solutions possibles à l'aide des formules (10), (11), (12). Soit

(49) $$y_1=\frac{f'+f.\varphi\theta}{g'+g.\varphi\theta},$$

et désignons par c_2, e_2, les valeurs correspondantes de c_1 et e_1, on doit avoir

(50) $$\frac{dy_1}{\sqrt{(1-c_2^2y_1^2)(1-e_2^2y_1^2)}}=\pm a_1\frac{dx}{\sqrt{(1-e^2x^2)(1-c^2x^2)}},$$

mais en faisant $y=\frac{1}{k}\varphi\theta$, le second membre sera, d'après ce qui précède, égal à $\pm\frac{a_1}{a}\frac{dy}{\sqrt{(1-c_1^2y^2)(1-e_1^2y^2)}}$, donc on doit avoir

(51) $$\frac{dy_1}{\sqrt{(1-c_2^2y_1^2)(1-e_2^2y_1^2)}}=\pm\frac{a_1}{a}\frac{dy}{\sqrt{(1-c_1^2y^2)(1-e_1^2y^2)}},$$

où

$$y_1=\frac{f'+fy}{g'+gy}.$$

D'après les équations (10), (11), (12) on satisfait de la manière la plus générale à ces équations en prenant



$$(52)\quad\begin{cases} \text{a.}\quad y_1 = \pm\dfrac{a_1}{a}\,y, \quad c_2^2 = \dfrac{c_1^2 a^2}{a_1^2}, \quad e_2^2 = \dfrac{e_1^2 a^2}{a_1^2}, \\ \text{b.}\quad y_1 = \pm\dfrac{a_1}{ae_1c_1}\,\dfrac{1}{y}, \quad c_2^2 = \dfrac{c_1^2 a^2}{a_1^2}, \quad e_2^2 = \dfrac{e_1^2 a^2}{a_1^2}, \\ \text{c.}\quad y_1 = m\dfrac{1 - y\sqrt{\pm e_1 c_1}}{1 + y\sqrt{\pm e_1 c_1}}, \quad c_2 = \dfrac{1}{m}\left(\dfrac{\sqrt{c_1} - \sqrt{\pm e_1}}{\sqrt{c_1} + \sqrt{\pm e_1}}\right)^2, \\ \qquad \dfrac{a_1}{a} = \dfrac{m\sqrt{-1}}{2}(c_1 \mp e_1), \quad e_2 = \dfrac{1}{m}\left(\dfrac{\sqrt{c_1} + \sqrt{\pm e_1}}{\sqrt{c_1} - \sqrt{\pm e_1}}\right)^2, \end{cases}$$

Ces trois formules, en y faisant $y = \frac{1}{k}\varphi\theta$, contiendront donc toutes les manières possibles de satisfaire à l'équation (50).

On peut sans nuire à la généralité faire $k = 1$. La première de ces formules est la même que celle qui résulte de $y = \frac{1}{k}\varphi\theta$. La seconde en résulte en mettant $\frac{1}{e_1 c_1}\frac{1}{y}$ au lieu de y. Les modules restent par cette substitution les mêmes. La troisième est en général différente des deux premières.

Deuxième cas. Si k est égal à zéro, et l'une des quantités k', k'' égale à l'unité.

Si, k étant égal à zéro, l'une des quantités k', k'' est égale à l'unité, il faut nécessairement que l'autre soit égale à zéro. En effet si l'on avait $k' = k'' = 1$, les racines $\lambda\left(\theta + \frac{\omega + \omega'}{2}\right)$, $\lambda\left(\theta + \frac{3\omega + \omega'}{2}\right)$ donneraient celle-ci $\lambda\left(\theta + \frac{3\omega + \omega'}{2} - \frac{\omega + \omega'}{2}\right) = \lambda(\theta + \omega)$, donc k ne serait pas égal à zéro comme nous l'avons supposé. Désignons donc par β l'une des quantités $\frac{\omega + \omega'}{2}$, $\frac{3\omega + \omega'}{2}$, l'expression de $\varphi\theta$ deviendra

$$(53)\quad \varphi\theta = \lambda\theta + \lambda(\theta + \beta) + \lambda(\theta + \alpha_1) + \lambda(\theta - \alpha_1) + \cdots + \lambda(\theta + \alpha_n) + \lambda(\theta - \alpha_n),$$

ou, en l'exprimant en fonction de x,

$$(54)\qquad \varphi\theta = x \pm \frac{1}{ec}\,\frac{1}{x} + 2x\,\Sigma\frac{\Delta(\alpha)}{1 - e^2c^2\lambda^2\alpha\,.\,x^2}.$$

Soit comme dans le premier cas $1 - c_1 y = 0$ pour $x = \frac{1}{c}$, on aura

$$1 \pm c_1 y = \frac{g' \pm c_1 f'}{r}\left(1 \pm \frac{\varphi\theta}{\varphi\left(\frac{\omega}{2}\right)}\right),$$

(55) $$1 - c_1^2 y^2 = \frac{g'^2 - c_1^2 f'^2}{r^2}\left[1 - \left(\frac{\varphi\theta}{\varphi\left(\frac{\omega}{2}\right)}\right)^2\right].$$

Maintenant, de la même manière qu'on a démontré précédemment la formule (28), on établira la suivante:

(56) $$1 - \frac{\varphi\theta}{\varphi\delta} = -\frac{1}{\varphi\delta \cdot \varrho}\cdot\left(1 - \frac{x}{\lambda\delta}\right)\left(1 - \frac{x}{\lambda(\delta+\beta)}\right)\left(1 - \frac{x}{\lambda(\delta+\alpha_1)}\right)\left(1 - \frac{x}{\lambda(\delta-\alpha_1)}\right)\cdots$$
$$\cdots\left(1 - \frac{x}{\lambda(\delta+\alpha_n)}\right)\left(1 - \frac{x}{\lambda(\delta-\alpha_n)}\right),$$

où l'on a fait pour abréger:

(57) $$\varrho = \pm ecx(1 - e^2c^2\lambda^2\alpha_1 . x^2)(1 - e^2c^2\lambda^2\alpha_2 . x^2)\ldots(1 - e^2c^2\lambda^2\alpha_n . x^2).$$

En faisant $\delta = \pm\frac{\omega}{2}$, on aura les valeurs de $1 + \frac{\varphi\theta}{\varphi\left(\frac{\omega}{2}\right)}$ et $1 - \frac{\varphi\theta}{\varphi\left(\frac{\omega}{2}\right)}$, qui multipliées entre elles donneront celle de $1 - \left(\frac{\varphi\theta}{\varphi\left(\frac{\omega}{2}\right)}\right)^2$. Cette valeur substituée dans l'expression de $1 - c_1^2y^2$ (55) donnera

$$1 - c_1^2 y^2 = \frac{c_1^2 f'^2 - g'^2}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\cdot r^2\varrho^2}(1 - c^2x^2)(1 - e^2x^2)\left(1 - \frac{x^2}{\lambda^2\left(\frac{\omega}{2} - \alpha_1\right)}\right)^2\cdots$$
$$\cdots\left(1 - \frac{x^2}{\lambda^2\left(\frac{\omega}{2} - \alpha_n\right)}\right)^2,$$

et par conséquent, si l'on fait

(58) $$t = \left(1 - \frac{x^2}{\lambda^2\left(\frac{\omega}{2} - \alpha_1\right)}\right)\left(1 - \frac{x^2}{\lambda^2\left(\frac{\omega}{2} - \alpha_2\right)}\right)\cdots\left(1 - \frac{x^2}{\lambda^2\left(\frac{\omega}{2} - \alpha_n\right)}\right),$$

on aura

(59) $$\sqrt{1 - c_1^2 y^2} = \frac{\sqrt{c_1^2 f'^2 - g'^2}}{\varphi\left(\frac{\omega}{2}\right)\cdot r\varrho}\, t\sqrt{(1 - c^2x^2)(1 - e^2x^2)}.$$

Cette valeur, mise dans l'équation (29), donne

(60) $$\sqrt{1 - e_1^2 y^2} = \frac{\varphi\left(\frac{\omega}{2}\right)}{a\sqrt{c_1^2 f'^2 - g'^2}}\,\frac{r\varrho}{t}\,\frac{dy}{dx}.$$

On voit donc que $\sqrt{1 - e_1^2 y^2}$ doit être une fonction rationnelle de x.

Il n'est pas difficile de démontrer qu'on satisfera à cette condition, en supposant que $1-e_1^2y^2$ s'évanouit pour $x=\pm\lambda\left(\frac{\omega-\beta}{2}\right)$; on aura alors

$$(61)\qquad \sqrt{1-e_1^2y^2}=\frac{\sqrt{e_1^2f'^2-g'^2}}{\varphi\left(\frac{\omega-\beta}{2}\right)\cdot r\varrho}\left(1-\frac{x^2}{\lambda^2\left(\frac{\omega-\beta}{2}\right)}\right)\left(1-\frac{x^2}{\lambda^2\left(\frac{\omega-\beta}{2}-\alpha_1\right)}\right)\cdots$$
$$\cdots\left(1-\frac{x^2}{\lambda^2\left(\frac{\omega-\beta}{2}-\alpha_n\right)}\right).$$

Les équations (24) donneront dans ce cas

$$g'=c_1f\varphi\left(\frac{\omega}{2}\right)=e_1f\varphi\left(\frac{\omega-\beta}{2}\right),$$

$$f'=\frac{g}{c_1}\varphi\left(\frac{\omega}{2}\right)=\frac{g}{e_1}\varphi\left(\frac{\omega-\beta}{2}\right),$$

auxquelles on satisfera en prenant

$$f=g'=0,$$

$$\frac{f'}{g}=\frac{\varphi\left(\frac{\omega}{2}\right)}{c_1}=\frac{\varphi\left(\frac{\omega-\beta}{2}\right)}{e_1}.$$

De là il résulte:

$$(62)\qquad c_1=k\cdot\varphi\left(\frac{\omega}{2}\right);\quad e_1=k\cdot\varphi\left(\frac{\omega-\beta}{2}\right)$$

$$y=\frac{1}{k\varphi\theta},\qquad a=\pm\frac{ec}{k}.$$

Connaissant ainsi une solution de l'équation proposée, on aura toutes les autres à l'aide des formules (10), (11), (12). Le cas le plus simple est celui où $n=0$. Alors on aura, en faisant $c_1=c=1$, $\beta=\frac{3\omega}{2}+\frac{\omega'}{2}$,

$$\varphi\theta=\lambda\theta+\lambda(\theta+\beta)=x+\frac{1}{ex},$$

$$(63)\qquad \begin{cases} y=(1+e)\dfrac{x}{1+ex^2}, \quad e_1=\dfrac{2\sqrt{e}}{1+e},\\[2ex] \dfrac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-e_1^2y^2)}}=(1+e)\dfrac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-e^2x^2)}}.\end{cases}$$

Troisième cas. *Si* $k = 1$.

Dans ce cas l'expression (15) de $\varphi\theta$ deviendra,

$$\varphi\theta = \lambda\theta + \lambda(\theta + \omega) + \lambda(\theta + \alpha_1) + \lambda(\theta - \alpha_1) + \cdots + \lambda(\theta + \alpha_n) + \lambda(\theta - \alpha_n).$$

Or cette quantité se réduit à zéro pour une valeur quelconque de θ, ce dont on pourra se convaincre aisément, en remarquant que $\varphi\theta$ doit rester le même en changeant θ en $\theta + \omega$.

La fonction $\varphi\theta$ étant égale à zéro, si l'on désigne par $\frac{1}{2}(f' - g'y)$ le coefficient de x^{m-2} dans le premier membre de l'équation (9), on aura, en faisant pour abréger

$$F\theta = \lambda^2\theta + \lambda^2(\theta + \alpha) + \cdots + \lambda^2(\theta + \alpha_{m-1}):$$

$$f' - g'y = -(f - gy)\,F\theta,$$

d'où l'on tire,

(64) $$y = \frac{f' + f.F\theta}{g' + g.F\theta}.$$

Maintenant il n'est pas difficile de trouver toutes les solutions relatives à ce troisième cas en se servant de l'expression (64). Je ne m'arrêterai pas ici à développer les formules mêmes; je vais seulement faire connaître un théorème plus général que celui exprimé par les formules (48).

Théorème. On aura

(65) $$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-e_1^2y^2)}} = \pm \dfrac{a\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-e^2x^2)}} = \pm\, a\,d\theta, \\ \text{où} \\ a = k.\lambda\dfrac{\omega}{n}\cdot\lambda\dfrac{2\omega}{n}\cdots\lambda\dfrac{(n-1)\omega}{n}, \quad e_1 = e^n\left(\lambda\dfrac{\omega}{2n}\cdot\lambda\dfrac{3\omega}{2n}\cdots\lambda(n-\tfrac{1}{2})\dfrac{\omega}{n}\right)^2, \\ 1 = k.\lambda\dfrac{\omega}{2n}\cdot\lambda\dfrac{3\omega}{2n}\cdots\lambda(n-\tfrac{1}{2})\dfrac{\omega}{n}, \\ y = k.\lambda\theta.\lambda\left(\theta + \dfrac{\omega}{n}\right)\lambda\left(\theta + \dfrac{2\omega}{n}\right)\cdots\lambda\left(\theta + \dfrac{(n-1)\omega}{n}\right), \\ n \text{ étant un nombre entier quelconque, } \dfrac{\omega}{2} = \displaystyle\int_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-e^2x^2)}}. \end{array}\right.$$

En supposant n impair, la formule (65) est la même que celle que nous avons trouvée (48).

Si l'on fait $x = \sin\varphi$, $y = \sin\psi$, on obtiendra

(66) $$\frac{d\psi}{\sqrt{1-e_1^2\sin^2\psi}} = a\frac{d\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}},$$

où l'on pourra exprimer la quantité ψ comme il suit:

(67) $$\begin{aligned}\psi = \varphi &+ \operatorname{arc\,tang}\left\{\operatorname{tang}\varphi.\sqrt{1-e^2\lambda^2\left(\frac{\omega}{n}\right)}\right\}\\ &+ \operatorname{arc\,tang}\left\{\operatorname{tang}\varphi.\sqrt{1-e^2\lambda^2\left(\frac{2\omega}{n}\right)}\right\}\\ &+ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ &+ \operatorname{arc\,tang}\left\{\operatorname{tang}\varphi.\sqrt{1-e^2\lambda^2\left(\frac{n-1}{n}\omega\right)}\right\}.\end{aligned}$$

En supposant $n=2$ on aura

$$\psi = \varphi + \operatorname{arc\,tang}(\operatorname{tang}\varphi.\sqrt{1-e^2}),$$

ou bien

$$\operatorname{tang}(\psi-\varphi) = \operatorname{tang}\varphi.\sqrt{1-e^2}.$$

(Voyez *Legendre* Exercices t. I, p. 84).

Si l'on suppose n très grand, on aura à peu près $e_1=0$, donc

$$\psi = a\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}} = \sum_0^{n-1}{}_m \operatorname{arc\,tang}\left\{\operatorname{tang}\varphi.\sqrt{1-e^2\lambda^2\left(\frac{m\omega}{n}\right)}\right\}.$$

Soit $\varphi=\frac{\pi}{2}$, on aura $\psi = n\frac{\pi}{2}$, donc $n\frac{\pi}{2} = a\frac{\omega}{2}$, donc $\frac{1}{a}=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\omega}{n}$. De là il résulte, en faisant n infini,

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}} = \frac{1}{\pi}\int_0^\omega \operatorname{arc\,tang}(\operatorname{tang}\varphi.\sqrt{1-e^2\lambda^2 x})\,dx.$$

Nous avons vu précédemment que le nombre des valeurs inégales de l'expression $\lambda(\theta+k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_\nu\alpha_\nu)$ est toujours fini. On peut dans tous les cas trouver ces valeurs comme il suit.

Soient

(68) $$\left\{\begin{aligned}&\lambda(\theta+n_1\alpha_1)=\lambda\theta,\\ &\lambda(\theta+n_2\alpha_2)=\lambda(\theta+m_1\alpha_1),\\ &\lambda(\theta+n_3\alpha_3)=\lambda(\theta+m_1\alpha_1+m_2\alpha_2),\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &\lambda(\theta+n_\nu\alpha_\nu)=\lambda(\theta+m_1\alpha_1+m_2\alpha_2+\cdots+m_{\nu-1}\alpha_{\nu-1}),\end{aligned}\right.$$

où $n_1, n_2, n_3, \ldots n_\nu$ sont les nombres entiers les plus petits possibles qui puissent satisfaire à des équations de cette forme, $m_1, m_2, \ldots m_{\nu-1}$ étant des nombres entiers, qui pourront être différens dans les différentes équations. Cela posé, je dis qu'on aura toutes les valeurs inégales de l'expression $\lambda(\theta + k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_\nu\alpha_\nu)$ en attribuant à $k_1, k_2, \ldots k_\nu$ toutes les valeurs entières et positives respectivement moindres que $n_1, n_2, \ldots n_\nu$. En effet, si l'on avait

$$\lambda(\theta + k_1'\alpha_1 + k_2'\alpha_2 + \cdots + k_\nu'\alpha_\nu) = \lambda(\theta + k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_\nu\alpha_\nu),$$

sans avoir à la fois

$$k_1' = k_1, \quad k_2' = k_2, \ldots k_\nu' = k_\nu,$$

en mettant $\theta - k_1\alpha_1 - k_2\alpha_2 - \cdots - k_{m-1}\alpha_{m-1} - k_m'\alpha_m - k_{m+1}\alpha_{m+1} - \cdots - k_\nu\alpha_\nu$ au lieu de θ, on en tirera

$$\lambda[\theta + (k_m - k_m')\alpha_m] = \lambda[\theta + (k_1' - k_1)\alpha_1 + \cdots + (k'_{m-1} - k_{m-1})\alpha_{m-1}],$$

où l'on a supposé que $k_m - k_m'$ est la première des quantités $k_\nu - k_\nu'$, $k_{\nu-1} - k'_{\nu-1}, \ldots$ qui soit différente de zéro. Or en supposant, ce qui est permis, que $k_m - k_m'$ soit positif, ce nombre sera en même temps moindre que n_m, ce qui est contre l'hypothèse. Le nombre total des valeurs inégales de l'expression $\lambda(\theta + k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_\nu\alpha_\nu)$ sera donc égal à

$$n_1 n_2 n_3 \ldots n_\nu,$$

car il est clair qu'on n'aura pas de valeurs nouvelles, en attribuant à k_1, $k_2, \ldots k_\nu$ des valeurs respectivement plus grandes que $n_1, n_2, \ldots n_\nu$.

Le degré de l'équation $p - qy = 0$ est donc

$$m = n_1 n_2 n_3 \ldots n_\nu.$$

Si donc ce degré doit être un nombre premier, on doit avoir $\nu = 1$ et $m = n_1$. Les racines de l'équation $p - qy = 0$ deviendront donc dans ce cas

$$\lambda\theta, \ \lambda(\theta + \alpha), \ \lambda(\theta + 2\alpha), \ldots \lambda[\theta + (n-1)\alpha],$$

$$\lambda(\theta + n\alpha) = \lambda\theta, \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{m\omega + m'\omega'}{n},$$

m et m' étant deux nombres entiers dont la somme est un nombre pair et qui n'ont pas un même diviseur commun avec n.

On doit remarquer qu'à la même valeur de m répondent toujours plusieurs solutions différentes du problème général. Le nombre total de ces solutions est en général égal à $3m$.

On peut de ce qui précède déduire un grand nombre de théorèmes remarquables sur les fonctions elliptiques. Parmi ceux-ci on doit distinguer les suivans.

a. Si l'èquation (1) peut être satisfaite en supposant $y = \psi(x) = \frac{p}{q}$ où le degré des fonctions entières p et q est égal à un nombre composé mn, on pourra toujours trouver des fonctions rationnelles φ et f telles qu'en faisant

$$(69) \quad \left\{ \begin{aligned} & x_1 = \varphi x = \frac{p'}{q'}, \text{ on ait } y = f(x_1) = \frac{p_1}{q_1}, \\ & \frac{dx_1}{\sqrt{(1-c_2^2 x_1^2)(1-e_2^2 x_1^2)}} = a_1 \frac{dx}{\sqrt{(1-c^2x^2)(1-e^2x^2)}}, \\ & \frac{dy_1}{\sqrt{(1-c_1^2 y^2)(1-e_1^2 y^2)}} = a_2 \frac{dx_1}{\sqrt{(1-c_2^2 x_1^2)(1-e_2^2 x_1^2)}}, \end{aligned} \right.$$

le degré des fonctions entières p' et q' étant égal à l'un des facteurs m, n, et le degré de p_1 et q_1 étant égal à l'autre.

b. Quel que soit le degré de l'équation $p - qy = 0$, on en pourra toujours tirer la valeur de x en y à l'aide d'opérations algébriques. Voilà donc une classe d'équations qui sont résolubles algébriquement. Les racines auront la forme suivante:

$$(70) \qquad x = \text{fonct. ration.} \left(y,\ r_1^{\frac{1}{n_1}},\ r_2^{\frac{1}{n_2}},\ r_3^{\frac{1}{n_3}} \ldots r_\nu^{\frac{1}{n_\nu}}\right),$$

$n_1, n_2, \ldots n_\nu$ étant des nombres premiers entre eux dont le produit est égal au degré de l'équation en question, et les $r_1, r_2, \ldots r_\nu$ étant de la forme

$$(71) \qquad \zeta + t\sqrt{(1-c_1^2y^2)(1-e_1^2y^2)},$$

où ζ et t sont des fonctions entières de y.

c. Il y a un cas remarquable du problème général; c'est celui où l'on demande toutes les solutions possibles de l'équation

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-c^2y^2)(1-e^2y^2)}} = a \frac{dx}{\sqrt{(1-c^2x^2)(1-e^2x^2)}}.$$

On aura à cet égard le théorème suivant:

Si l'équation précédente admet une solution *algébrique* en x et y, y étant rationnel en x ou non, la quantité constante a doit nécessairement avoir la forme

$$\mu' + \sqrt{-\mu},$$

où μ' et μ désignent deux nombres rationnels, le dernier étant essentiellement *positif.* Si l'on attribue à a une telle valeur on pourra trouver une infinité de valeurs différentes pour e et c, qui rendent le problème possible. Toutes ces valeurs sont exprimables par des *radicaux.*

Si donc on suppose que a soit une quantité réelle il faut qu'elle soit en même temps rationnelle. Dans ce cas on sait d'ailleurs qu'on pourra satisfaire à l'équation différentielle dont il s'agit, quelles que soient les valeurs des quantités c et e.

d. Du théorème précédent, on peut par un simple changement de variables déduire celui-ci:

Si l'équation

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-b^2y^2)}} = a\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}}$$

où $b^2 = 1 - c^2$, admet une solution algébrique entre x et y, le coefficient a doit avoir la forme suivante:

$$\sqrt{\mu} + \mu'\sqrt{-1}$$

μ' et μ ayant la même signification que précédemment. Si donc on veut que a soit réel il faut qu'il soit égal à la racine carrée d'une quantité rationnelle. Cette condition remplie, le problème a une infinité de solutions. Comme cas particulier on en déduit ce théorème:

Si en supposant φ et ψ réels et le module c moindre que l'unité, l'équation

$$(72) \qquad \frac{d\psi}{\sqrt{1-b^2\sin^2\psi}} = a\frac{d\varphi}{\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi}},$$

a une intégrale algébrique en $\sin\varphi$ et $\sin\psi$, il faut nécessairement que a soit égal à la racine carrée d'une quantité rationnelle et positive.

Ainsi par exemple, si dans la formule (65) on suppose $e_1^2 = 1 - e^2$, on aura $a = \sqrt{n}$ comme nous allons voir. En faisant $\theta = \frac{\omega}{2n}$ dans l'ex-

pression de y, on trouvera, en vertu de la valeur de k, $y=1$, donc

$$(73)\qquad \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-e_1^2y^2)}} = a\int_0^{\lambda\left(\frac{\omega}{2n}\right)} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-e^2x^2)}} = \frac{a\omega}{2n},$$

en remarquant qu'on doit, dans le second membre de l'équation (65), prendre le signe supérieur depuis $x=0$ jusqu'à $x=\lambda\left(\frac{\omega}{2n}\right)$. Cela posé, en remarquant que $\lambda\left(\theta+\frac{m\omega}{n}\right)=\lambda\left(\frac{(n-m)\omega}{n}-\theta\right)$, il est clair qu'on aura

$$y=k.\lambda\theta.\lambda\left(\frac{\omega}{n}-\theta\right).\lambda\left(\frac{2\omega}{n}-\theta\right)\ldots\lambda\left(\frac{(n-1)\omega}{n}-\theta\right);$$

en multipliant cette valeur par celle que donne la formule (65), on aura, en faisant usage de la formule

$$\lambda(\alpha+\theta).\lambda(\alpha-\theta)=\frac{\lambda^2\alpha-\lambda^2\theta}{1-e^2\lambda^2\alpha.\lambda^2\theta}=\frac{\lambda^2\alpha-x^2}{1-e^2\lambda^2\alpha.x^2},$$

qu'on obtiendra à l'aide du théorème 1:

$$y^2=k^2x^2\frac{\lambda^2\frac{\omega}{n}-x^2}{1-e^2\lambda^2\frac{\omega}{n}\cdot x^2}\cdots\frac{\lambda^2\frac{(n-1)\omega}{n}-x^2}{1-e^2\lambda^2\frac{(n-1)\omega}{n}\cdot x^2}.$$

En faisant maintenant $x=p\sqrt{-1}$, $y=z\sqrt{-1}$, on aura, en supposant p réel, pour toutes les valeurs de cette quantité,

$$\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1+z^2)(1+e_1^2z^2)}} = a\int_0^p \frac{dp}{\sqrt{(1+p^2)(1+e^2p^2)}},$$

mais si l'on fait $p=\frac{1}{0}$, on aura de même $z=\frac{1}{0}$, donc

$$\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{dz}{\sqrt{(1+z^2)(1+e_1^2z^2)}} = a\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{dp}{\sqrt{(1+p^2)(1+e^2p^2)}}.$$

Le premier membre de cette équation est la même chose que $\frac{\omega}{2}$, et le second la même chose que $a\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-e_1^2y^2)}}$, ce qui est facile à prouver, donc

$$\frac{\omega}{2} = a \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-e_1^2 y^2)}}.$$

Cette équation combinée avec (73) donne

$$\frac{\omega}{2} = a \frac{a\omega}{2n},$$

c'est-à-dire

$$a = \sqrt{n}.$$

Christiania le 27 mai 1828.

XX.

ADDITION AU MÉMOIRE PRÉCÉDENT.

Astronomische Nachrichten, herausgegeben von *Schumacher*, Bd. 7, n° 147. Altona 1829.

Dans le numéro 138 de ce journal j'ai fait voir comment on pourra trouver toutes les transformations possibles, réelles ou imaginaires, d'une fonction elliptique proposée. Les modules c, e, c_1, e_1 pourront être des quantités quelconques. Le cas le plus remarquable est celui où l'on suppose les modules réels. Dans ce cas le problème général pourra se résoudre par une méthode particulière, entièrement différente de celle que nous avons donnée dans le mémoire cité. Puisque cette nouvelle méthode est remarquable par sa grande simplicité je vais l'indiquer ici en peu de mots.

Le problème général que nous allons complètement résoudre est le suivant:

„Trouver tous les cas possibles où l'on pourra satisfaire à l'équation „différentielle:

$$(1) \qquad \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-c_1^2y^2)}} = a\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}}$$

„par une *équation algébrique* entre les variables x et y, en supposant „les modules c et c_1 moindres que l'unité et le coefficient a réel ou „imaginaire."

En désignant par $\lambda\theta$ la fonction inverse de celle-ci:

$$\theta = \int_0 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}}$$

de sorte que $x = \lambda\theta$, on aura, en vertu de la formule (4) du numéro 138,

$$\lambda[(-1)^{m+m'}\theta + m\omega + m'\omega'] = \lambda\theta,$$

où les quantités constantes ω, ω' sont déterminées par les formules

(2) $$\frac{\omega}{2} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}},$$

$$\frac{\omega'}{2} = \int_0^{\frac{1}{c}} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}}.$$

Dans le cas que nous considérons, la quantité ω est réelle, mais ω' est imaginaire. On aura en effet

$$\frac{\omega'}{2} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}} + \int_1^{\frac{1}{c}} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}},$$

c'est-à-dire:

$$\frac{\omega'}{2} = \frac{\omega}{2} + \sqrt{-1}\cdot\int_1^{\frac{1}{c}} \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(1-c^2x^2)}},$$

où il est clair que le coefficient de $\sqrt{-1}$ est une quantité réelle. En faisant $x = \frac{1}{\sqrt{1-b^2y^2}}$, où $b = \sqrt{1-c^2}$, on trouve

$$\frac{\omega'}{2} = \frac{\omega}{2} + \sqrt{-1}\cdot\frac{\varpi}{2},$$

où

(3) $$\frac{\varpi}{2} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-b^2x^2)}}.$$

Le théorème II du numéro 138 donnera donc celui-ci:

„On satisfera de la manière la plus générale à l'équation

$$\lambda\theta' = \lambda\theta$$

„en prenant

(4) $$\theta' = (-1)^m\theta + m\omega + m'\varpi\sqrt{-1},$$

„où m et m' sont des nombres entiers quelconques, et ω et ϖ deux „quantités réelles données par les formules (2) et (3).“

Cela posé, soit

(5) $$f(y, x) = 0$$

l'équation algébrique entre y et x qui doit satisfaire à l'équation différentielle

(1). Si l'on fait $x=\lambda\theta$ et $y=\lambda_1\theta'$, où θ et θ' sont deux nouvelles variables, et λ_1 la fonction elliptique qui répond au module c_1, de sorte que

(6) $$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-c_1^2y^2)}}=d\theta' \text{ pour } y=\lambda_1\theta',$$

l'équation (1) deviendra

$$d\theta'=\pm a\,d\theta,$$

d'où l'on tire en intégrant: $\theta'=\varepsilon\pm a\theta$, où ε est une constante. On a donc

$$y=\lambda_1(\varepsilon\pm a\theta),$$

ou bien, en mettant $+a$ pour $\pm a$,

(7) $$y=\lambda_1(\varepsilon+a\theta).$$

L'équation (5) entre x et y donnera donc celle-ci

(8) $$f[\lambda_1(\varepsilon+a\theta),\ \lambda\theta]=0$$

qui ne contient que la seule variable θ, et qui aura lieu quelle que soit la valeur de cette quantité.

Il ne serait pas difficile à l'aide de la formule (8) de trouver la fonction $f(y,x)$; mais pour notre objet il suffit de connaître le coefficient a et une certaine relation entre les fonctions complètes. Voici comment on y parviendra. En mettant $\theta+2m\omega$ au lieu de θ, et en remarquant qu'en vertu de l'équation (4)

$$\lambda(\theta+2m\omega)=\lambda\theta,$$

on obtiendra cette autre équation

(9) $$f[\lambda_1(\varepsilon+2ma\omega+a\theta),\ \lambda\theta]=0.$$

On aura de même, en mettant $\theta+m\varpi i$ pour θ, où $i=\sqrt{-1}$,

(10) $$f[\lambda_1(\varepsilon+ma\varpi i+a\theta),\ \lambda\theta]=0.$$

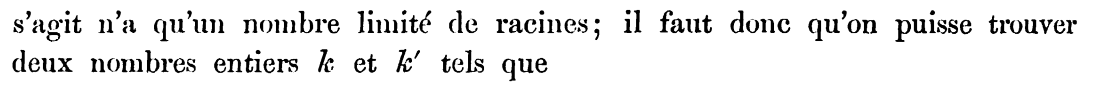
Dans ces deux équations m pourra être un nombre entier quelconque. En faisant $x=\lambda\theta$ on voit donc que l'équation algébrique

$$f(y,x)=0$$

est satisfaite en mettant pour y une quantité quelconque de l'une des deux formes:

$$\lambda_1(\varepsilon+2ma\omega+a\theta),\ \ \lambda_1(\varepsilon+ma\varpi i+a\theta);$$

mais m peut avoir une infinité de valeurs, tandis que l'équation dont il


s'agit n'a qu'un nombre limité de racines; il faut donc qu'on puisse trouver deux nombres entiers k et k' tels que

$$\lambda_1(\varepsilon + 2k'a\omega + a\theta) = \lambda_1(\varepsilon + 2ka\omega + a\theta), \tag{11}$$

et deux autres ν et ν' tels que

$$\lambda_1(\varepsilon + \nu' a\varpi i + a\theta) = \lambda_1(\varepsilon + \nu a\varpi i + a\theta). \tag{12}$$

En vertu de la formule (4) ces deux équations donneront respectivement

$$\left\{\begin{aligned} 2k'a\omega &= 2ka\omega + 2m\omega_1 + m'\varpi_1\sqrt{-1},\\ \nu' a\varpi i &= \nu a\varpi i + 2\mu\omega_1 + \mu'\varpi_1\sqrt{-1},\end{aligned}\right. \tag{13}$$

où ω_1 et ϖ_1 désignent les valeurs de ω et ϖ qui répondent au module c_1, c'est-à-dire qu'on a

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\omega_1}{2} &= \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c_1^2x^2)}}\\ \frac{\varpi_1}{2} &= \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-b_1^2x^2)}}, \quad \text{où } b_1 = \sqrt{1-c_1^2}.\end{aligned}\right. \tag{14}$$

Cela posé, les équations (13) donneront, en y mettant ν pour $k'-k$ et ν' pour $\nu'-\nu$,

$$\left\{\begin{aligned} a &= \frac{m}{\nu}\,\frac{\omega_1}{\omega} + \frac{m'}{2\nu}\,\frac{\varpi_1}{\omega}\sqrt{-1},\\ a &= \frac{\mu'}{\nu'}\,\frac{\varpi_1}{\varpi} - \frac{2\mu}{\nu'}\,\frac{\omega_1}{\varpi}\sqrt{-1},\end{aligned}\right. \tag{15}$$

d'où, en comparant les parties réelles et imaginaires,

$$\frac{m}{\nu}\,\frac{\omega_1}{\omega} = \frac{\mu'}{\nu'}\,\frac{\varpi_1}{\varpi}; \quad \frac{m'}{2\nu}\,\frac{\varpi_1}{\omega} = -\frac{2\mu}{\nu'}\,\frac{\omega_1}{\varpi}. \tag{16}$$

Ces deux équations donneront celles-ci:

$$\frac{\omega^2}{\varpi^2} = -\frac{1}{4}\,\frac{mm'}{\mu\mu'}\,\frac{\nu'^2}{\nu^2}, \quad \frac{\omega_1^2}{\varpi_1^2} = -\frac{1}{4}\,\frac{m'\mu'}{m\mu}. \tag{17}$$

Maintenant $\frac{\omega^2}{\varpi^2}$ est une fonction continue de c, donc les équations (17) ne sauraient avoir lieu que pour des valeurs particulières des modules c et c_1. Si donc on suppose c indéterminé il faut que l'une des équations

$$m' = \mu = 0, \tag{18}$$

$$(19)\qquad m = \mu' = 0$$

ait lieu. Les équations (15) et (16) se réduiront dans le premier cas à

$$(20)\qquad \begin{cases} a = \dfrac{m}{\nu}\dfrac{\omega_1}{\omega} = \dfrac{\mu'}{\nu'}\dfrac{\varpi_1}{\varpi}, \\[2mm] \dfrac{\omega_1}{\varpi_1} = \dfrac{\nu\mu'}{\nu' m}\dfrac{\omega}{\varpi}, \end{cases}$$

et dans le second cas à

$$(21)\qquad \begin{cases} a = \dfrac{m'}{2\nu}\dfrac{\varpi_1}{\omega}\sqrt{-1} = -\dfrac{2\mu}{\nu'}\dfrac{\omega_1}{\varpi}\sqrt{-1} \\[2mm] \dfrac{\omega_1}{\varpi_1} = -\dfrac{1}{4}\dfrac{m'\nu'}{\mu\nu}\dfrac{\varpi}{\omega}. \end{cases}$$

Mais si la valeur du module c est telle que la première des équations (17) ait lieu, on doit avoir en même temps

$$(22)\qquad \frac{\omega}{\varpi} = \frac{1}{2}\frac{\nu'}{\nu}\sqrt{-\frac{m m'}{\mu\mu'}},\quad \frac{\omega_1}{\varpi_1} = \frac{1}{2}\sqrt{-\frac{m'\mu'}{m\mu}},$$

et alors a est donné par l'une des équations (15).

Quant aux nombres m, m', μ, μ', ν, ν' il faut les prendre tels que ω, ω_1, ϖ, ϖ_1 soient, selon leur nature, des quantités positives. Si donc on suppose, ce qui est permis, ν et ν' positifs, il faut que m et μ' soient de même signe et m' et μ de signe contraire. On pourra d'ailleurs sans diminuer la généralité supposer m', m et μ' positifs et μ négatif.

De ce qu'on vient de voir on déduit immédiatement ce théorème:

Théorème I. Pour que l'équation (1) ait une intégrale algébrique en x et y, il faut nécessairement que les modules c_1 et c soient liés entre eux de telle sorte que l'une des deux quantités $\frac{\omega_1}{\varpi_1}$ et $\frac{\varpi_1}{\omega_1}$ soit dans un rapport *rationnel* avec $\frac{\omega}{\varpi}$; c'est-à-dire qu'on doit avoir l'une des équations

$$(23)\qquad \frac{\omega_1}{\varpi_1} = k\frac{\omega}{\varpi};\quad \frac{\varpi_1}{\omega_1} = k'\frac{\omega}{\varpi}$$

où k et k' sont des nombres rationnels. Si la première de ces équations a lieu, mais non la seconde, on aura en même temps

$$(24)\qquad a = \delta\frac{\omega_1}{\omega},$$

où δ est un nombre rationnel. Si la seconde équation a lieu mais non la première, on aura en même temps

$$(25)\qquad a = \delta \frac{\varpi_1}{\omega} \sqrt{-1}.$$

Enfin si les deux équations (23) ont lieu en même temps, les modules c et c_1 seront tous deux déterminés, savoir respectivement par les équations

$$(26)\qquad \frac{\varpi}{\omega} = \sqrt{k k'}, \quad \frac{\varpi_1}{\omega_1} = \sqrt{\frac{k'}{k}},$$

et alors le coefficient a doit avoir la forme

$$(27)\qquad a = \delta \frac{\omega_1}{\omega} + \delta' \frac{\varpi_1}{\omega} \sqrt{-1},$$

où δ et δ' sont des nombres rationnels.

Les conditions indiquées dans ce théorème doivent donc nécessairement être remplies pour que l'équation (1) ait une intégrale algébrique. Il reste encore le point le plus important, savoir de déterminer si ces conditions sont suffisantes. Or c'est ce que nous allons faire voir à l'aide de la formule (65) du numéro 138. Cette formule peut facilement être démontrée en faisant effectivement la substitution de y; mais il existe une autre démonstration, tirée de considérations entièrement différentes et que nous allons donner ici, en nous servant d'une formule démontrée dans les „*Recherches sur les fonctions elliptiques.*“ Il s'agit de la formule (185) de ce mémoire (*Crelle's* Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 2, p. 176), savoir

$$(28)\qquad f\alpha = \prod_0^{\infty}{}_m \frac{1 - \left(\dfrac{\varrho - \varrho^{-1}}{r^{m+\frac{1}{2}} - r^{-m-\frac{1}{2}}}\right)^2}{1 + \left(\dfrac{\varrho - \varrho^{-1}}{r^{m+\frac{1}{2}} + r^{-m-\frac{1}{2}}}\right)^2},$$

où

$$(29)\qquad \varrho = e^{\frac{\alpha\pi}{\varpi'}}, \quad r = e^{\frac{\omega'\pi}{\varpi'}},$$

les quantités ω' et ϖ' étant données par les équations

$$(30)\qquad \frac{\omega'}{2} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1+e^2x^2)}},$$

$$\frac{\varpi'}{2} = \int_0^{\frac{1}{e}} \frac{dx}{\sqrt{(1-e^2x^2)(1+x^2)}}.$$

On a de plus

(31) $$f\alpha = \sqrt{1-x^2}$$

où x est lié à α par l'équation

(32) $$\alpha = \int_0 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1+e^2x^2)}}.$$

Si l'on fait $e = \frac{c}{\sqrt{1-c^2}} = \frac{c}{b}$, $x = \sqrt{1-y^2}$, on trouvera

$$\frac{\omega'}{2} = b\frac{\omega}{2};\quad \frac{\varpi'}{2} = b\frac{\varpi}{2};\quad \frac{\omega'}{\varpi'} = \frac{\omega}{\varpi},$$

$$d\alpha = -b\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-c^2y^2)}},$$

d'où

$$y = \lambda\left(\frac{\omega}{2} - \frac{\alpha}{b}\right);$$

maintenant l'équation $x = \sqrt{1-y^2}$ donne $y = \sqrt{1-x^2} = f\alpha$, donc

$$f\alpha = \lambda\left(\frac{\omega}{2} - \frac{\alpha}{b}\right),$$

d'où, en mettant $b\frac{\omega}{2} - b\alpha$ à la place de α,

(33) $$\lambda\alpha = f\left(b\frac{\omega}{2} - b\alpha\right).$$

Cela posé, si l'on pose dans la formule (28) $b\frac{\omega}{2} - b\alpha$ au lieu de α, on trouvera, après quelques réductions faciles,

(34) $$\lambda\alpha = A\frac{(1-t^2)(1-t^2r^2)(1-t^{-2}r^2)(1-t^2r^4)(1-t^{-2}r^4)\ldots}{(1+t^2)(1+t^2r^2)(1+t^{-2}r^2)(1+t^2r^4)(1+t^{-2}r^4)\ldots},$$

où

(35) $$t = e^{-\frac{\alpha\pi}{\varpi}},\quad r = e^{-\frac{\omega}{\varpi}\pi}$$

et A une quantité indépendante de α. Si l'on fait pour abréger

(35′) $$\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}} = \psi(x),$$

on aura donc

(36) $$\lambda\alpha = A.\psi\left(\alpha\frac{\pi}{\varpi}\right)\cdot\psi(\omega+\alpha)\frac{\pi}{\varpi}\cdot\psi(\omega-\alpha)\frac{\pi}{\varpi}\cdot\psi(2\omega+\alpha)\frac{\pi}{\varpi}\cdot\psi(2\omega-\alpha)\frac{\pi}{\varpi}\cdots$$

Si l'on fait maintenant successivement

$$\alpha = \theta,\ \theta + \frac{\omega}{n},\ \theta + \frac{2\omega}{n},\ \ldots\ \theta + \frac{n-1}{n}\omega,$$

on aura les valeurs de $\lambda\theta$, $\lambda\left(\theta + \frac{\omega}{n}\right) \cdots \lambda\left(\theta + \frac{n-1}{n}\omega\right)$, qui multipliées ensemble donneront sur le champ

$$(37)\quad \lambda\theta . \lambda\left(\theta + \frac{\omega}{n}\right) \cdot \lambda\left(\theta + \frac{2\omega}{n}\right) \cdots \lambda\left(\theta + \frac{n-1}{n}\omega\right)$$
$$= A^n . \psi\delta\frac{\pi}{\varpi_1} \cdot \psi(\omega_1 + \delta)\frac{\pi}{\varpi_1} \cdot \psi(\omega_1 - \delta)\frac{\pi}{\varpi_1} \cdot \psi(2\omega_1 + \delta)\frac{\pi}{\varpi_1} \cdots,$$

où l'on a fait pour abréger

$$(38)\qquad \delta = \frac{\varpi_1}{\varpi}\theta,\quad \frac{\omega_1}{\varpi_1} = \frac{1}{n}\frac{\omega}{\varpi};$$

or si l'on pose dans la formule (36) le module c_1 au lieu de c, et si l'on désigne les valeurs correspondantes de

$$\lambda\theta,\ \omega,\ \varpi,\ A$$

respectivement par

$$\lambda_1\theta,\ \omega_1,\ \varpi_1,\ A_1$$

il viendra

$$\lambda_1\alpha = A_1 . \psi\alpha\frac{\pi}{\varpi_1} \cdot \psi(\omega_1 + \alpha)\frac{\pi}{\varpi_1} \cdot \psi(\omega_1 - \alpha)\frac{\pi}{\varpi_1} \cdots.$$

Le second membre de la formule (37) est donc la même chose que $\frac{A^n}{A_1}\lambda_1\delta = \frac{A^n}{A_1}\lambda_1\left(\frac{\varpi_1}{\varpi}\theta\right)$, et par conséquent on aura la formule suivante:

$$(39)\quad \lambda_1\left(\frac{\varpi_1}{\varpi}\theta\right) = \frac{A_1}{A^n} \cdot \lambda\theta . \lambda\left(\theta + \frac{\omega}{n}\right) . \lambda\left(\theta + \frac{2\omega}{n}\right) \ldots \lambda\left(\theta + \frac{n-1}{n}\omega\right),$$

cette équation a donc toujours lieu si le module c_1 est tel que

$$(40)\qquad \frac{\omega_1}{\varpi_1} = \frac{1}{n}\frac{\omega}{\varpi},$$

quel que soit d'ailleurs le nombre entier n.

Si l'on fait $\lambda\theta = x$, $\lambda_1\left(\frac{\varpi_1}{\varpi}\theta\right) = y$, on aura l'équation

$$(41)\qquad \frac{\varpi\, dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-c_1^2y^2)}} = \frac{\varpi_1\, dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}} = \varpi_1 d\theta,$$

qui par conséquent est satisfaite par l'expression algébrique

$$(42) \qquad y = \frac{A_1}{A^n} . \lambda\theta . \lambda\left(\theta + \frac{\omega}{n}\right) \ldots \lambda\left(\theta + \frac{n-1}{n}\omega\right).$$

La valeur de y est toujours une fonction algébrique de x. En effet, si n est un nombre impair, on a

$$(43) \qquad y = \frac{A_1}{A^n} \cdot x \cdot \frac{\lambda^2\left(\frac{\omega}{n}\right) - x^2}{1 - c^2 . \lambda^2\left(\frac{\omega}{n}\right) . x^2} \cdots \frac{\lambda^2\left(\frac{n-1}{2}\frac{\omega}{n}\right) - x^2}{1 - c^2\lambda^2\left(\frac{n-1}{2}\frac{\omega}{n}\right) \cdot x^2},$$

et si n est un nombre pair

$$(44) \qquad y = \frac{A_1}{A^n} \cdot x \cdot \frac{\lambda^2\left(\frac{\omega}{n}\right) - x^2}{1 - c^2\lambda^2\left(\frac{\omega}{n}\right) x^2} \cdots \frac{\lambda^2\left(\frac{n-2}{2}\frac{\omega}{n}\right) - x^2}{1 - c^2\lambda^2\left(\frac{n-2}{2}\frac{\omega}{n}\right) x^2} \cdot \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-c^2x^2}}.$$

Considérons maintenant les trois cas de notre problème général.

Premier cas. Si a est réel.

Dans ce cas on doit avoir, comme nous l'avons vu, $a = \delta \frac{\varpi_1}{\varpi} = \frac{\mu}{\nu} \frac{\varpi_1}{\varpi}$, où μ et ν sont des nombres entiers; l'équation proposée deviendra

$$(45) \qquad \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-c_1^2y^2)}} = \frac{\mu}{\nu} \frac{\varpi_1}{\varpi} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}}.$$

On doit avoir de plus $\frac{\omega_1}{\varpi_1} = k\frac{\omega}{\varpi} = \frac{m}{n}\frac{\omega}{\varpi}$, m et n étant entiers. Si l'on fait $x = \lambda(\nu\varpi\theta)$ et $y = \lambda_1(\mu\varpi_1\theta)$, θ étant une nouvelle variable, l'équation (45) sera satisfaite, car les deux membres se réduiront à $\mu\varpi_1 d\theta$. Pour avoir une intégrale en x et y il faut donc éliminer θ des deux équations

$$(46) \qquad x = \lambda(\nu\varpi\theta); \quad y = \lambda_1(\mu\varpi_1\theta).$$

Nous allons voir que le résultat de l'élimination sera une équation algébrique en x et y.

Soit c' un nouveau module et désignons par

$$\lambda'\theta, \ \omega', \ \varpi', \ A'$$

les valeurs correspondantes de

$$\lambda\theta, \ \omega, \ \varpi, \ A.$$

Cela posé, si l'on suppose le module c' tel que $\frac{\omega'}{\varpi'} = \frac{1}{n}\frac{\omega}{\varpi}$, on aura en vertu de la formule (39), en mettant $\mu\nu\theta\varpi$ au lieu de θ

$$(47)\quad \lambda'(\mu\nu\varpi'\theta) = \frac{A'}{A^n}\lambda(\mu\nu\varpi\theta).\lambda\left(\mu\nu\varpi\theta+\frac{\omega}{n}\right)\dots\lambda\left(\mu\nu\varpi\theta+\frac{n-1}{n}\omega\right);$$

maintenant, ayant $\frac{\omega'}{\varpi'} = \frac{1}{n}\frac{\omega}{\varpi}$ et $\frac{\omega_1}{\varpi_1} = \frac{m}{n}\frac{\omega}{\varpi}$, on en tire $\frac{\omega'}{\varpi'} = \frac{1}{m}\frac{\omega_1}{\varpi_1}$; donc la même formule donnera

$$(48)\quad \lambda'(\mu\nu\varpi'\theta) = \frac{A'}{A_1^m}\lambda_1(\mu\nu\varpi_1\theta).\lambda_1\left(\mu\nu\varpi_1\theta+\frac{\omega_1}{m}\right)\dots\lambda_1\left(\mu\nu\varpi_1\theta+\frac{m-1}{m}\omega_1\right).$$

En égalant entre elles ces deux expressions de $\lambda'(\mu\nu\varpi'\theta)$ et faisant pour abréger

$$(49)\quad \nu\varpi\theta = \delta,\quad \mu\varpi_1\theta = \delta_1,$$

il viendra

$$(50)\quad \begin{cases} \frac{1}{A^n}\lambda(\mu\delta).\lambda\left(\mu\delta+\frac{\omega}{n}\right)\dots\lambda\left(\mu\delta+\frac{n-1}{n}\omega\right) \\ = \frac{1}{A_1^m}\lambda_1(\nu\delta_1).\lambda_1\left(\nu\delta_1+\frac{\omega_1}{m}\right)\dots\lambda_1\left(\nu\delta_1+\frac{m-1}{m}\omega_1\right). \end{cases}$$

Le premier membre de cette équation est une fonction algébrique de $\lambda(\mu\delta)$ et le second une fonction algébrique de $\lambda_1(\nu\delta_1)$; mais $\lambda(\mu\delta)$ est à son tour une fonction algébrique de $\lambda\delta = x$, et $\lambda_1(\nu\delta_1)$ une fonction algébrique de $\lambda_1\delta_1 = y$. Donc enfin les deux membres de l'équation (50) sont respectivement des fonctions algébriques de x et de y. Donc cette équation exprime l'intégrale cherchée en x et y de l'équation différentielle (45). Pour en avoir l'intégrale complète il suffit d'ajouter à δ ou à δ_1 une quantité constante arbitraire. Quant aux quantités A et A_1 on doit remarquer qu'on a

$$(51)\quad A = \frac{1}{\sqrt{c}},\quad A_1 = \frac{1}{\sqrt{c_1}}.$$

Pour donner un exemple, supposons qu'on démande une intégrale algébrique de l'équation,

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-c_1^2y^2)}} = \frac{\varpi_1}{\varpi}\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}},$$

dans le cas où $\frac{\omega_1}{\varpi_1} = \frac{2}{3}\frac{\omega}{\varpi}$. On aura alors $\mu = \nu = 1$, $m = 2$, $n = 3$. L'équation (50) deviendra donc

$$c\sqrt{c}.\lambda\delta.\lambda\left(\delta+\frac{\omega}{3}\right).\lambda\left(\delta+\frac{2\omega}{3}\right) = c_1.\lambda_1\delta_1.\lambda_1\left(\delta_1+\frac{\omega_1}{2}\right),$$

c'est-à-dire:

$$y\frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-c_1^2y^2}}=\frac{c\sqrt{c}}{c_1}x\frac{\lambda^2\frac{\omega}{3}-x^2}{1-c^2\lambda^2\frac{\omega}{3}\cdot x^2}.$$

Second cas. Si $a\sqrt{-1}$ est réel.

Dans ce cas on doit avoir, d'après l'équation (25), $a=\frac{\mu}{\nu}\frac{\varpi_1}{\omega}\sqrt{-1}$, μ et ν étant entiers. On doit avoir de même $\frac{\omega_1}{\varpi_1}=\frac{m}{n}\frac{\varpi}{\omega}$. L'équation proposée (1) deviendra

$$(52)\qquad \frac{\nu}{\mu}\frac{\omega}{\varpi_1}\sqrt{-1}\cdot\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-c_1^2y^2)}}=\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}}.$$

Pour réduire ce cas au précédent, il suffit de faire $x=\frac{z\sqrt{-1}}{\sqrt{1-z^2}}$, z étant une nouvelle variable; on aura alors $\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}}=\sqrt{-1}\cdot\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-b^2z^2)}}$, b étant égal à $\sqrt{1-c^2}$, et par suite l'équation (52) deviendra

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-c_1^2y^2)}}=\frac{\mu}{\nu}\frac{\varpi_1}{\omega}\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-b^2z^2)}},$$

dont l'intégrale algébrique est exprimé par la formule (50) en y faisant $z=\lambda\delta=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ et mettant ϖ au lieu de ω.

Supposons par exemple qu'il s'agisse de trouver une intégrale algébrique de l'équation

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-c_1^2y^2)}}=\frac{\varpi_1}{\omega}\sqrt{-1}\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}},$$

dans le cas où $\frac{\omega_1}{\varpi_1}=2\cdot\frac{\varpi}{\omega}$. Ayant $\mu=\nu=1$ et $m=2$, $n=1$, l'équation (50) deviendra

$$\sqrt{b}\cdot\lambda\delta=c_1\cdot\lambda_1(\delta_1)\cdot\lambda_1\left(\delta_1+\frac{\omega_1}{2}\right),$$

ou, en remettant les valeurs de $\lambda\delta$ et $\lambda_1\delta_1$,

$$y\frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-c_1^2y^2}}=\frac{\sqrt{b}}{c_1}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}.$$

Troisième cas. *Si* $\frac{\varpi}{\omega} = \sqrt{kk'}$, $\frac{\omega_1}{\varpi_1} = \sqrt{\frac{k}{k'}}$.

Dans ce cas on doit avoir, en vertu du théorème I, $a = \frac{\mu}{\nu}\frac{\varpi_1}{\varpi} + \frac{\mu'}{\nu'}\frac{\varpi_1}{\omega}\sqrt{-1}$, μ, ν, μ', ν' étant des nombres entiers. L'équation proposée deviendra donc

$$(53) \qquad \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-c_1^2y^2)}} = \left(\frac{\mu}{\nu}\frac{\varpi_1}{\varpi} + \frac{\mu'}{\nu'}\frac{\varpi_1}{\omega}\sqrt{-1}\right)\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}},$$

et cette équation sera toujours intégrable algébriquement. En effet comme on a

$$\frac{\omega_1}{\varpi_1} = k\frac{\omega}{\varpi} \quad \text{et} \quad \frac{\omega_1}{\varpi_1} = \frac{1}{k'}\frac{\varpi}{\omega},$$

k' et k étant des nombres rationnels, on pourra, en vertu de ce que nous venons de voir dans les deux premiers cas, satisfaire algébriquement aux équations

$$\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-c_1^2z^2)}} = \frac{\mu}{\nu}\frac{\varpi_1}{\varpi}\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}},$$

$$\frac{dv}{\sqrt{(1-v^2)(1-c_1^2v^2)}} = \frac{\mu'}{\nu'}\frac{\varpi_1}{\omega}\sqrt{-1}\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}}.$$

Par là l'équation (53) deviendra

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-c_1^2y^2)}} = \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-c_1^2z^2)}} + \frac{dv}{\sqrt{(1-v^2)(1-c_1^2v^2)}};$$

on y satisfera, comme on sait, en prenant

$$(54) \qquad y = \frac{z\sqrt{(1-v^2)(1-c_1^2v^2)} + v\sqrt{(1-z^2)(1-c_1^2z^2)}}{1-c_1^2z^2v^2}.$$

En substituant les valeurs de v et z en x, on aura une intégrale de l'équation, algébrique en x et y.

Nous avons ainsi démontré que les conditions nécessaires exposées dans le théorème I sont en même temps suffisantes.

D'après ce qui a été exposé dans le premier cas, on a immédiatement ce théorème:

Pour que deux fonctions elliptiques réelles $F(c', \theta')$, $F(c, \theta)$ puissent être réduites l'une à l'autre, il est nécessaire et il suffit qu'on ait entre les fonctions complètes $F^1(c)$, $F^1(b)$, $F^1(c')$, $F^1(b')$ cette relation:

(55) $$n \,.\, F^1(c') \,.\, F^1(b) = m \,.\, F^1(b') \,.\, F^1(c),$$

où m et n sont des nombres entiers. Si cette condition est remplie, on pourra établir une relation algébrique entre $\sin\theta'$ et $\sin\theta$ telle que

(56) $$F(c', \theta') = k \frac{F^1(b')}{F^1(b)} F(c, \theta),$$

où k est un nombre rationnel. On pourra ajouter que dans le cas où $k=1$, θ' est lié à θ par l'équation:

(57) $$\begin{cases} \theta' + \operatorname{arc\,tang}(a_1' \operatorname{tang}\theta') + \cdots + \operatorname{arc\,tang}(a'_{m-1} \operatorname{tang}\theta') \\ = \theta + \operatorname{arc\,tang}(a_1 \operatorname{tang}\theta) + \cdots + \operatorname{arc\,tang}(a_{n-1} \operatorname{tang}\theta), \end{cases}$$

où $a_1, a_2 \ldots a_1', a_2' \ldots$ sont des quantités constantes données par les formules

(58) $$\begin{cases} a_\mu = \sqrt{1 - c^2 \sin^2\theta_\mu}, \\ a_\mu' = \sqrt{1 - c'^2 \sin^2\theta_\mu'}, \end{cases}$$

après avoir déterminé θ_μ et θ_μ' de telle sorte que

(59) $$\begin{cases} F(c, \theta_\mu) = \dfrac{2\mu}{n} F^1(c) = \dfrac{\mu}{n} \displaystyle\int_0^\pi \frac{d\theta}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2\theta}}, \\ F(c', \theta_\mu') = \dfrac{2\mu}{m} F^1(c') = \dfrac{\mu}{m} \displaystyle\int_0^\pi \frac{d\theta}{\sqrt{1 - c'^2 \sin^2\theta}}. \end{cases}$$

En prenant $n=1$ on aura la formule (67) du numéro 138.

Il y a un cas du problème général qui mérite d'être remarqué; c'est celui où l'on suppose les deux modules égaux entre eux, en d'autres termes, où l'on demande tous les cas dans lesquels il sera possible d'intégrer algébriquement l'équation différentielle

(60) $$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-c^2y^2)}} = a \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}}.$$

On a dans ce cas $\omega' = \omega$, $\varpi' = \varpi$, et par conséquent les équations (15) deviendront

$$a = \frac{m}{\nu} + \frac{m'}{2\nu} \frac{\varpi}{\omega} \sqrt{-1} = \frac{\mu'}{\nu'} - \frac{2\mu}{\nu'} \frac{\omega}{\varpi} \sqrt{-1},$$

et de là

$$\frac{m}{\nu} = \frac{\mu'}{\nu'}, \quad \frac{m'}{2\nu} \cdot \frac{\varpi}{\omega} = -\frac{2\mu}{\nu'} \cdot \frac{\omega}{\varpi}.$$

Si l'on veut que a soit réel, on a $a=\frac{m}{\nu}$, $m'=\mu=0$; dans ce cas on n'aura aucune condition pour la valeur de c, qui peut être quelconque, mais on voit que a doit être un nombre rationnel. Si au contraire on admet des valeurs imaginaires de a, le module c doit être tel que $\frac{m'}{2\nu}\cdot\frac{\varpi}{\omega}=-\frac{2\mu}{\nu'}\cdot\frac{\omega}{\varpi}$; on tire de là

$$\frac{\omega}{\varpi}=\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{m'\nu'}{\mu\nu}}.$$

En vertu de cette expression la valeur de a deviendra

$$a=\frac{\mu'}{\nu'}-\frac{\mu}{\nu'}\sqrt{-\frac{m'\nu'}{\mu\nu}}\cdot\sqrt{-1}.$$

Soit $\frac{\omega}{\varpi}=\sqrt{k}$, on aura

$$a=\delta+\delta'\sqrt{k}.\sqrt{-1},$$

k, δ, δ' pouvant désigner des nombres rationnels quelconques. On voit que pour que l'équation (60) soit intégrable algébriquement en supposant a imaginaire, il est nécessaire et il suffit que l'on ait

$$\frac{\omega}{\varpi}=\sqrt{k},\quad a=\delta+\delta'\sqrt{k}.\sqrt{-1};$$

k est essentiellement positif.

On pourra exprimer le module c en produits infinis comme il suit:

$$\sqrt[4]{c}=\frac{1-e^{-\pi\sqrt{k}}}{1+e^{-\pi\sqrt{k}}}\cdot\frac{1-e^{-3\pi\sqrt{k}}}{1+e^{-3\pi\sqrt{k}}}\cdot\frac{1-e^{-5\pi\sqrt{k}}}{1+e^{-5\pi\sqrt{k}}}\cdots$$

On tire cette expression de la formule (34), en y faisant $\alpha=\frac{\omega}{2}$ et remarquant que $\frac{\omega}{\varpi}=\sqrt{k}$, et $A=\frac{1}{\sqrt{c}}\cdot$ On aura en même temps le module b par cette formule

$$\sqrt[4]{b}=\frac{1-e^{-\frac{\pi}{\sqrt{k}}}}{1+e^{-\frac{\pi}{\sqrt{k}}}}\cdot\frac{1-e^{-\frac{3\pi}{\sqrt{k}}}}{1+e^{-\frac{3\pi}{\sqrt{k}}}}\cdot\frac{1-e^{-\frac{5\pi}{\sqrt{k}}}}{1+e^{-\frac{5\pi}{\sqrt{k}}}}\cdots$$

Il suit encore de ce qui précède que si le module c a la valeur ci-dessus, l'équation

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-b^2y^2)}}=k'\sqrt{k}\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}},$$

sera toujours intégrable algébriquement, quels que soient les nombres rationnels k et k', pourvu que k soit positif.

Il y a encore beaucoup de choses à dire sur la transformation des fonctions elliptiques. On trouvera des développemens ultérieurs sur cette matière, ainsi que sur la théorie des fonctions elliptiques en général, dans un mémoire qui va paraître dans le Journal de M. *Crelle*.

Christiania le 25 septembre 1828.

XXI.

REMARQUES SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES D'UNE CERTAINE SORTE DE FONCTIONS TRANSCENDANTES.

Journal für die reine und angewandte Mathematik, herausgegeben von *Crelle*, Bd. 3, Berlin 1828.

1.

Si ψx désigne la fonction elliptique la plus générale, c'est-à-dire si

$$\psi x = \int \frac{r\,dx}{\sqrt{R}},$$

où r est une fonction rationnelle quelconque de x, et R une fonction entière de la même variable, qui ne passe pas le quatrième degré, cette fonction a, comme on sait, la propriété très remarquable, que la somme d'un nombre quelconque de ces fonctions peut être exprimée par une seule fonction de la même forme, en y ajoutant une certaine expression algébrique et logarithmique.

Il semble que dans la théorie des fonctions trancendantes les géomètres se sont bornés aux fonctions de cette forme. Cependant il existe encore pour une classe très étendue d'autres fonctions une propriété analogue à celle des fonctions elliptiques.

Je veux parler des fonctions qui peuvent être regardées comme *intégrales de différentielles algébriques quelconques.* Si l'on ne peut pas exprimer la somme d'un nombre quelconque de fonctions données par une seule fonction de la même espèce, comme dans le cas des fonctions elliptiques, au moins on pourra exprimer dans tous les cas une pareille somme par la somme d'un nombre déterminé d'autres fonctions de la même nature que

les premières, en y ajoutant une certaine expression algébrique et logarithmique*). Nous démontrerons cette propriété dans l'un des cahiers suivans de ce journal. Pour le moment je vais considérer un cas particulier, qui embrasse les fonctions elliptiques, savoir celui des fonctions contenues dans la formule

$$(1) \qquad \psi x = \int \frac{r\,dx}{\sqrt{R}},$$

R étant une fonction rationnelle et entière quelconque, et r une fonction rationnelle.

2.

Nous allons d'abord établir le théorème suivant:

Théorème I. *Soit φx une fonction entière de x, décomposée d'une manière quelconque en deux facteurs entiers $\varphi_1 x$ et $\varphi_2 x$, de sorte que $\varphi x = \varphi_1 x . \varphi_2 x$. Soit fx une autre fonction entière quelconque, et*

$$(2) \qquad \psi x = \int \frac{fx \,.\, dx}{(x-\alpha)\sqrt{\varphi x}},$$

où α est une quantité constante quelconque. Désignons par $a_0, a_1, a_2 \ldots c_0, c_1, c_2, \ldots$ des quantités quelconques, dont l'une au moins soit variable. Cela posé, si l'on fait

$$(3) \quad \begin{cases} (a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n)^2 \varphi_1 x - (c_0 + c_1 x + \cdots + c_m x^m)^2 \varphi_2 x \\ \qquad = A(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_\mu), \end{cases}$$

où A ne dépend pas de x, je dis qu'on aura

$$(4) \qquad \varepsilon_1 \psi x_1 + \varepsilon_2 \psi x_2 + \varepsilon_3 \psi x_3 + \cdots + \varepsilon_\mu \psi x_\mu$$

$$= -\frac{f\alpha}{\sqrt{\varphi \alpha}} \log \frac{(a_0 + a_1\alpha + \cdots + a_n\alpha^n)\sqrt{\varphi_1 \alpha} + (c_0 + c_1 \alpha + \cdots + c_m \alpha^m)\sqrt{\varphi_2 \alpha}}{(a_0 + a_1\alpha + \cdots + a_n\alpha^n)\sqrt{\varphi_1 \alpha} - (c_0 + c_1 \alpha + \cdots + c_m \alpha^m)\sqrt{\varphi_2 \alpha}} + r + C,$$

où C est une quantité constante, et r le coefficient de $\frac{1}{x}$ dans le développement de la fonction

$$\frac{fx}{(x-\alpha)\sqrt{\varphi x}} \cdot \log \frac{(a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n)\sqrt{\varphi_1 x} + (c_0 + c_1 x + \cdots + c_m x^m)\sqrt{\varphi_2 x}}{(a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n)\sqrt{\varphi_1 x} - (c_0 + c_1 x + \cdots + c_m x^m)\sqrt{\varphi_2 x}}$$

suivant les puissances descendantes de x. Les quantités $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_\mu$ sont

*) J'ai présenté un mémoire sur ces fonctions à l'académie royale des sciences de Paris vers la fin de l'année 1826.

égales à $+1$ *ou à* -1, *et leurs valeurs dépendent de celles des quantités* $x_1, x_2, \ldots x_\mu$.

Désignons le premier membre de l'équation (3) par Fx, et faisons pour abréger

$$(5)\qquad \begin{cases} \theta x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n, \\ \theta_1 x = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_m x^m, \end{cases}$$

nous aurons

$$(6)\qquad Fx = (\theta x)^2 \varphi_1 x - (\theta_1 x)^2 \varphi_2 x.$$

Cela posé, soit x l'une quelconque des quantités $x_1, x_2, \ldots x_\mu$, on aura l'équation

$$(7)\qquad Fx = 0.$$

De là, en différentiant, on tire

$$(8)\qquad F'x \,.\, dx + \delta Fx = 0,$$

en désignant par $F'x$ la dérivée de Fx par rapport à x, et par δFx la différentielle de la même fonction par rapport aux quantités $a_0, a_1, a_2, \ldots$ $c_0, c_1, c_2, \ldots$ Or, en remarquant que $\varphi_1 x$ et $\varphi_2 x$ sont indépendans de ces dernières variables, l'équation (6) donnera

$$(9)\qquad \delta Fx = 2\theta x \,.\, \varphi_1 x \,.\, \delta\theta x - 2\theta_1 x \,.\, \varphi_2 x \,.\, \delta\theta_1 x,$$

donc en vertu de (8)

$$(10)\qquad F'x \,.\, dx = 2\theta_1 x \,.\, \varphi_2 x \,.\, \delta\theta_1 x - 2\theta x \,.\, \varphi_1 x \,.\, \delta\theta x.$$

Maintenant, ayant $Fx = 0 = (\theta x)^2 \varphi_1 x - (\theta_1 x)^2 \varphi_2 x$, on en tire

$$(11)\qquad \theta x \sqrt{\varphi_1 x} = \varepsilon \theta_1 x \sqrt{\varphi_2 x},$$

où $\varepsilon = \pm 1$. De là il vient

$$\theta x \,.\, \varphi_1 x = \varepsilon \theta_1 x \sqrt{\varphi_1 x \,.\, \varphi_2 x} = \varepsilon \theta_1 x \sqrt{\varphi x},$$

$$\theta_1 x \,.\, \varphi_2 x = \varepsilon \theta x \sqrt{\varphi_2 x \,.\, \varphi_1 x} = \varepsilon \theta x \sqrt{\varphi x},$$

donc l'expression de $F'x \,.\, dx$ pourra être mise sous la forme

$$(12)\qquad F'x \,.\, dx = 2\varepsilon (\theta x \,.\, \delta\theta_1 x - \theta_1 x \,.\, \delta\theta x) \sqrt{\varphi x}.$$

Cela donne, en multipliant par $\varepsilon \dfrac{fx}{\sqrt{\varphi x}} \dfrac{1}{F'x} \dfrac{1}{x-\alpha}$,

$$(13)\qquad \varepsilon \frac{fx \,.\, dx}{(x-\alpha)\sqrt{\varphi x}} = \frac{2fx(\theta x \,.\, \delta\theta_1 x - \theta_1 x \,.\, \delta\theta x)}{(x-\alpha) F'x}.$$

En faisant pour abréger

(14′) $$\lambda(x) = 2fx(\theta x . \delta\theta_1 x - \theta_1 x . \delta\theta x),$$

il viendra

(14) $$\varepsilon \frac{fx . dx}{(x-\alpha)\sqrt{\varphi x}} = \frac{\lambda x}{(x-\alpha)F'x},$$

λx étant une fonction *entière* par rapport à x.

Désignons par ΣIx la quantité

$$Ix_1 + Ix_2 + Ix_3 + \cdots + Ix_\mu,$$

et remarquons que l'équation (14) subsiste encore, en mettant l'une quelconque des quantités $x_1, x_2, \ldots x_\mu$ au lieu de x; cette équation donnera

(15) $$\Sigma \varepsilon \frac{fx . dx}{(x-\alpha)\sqrt{\varphi x}} = \Sigma \frac{\lambda x}{(x-\alpha)F'x} = \delta v.$$

Cela posé, on pourra chasser sans difficulté les quantités $x_1, x_2, \ldots x_\mu$ du second membre.

En effet, quelle que soit la fonction entière λx, on peut supposer

(16) $$\lambda x = (x-\alpha)\lambda_1 x + \lambda\alpha,$$

$\lambda_1 x$ étant une fonction entière de x, savoir $\frac{\lambda x - \lambda\alpha}{x-\alpha}$. En substituant cette valeur dans (15), il viendra

(16′) $$\delta v = \Sigma \frac{\lambda_1 x}{F'x} + \lambda\alpha \Sigma \frac{1}{(x-\alpha)F'x}.$$

Maintenant on aura, d'après une formule connue,

(17) $$\Sigma \frac{1}{(x-\alpha)F'x} = -\frac{1}{F\alpha},$$

en remarquant que l'on a

$$F\alpha = A(\alpha - x_1)(\alpha - x_2)\ldots(\alpha - x_\mu);$$

donc

(18) $$\delta v = -\frac{\lambda\alpha}{F\alpha} + \Sigma \frac{\lambda_1 x}{F'x}.$$

Il reste à trouver $\Sigma \frac{\lambda_1 x}{F'x}$. Or cela peut se faire à l'aide de la formule (17). En effet, en développant $\frac{1}{\alpha - x}$ selon les puissances descendantes de α, il viendra

(19) $$\frac{1}{F\alpha}=\frac{1}{\alpha}\Sigma\frac{1}{F'x}+\frac{1}{\alpha^2}\Sigma\frac{x}{F'x}+\cdots+\frac{1}{\alpha^{k+1}}\Sigma\frac{x^k}{F'x}+\cdots,$$

d'où l'on voit que $\Sigma\frac{x^k}{F'x}$ est égal au coefficient de $\frac{1}{\alpha^{k+1}}$ dans le développement de $\frac{1}{F\alpha}$, ou bien à celui de $\frac{1}{\alpha}$ dans le développement de $\frac{\alpha^k}{F\alpha}$. De là on voit aisément que $\Sigma\frac{\lambda_1 x}{F'x}$, où $\lambda_1 x$ est une fonction quelconque entière de x, sera égal au coefficient de $\frac{1}{x}$ dans le développement de la fonction $\frac{\lambda_1 x}{Fx}$ selon les puissances ascendantes de $\frac{1}{x}$. Si pour abréger on désigne ce coefficient relatif à une fonction quelconque r, développable de cette manière, par Πr, on aura

(20) $$\Sigma\frac{\lambda_1 x}{F'x}=\Pi\frac{\lambda_1 x}{Fx}.$$

Or la formule (16), en divisant par $(x-\alpha)Fx$, donne

(21) $$\Pi\frac{\lambda x}{(x-\alpha)Fx}=\Pi\frac{\lambda_1 x}{Fx},$$

en remarquant que $\Pi\frac{\lambda\alpha}{(x-\alpha)Fx}$ est toujours égal à zéro. Donc l'expression (16′) de δv deviendra

(22) $$\delta v=-\frac{\lambda\alpha}{F\alpha}+\Pi\frac{\lambda x}{(x-\alpha)Fx}.$$

Maintenant on a (14′)

$$\lambda x=2fx.(\theta x.\delta\theta_1 x-\theta_1 x.\delta\theta x),$$

donc, en mettant α au lieu de x,

$$\lambda\alpha=2f\alpha.(\theta\alpha.\delta\theta_1\alpha-\theta_1\alpha.\delta\theta\alpha).$$

En substituant ces expressions dans la valeur de δv, et mettant pour $F\alpha$ sa valeur $(\theta\alpha)^2\varphi_1\alpha-(\theta_1\alpha)^2\varphi_2\alpha$, on obtiendra

$$\delta v=-\frac{2f\alpha.(\theta\alpha.\delta\theta_1\alpha-\theta_1\alpha.\delta\theta\alpha)}{(\theta\alpha)^2.\varphi_1\alpha-(\theta_1\alpha)^2.\varphi_2\alpha}+\Pi\frac{2fx}{x-\alpha}.\frac{\theta x.\delta\theta_1 x-\theta_1 x.\delta\theta x}{(\theta x)^2.\varphi_1 x-(\theta_1 x)^2.\varphi_2 x}.$$

On trouvera aisément l'intégrale de cette expression; car, en remarquant que $f\alpha$, $\varphi_1\alpha$, $\varphi_2\alpha$, fx, $x-\alpha$, $\varphi_1 x$, $\varphi_2 x$ sont des quantités constantes, on aura, en vertu de la formule

$$\int \frac{p\,dq - q\,dp}{p^2 m - q^2 n} = \frac{1}{2\sqrt{mn}} \log \frac{p\sqrt{m} + q\sqrt{n}}{p\sqrt{m} - q\sqrt{n}}:$$

(23) $$v = C - \frac{f\alpha}{\sqrt{\varphi\alpha}} \log \frac{\theta\alpha\sqrt{\varphi_1\alpha} + \theta_1\alpha\sqrt{\varphi_2\alpha}}{\theta\alpha\sqrt{\varphi_1\alpha} - \theta_1\alpha\sqrt{\varphi_2\alpha}} + \Pi \frac{fx}{(x-\alpha)\sqrt{\varphi x}} \log \frac{\theta x\sqrt{\varphi_1 x} + \theta_1 x\sqrt{\varphi_2 x}}{\theta x\sqrt{\varphi_1 x} - \theta_1 x\sqrt{\varphi_2 x}}.$$

Or l'équation (15) donne

$$\Sigma\varepsilon \int \frac{fx\,.\,dx}{(x-\alpha)\sqrt{\varphi x}} = v,$$

donc en faisant

(24) $$\psi(x) = \int \frac{fx\,.\,dx}{(x-\alpha)\sqrt{\varphi x}}$$

et désignant par $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_\mu$ des quantités de la forme ± 1, on aura la formule

(25) $$\left\{\begin{aligned} &\varepsilon_1\psi x_1 + \varepsilon_2\psi x_2 + \varepsilon_3\psi x_3 + \cdots + \varepsilon_\mu\psi x_\mu \\ &\qquad = C - \frac{f\alpha}{\sqrt{\varphi\alpha}} \log \frac{\theta\alpha\sqrt{\varphi_1\alpha} + \theta_1\alpha\sqrt{\varphi_2\alpha}}{\theta\alpha\sqrt{\varphi_1\alpha} - \theta_1\alpha\sqrt{\varphi_2\alpha}} \\ &\qquad + \Pi \frac{fx}{(x-\alpha)\sqrt{\varphi x}} \log \frac{\theta x\sqrt{\varphi_1 x} + \theta_1 x\sqrt{\varphi_2 x}}{\theta x\sqrt{\varphi_1 x} - \theta_1 x\sqrt{\varphi_2 x}}, \end{aligned}\right.$$

qui s'accorde parfaitement avec la formule (4).

Les valeurs de $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_\mu$ ne sont pas arbitraires; elles dépendent de la grandeur de $x_1, x_2, \ldots x_\mu$, et celle-ci est déterminée par l'équation

$$\theta x\sqrt{\varphi_1 x} = \varepsilon\theta_1 x\sqrt{\varphi_2 x},$$

équivalente aux équations

(26) $$\theta x_1\sqrt{\varphi_1 x_1} = \varepsilon_1\theta_1 x_1\sqrt{\varphi_2 x_1};\ \theta x_2\sqrt{\varphi_1 x_2} = \varepsilon_2\theta_1 x_2\sqrt{\varphi_2 x_2};\ \ldots\ \theta x_\mu\sqrt{\varphi_1 x_\mu} = \varepsilon_\mu\theta_1 x_\mu\sqrt{\varphi_2 x_\mu}.$$

D'ailleurs les quantités $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_\mu$ conserveront les mêmes valeurs pour toutes les valeurs de $x_1, x_2, \ldots x_\mu$, comprises entre certaines limites. Il en sera de même de la constante C.

3.

La démonstration précédente suppose toutes les quantités $x_1, x_2, \ldots x_\mu$ différentes entre elles, car dans le cas contraire $F'x$ serait égal à zéro pour

un certain nombre de valeurs de x, et alors le second membre de la formule (14) se présenterait sous la forme $\frac{0}{0}$. Néanmoins il est évident que la formule (25) subsistera encore dans le cas où plusieurs des quantités x_1, x_2, ... x_μ sont égales entre elles.

En faisant $x_2 = x_1$, on aura (26)

$$\theta x_1 \sqrt{\varphi_1 x_1} = \varepsilon_1 \theta_1 x_1 \sqrt{\varphi_2 x_1} = \varepsilon_2 \theta_1 x_1 \sqrt{\varphi_2 x_1},$$

et cela donne, en supposant que $\theta_1 x . \varphi_2 x$ et $\theta x . \varphi_1 x$ n'aient pas de diviseur commun,

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_1 .$$

En vertu de cette remarque on aura le théorème suivant:

Théorème II. *Si l'on fait*

(27) $$(\theta x)^2 \varphi_1 x - (\theta_1 x)^2 \varphi_2 x = A(x - x_1)^{m_1} (x - x_2)^{m_2} \dots (x - x_\mu)^{m_\mu},$$

les fonctions entières $\theta x . \varphi_1 x$ *et* $\theta_1 x . \varphi_2 x$ *n'ayant pas de diviseur commun, on aura*

(28) $$\begin{cases} \varepsilon_1 m_1 \psi x_1 + \varepsilon_2 m_2 \psi x_2 + \varepsilon_3 m_3 \psi x_3 + \dots + \varepsilon_\mu m_\mu \psi x_\mu \\ \qquad = C - \dfrac{f\alpha}{\sqrt{\varphi\alpha}} \log \dfrac{\theta\alpha\sqrt{\varphi_1\alpha} + \theta_1\alpha\sqrt{\varphi_2\alpha}}{\theta\alpha\sqrt{\varphi_1\alpha} - \theta_1\alpha\sqrt{\varphi_2\alpha}} \\ \qquad + \Pi \dfrac{fx}{(x-\alpha)\sqrt{\varphi x}} \log \dfrac{\theta x\sqrt{\varphi_1 x} + \theta_1 x\sqrt{\varphi_2 x}}{\theta x\sqrt{\varphi_1 x} - \theta_1 x\sqrt{\varphi_2 x}}. \end{cases}$$

4.

Si l'on suppose fx divisible par $x - \alpha$, on aura $f\alpha = 0$, donc en mettant $(x-\alpha)fx$ au lieu de fx, il viendra:

Théorème III. *Les choses étant supposées les mêmes que dans le Théorème* II, *si l'on fait*

$$\psi x = \int \frac{fx . dx}{\sqrt{\varphi x}},$$

fx *étant une fonction entière quelconque, on aura*

(29) $$\varepsilon_1 m_1 \psi x_1 + \varepsilon_2 m_2 \psi x_2 + \dots + \varepsilon_\mu m_\mu \psi x_\mu = C + \Pi \frac{fx}{\sqrt{\varphi x}} \log \frac{\theta x\sqrt{\varphi_1 x} + \theta_1 x\sqrt{\varphi_2 x}}{\theta x\sqrt{\varphi_1 x} - \theta_1 x\sqrt{\varphi_2 x}}.$$

5.

Si dans la formule (28) on suppose le degré de la fonction entière $f(x)$ moindre que la moitié de celui de φx, il est clair que la partie du second membre affectée du signe Π, s'évanouira. Donc on aura ce théorème:

Théorème IV. *Si le degré de la fonction entière* $(fx)^2$ *est moindre que celui de* φx, *et si l'on fait*

$$\psi x = \int \frac{fx \, . \, dx}{(x-\alpha)\sqrt{\varphi x}}:$$

on aura

$$(30) \quad \varepsilon_1 m_1 \psi x_1 + \varepsilon_2 m_2 \psi x_2 + \cdots + \varepsilon_\mu m_\mu \psi x_\mu$$
$$= C - \frac{f\alpha}{\sqrt{\varphi\alpha}} \cdot \log \frac{\theta\alpha\sqrt{\varphi_1\alpha} + \theta_1\alpha\sqrt{\varphi_2\alpha}}{\theta\alpha\sqrt{\varphi_1\alpha} - \theta_1\alpha\sqrt{\varphi_2\alpha}}.$$

6.

En faisant $f\alpha = 1$ dans le théorème précédent et différentiant $k-1$ fois de suite, on aura le théorème suivant:

Théorème V. *Si l'on fait*

$$\psi x = \int \frac{dx}{(x-\alpha)^k \sqrt{\varphi x}},$$

on aura

$$\varepsilon_1 m_1 \psi x_1 + \varepsilon_2 m_2 \psi x_2 + \cdots + \varepsilon_\mu m_\mu \psi x_\mu$$
$$= C - \frac{1}{1.2\ldots(k-1)} \cdot \frac{d^{k-1}}{d\alpha^{k-1}} \left(\frac{1}{\sqrt{\varphi\alpha}} \cdot \log \frac{\theta\alpha\sqrt{\varphi_1\alpha} + \theta_1\alpha\sqrt{\varphi_2\alpha}}{\theta\alpha\sqrt{\varphi_1\alpha} - \theta_1\alpha\sqrt{\varphi_2\alpha}} \right).$$

7.

Si dans le théorème III on suppose le degré de $(fx)^2$ moindre que celui de φx diminué de deux unités, le second membre se réduit à une constante. Cela donne aisément le théorème qui suit:

Théorème VI. *Si l'on désigne par* ψx *la fonction*

$$\int \frac{(\delta_0 + \delta_1 x + \delta_2 x^2 + \cdots + \delta_{\nu'} x^{\nu'})\,dx}{\sqrt{\beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \cdots + \beta_\nu x^\nu}},$$

où $\nu' = \frac{\nu-1}{2} - 1$ *si* ν *est impair, et* $\nu' = \frac{\nu}{2} - 2$ *si* ν *est pair, on aura toujours*

(31) $$\varepsilon_1 m_1 \psi x_1 + \varepsilon_2 m_2 \psi x_2 + \cdots + \varepsilon_\mu m_\mu \psi x_\mu = constante.$$

On voit que ν' a la même valeur pour $\nu = 2m - 1$ et pour $\nu = 2m$, savoir $\nu' = m - 2$.

8.

Soit maintenant

$$\psi x = \int \frac{r\,dx}{\sqrt{\varphi x}},$$

r étant une fonction rationnelle quelconque de x. Quelle que soit la forme de r, on pourra toujours faire

(32) $$r = fx + \frac{f_1 x}{(x-\alpha_1)^{k_1}} + \frac{f_2 x}{(x-\alpha_2)^{k_2}} + \cdots + \frac{f_\omega x}{(x-\alpha_\omega)^{k_\omega}},$$

$fx, f_1 x, f_2 x, \ldots f_\omega x$ étant des fonctions entières. Cela posé, il est clair qu'en vertu des théorèmes III et V, on aura le suivant:

Théorème VII. *Quelle que soit la fonction rationnelle r exprimée par la formule* (32), *en faisant*

(33) $$\psi x = \int \frac{r\,dx}{\sqrt{\varphi x}} \quad \text{et} \quad \frac{\theta x \sqrt{\varphi_1 x} + \theta_1 x \sqrt{\varphi_2 x}}{\theta x \sqrt{\varphi_1 x} - \theta_1 x \sqrt{\varphi_2 x}} = \chi x,$$

on aura toujours

(34) $$\left\{\begin{aligned} &\varepsilon_1 m_1 \psi x_1 + \varepsilon_2 m_2 \psi x_2 + \cdots + \varepsilon_\mu m_\mu \psi x_\mu = C + \Pi \frac{r}{\sqrt{\varphi x}} \log \chi x \\ &\quad - \frac{1}{\Gamma k_1} \frac{d^{k_1-1}}{d\alpha_1^{k_1-1}} \left(\frac{f_1 \alpha_1}{\sqrt{\varphi \alpha_1}} \log \chi \alpha_1 \right) - \frac{1}{\Gamma k_2} \frac{d^{k_2-1}}{d\alpha_2^{k_2-1}} \left(\frac{f_2 \alpha_2}{\sqrt{\varphi \alpha_2}} \log \chi \alpha_2 \right) - \cdots \\ &\quad - \frac{1}{\Gamma k_\omega} \frac{d^{k_\omega-1}}{d\alpha_\omega^{k_\omega-1}} \left(\frac{f_\omega \alpha_\omega}{\sqrt{\varphi \alpha_\omega}} \log \chi \alpha_\omega \right), \end{aligned}\right.$$

en représentant par Γk le produit $1 . 2 . 3 \ldots (k-1)$.

9.

Nous avons considéré précédemment les quantités $x_1, x_2, \ldots x_\mu$ comme des fonctions de $a_0, a_1, a_2, \ldots c_0, c_1, c_2, \ldots$ Supposons maintenant qu'un certain nombre des quantités $x_1, x_2, \ldots x_\mu$ soient données et regardées comme des variables indépendantes; et soient $x_1, x_2, \ldots x_{\mu'}$ ces quantités. Alors il faut déterminer $a_0, a_1, \ldots c_0, c_1, \ldots$ de manière que le premier membre de l'équation (3) soit divisible par

$$(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{\mu'}).$$

Cela ce fera à l'aide des équations (26). Les μ' premières équations,

$$(35)\quad \begin{cases} \theta x_1\sqrt{\varphi_1 x_1}=\varepsilon_1\,.\,\theta_1 x_1\sqrt{\varphi_2 x_1}, \\ \theta x_2\sqrt{\varphi_1 x_2}=\varepsilon_2\,.\,\theta_1 x_2\sqrt{\varphi_2 x_2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \theta x_{\mu'}\sqrt{\varphi_1 x_{\mu'}}=\varepsilon_{\mu'}\,.\,\theta_1 x_{\mu'}\sqrt{\varphi_2 x_{\mu'}} \end{cases}$$

donneront μ' des quantités $a_0, a_1, \ldots c_0, c_1, \ldots$ exprimées en fonction rationnelle des autres et de $x_1, x_2, \ldots x_{\mu'}, \sqrt{\varphi x_1}, \sqrt{\varphi x_2}, \ldots \sqrt{\varphi x_{\mu'}}$.

Le nombre des indéterminées $a_0, a_1, \ldots a_n, c_0, c_1, \ldots c_m$ est égal à $m+n+2$; donc, comme il est aisé de le voir par la forme des équations (35), on pourra faire $\mu'=m+n+1$. Cela posé, en substituant les valeurs de $a_0, a_1, \ldots c_0, c_1, \ldots$ dans les fonctions $\theta x, \theta_1 x, \ldots$, la fonction entière $(\theta x)^2\varphi_1 x-(\theta_1 x)^2\varphi_2 x$ deviendra divisible par

$$(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{\mu'}).$$

En désignant le quotient par R, on aura

$$(36)\qquad R=A(x-x_{\mu'+1})(x-x_{\mu'+2})\ldots(x-x_\mu).$$

Donc les $\mu-\mu'$ quantités $x_{\mu'+1}, x_{\mu'+2}, \ldots x_\mu$, seront les racines d'une équation, $R=0$, du degré $\mu-\mu'$, dont tous les coefficiens sont exprimés rationnellement par les quantités $x_1, x_2, x_3, \ldots x_{\mu'}, \sqrt{\varphi x_1}, \sqrt{\varphi x_2}, \ldots \sqrt{\varphi x_{\mu'}}$.

Faisons

$$\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon_3=\cdots=\varepsilon_{\mu_1}=1,$$

$$\varepsilon_{\mu_1+1}=\varepsilon_{\mu_1+2}=\cdots=\varepsilon_{\mu'}=-1,$$

$$x_{\mu_1+1}=x_1',\quad x_{\mu_1+2}=x_2',\ \ldots\ x_{\mu'}=x'_{\mu_2},$$

$$x_{\mu'+1}=y_1,\quad x_{\mu'+2}=y_2,\ \ldots\ x_\mu=y_{\nu'},$$

on aura, en désignant par $\psi(x)$ la fonction $\int\frac{r\,dx}{\sqrt{\varphi x}}$,

$$(37)\quad \begin{cases} \psi x_1+\psi x_2+\cdots+\psi x_{\mu_1}-\psi x_1'-\psi x_2'-\cdots-\psi x_{\mu_2}' \\ \qquad =v-\varepsilon_{\mu'+1}\psi y_1-\varepsilon_{\mu'+2}\psi y_2-\varepsilon_{\mu'+3}\psi y_3-\cdots-\varepsilon_\mu\psi y_{\nu'}, \end{cases}$$

où v est une expression algébrique et logarithmique. Les quantités x_1, x_2,

$\dots x_{\mu_1}$; x_1', x_2', $\dots x_{\mu_2}'$ sont des quantités variables quelconques, et $y_1, y_2, \dots y_{\nu'}$ seront déterminables à l'aide d'une équation du degré ν'.

Maintenant nous verrons qu'on pourra toujours rendre ν' indépendant du nombre $\mu_1+\mu_2$ des fonctions données. En effet, cherchons la plus petite valeur de ν'. En supposant indéterminées toutes les quantités $a_0, a_1, \dots c_0, c_1, \dots$, il est clair que μ sera égal à l'un des deux nombres $2n+\nu_1$ et $2m+\nu_2$, ν_1 et ν_2 représentant les degrés des fonctions $\varphi_1 x$, $\varphi_2 x$. Soit par exemple

$$\mu = 2n+\nu_1,$$

on doit avoir en même temps

$$\mu = \text{ou} > 2m+\nu_2,$$

d'où, en ajoutant, on tire

$$\mu = \text{ou} > m+n+\frac{\nu_1+\nu_2}{2};$$

or

$$\nu' = \mu-\mu' = \mu-m-n-1,$$

donc

$$\nu' = \text{ou} > \frac{\nu_1+\nu_2}{2}-1,$$

ou bien, en désignant le degré de φx par ν,

(38) $$\nu' = \text{ou} > \frac{\nu}{2}-1.$$

On voit par là que la plus petite valeur de ν' est $\frac{\nu-1}{2}$ ou $\frac{\nu}{2}-1$, selon que ν est impair ou pair. Donc cette valeur est indépendante du nombre $\mu_1+\mu_2$ des fonctions données; elle est précisément la même que le nombre total des coefficiens $\delta_0, \delta_1, \delta_2, \dots$ dans le sixième théorème. On aura maintenant ce théorème:

Théorème VIII. *Soit* $\psi x = \int \frac{r\,dx}{\sqrt{\varphi x}}$, *où* r *est une fonction rationnelle quelconque de* x, *et* φx *une fonction entière du degré* $2\nu-1$ *ou* 2ν, *et soient* $x_1, x_2, \dots x_{\mu_1}$, $x_1', x_2', \dots x_{\mu_2}'$ *des variables données. Cela posé, quel que soit le nombre* $\mu_1+\mu_2$ *des variables, on pourra toujours trouver, au moyen d'une équation algébrique,* $\nu-1$ *quantités* $y_1, y_2, \dots y_{\nu-1}$ *telles que*

(39) $$\begin{cases} \psi x_1+\psi x_2+\dots+\psi x_{\mu_1}-\psi x_1'-\psi x_2'-\dots-\psi x_{\mu_2}' \\ \qquad = v+\varepsilon_1\psi y_1+\varepsilon_2\psi y_2+\dots+\varepsilon_{\nu-1}\psi y_{\nu-1}, \end{cases}$$

v étant algébrique et logarithmique, et $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_{\nu-1}$ égaux à $+1$ ou à -1.

On peut ajouter que les fonctions $y_1, y_2, \ldots y_{\nu-1}$ restent les mêmes, quelle que soit la forme de la fonction rationnelle r, et que la fonction v ne change pas de valeur en ajoutant à r une fonction entière quelconque du degré $\nu-2$.

10.

Les équations (35) qui déterminent les quantités $a_0, a_1, \ldots c_0, c_1, \ldots$ deviendront

$$(40)\quad \begin{cases} \theta x_1\sqrt{\varphi_1 x_1} = \theta_1 x_1\sqrt{\varphi_2 x_1}, & \theta x_1'\sqrt{\varphi_1 x_1'} = -\,\theta_1 x_1'\sqrt{\varphi_2 x_1'}, \\ \theta x_2\sqrt{\varphi_1 x_2} = \theta_1 x_2\sqrt{\varphi_2 x_2}, & \theta x_2'\sqrt{\varphi_1 x_2'} = -\,\theta_1 x_2'\sqrt{\varphi_2 x_2'}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \theta x_{\mu_1}\sqrt{\varphi_1 x_{\mu_1}} = \theta_1 x_{\mu_1}\sqrt{\varphi_2 x_{\mu_1}}, & \theta x_{\mu_2}'\sqrt{\varphi_1 x_{\mu_2}'} = -\,\theta_1 x_{\mu_2}'\sqrt{\varphi_2 x_{\mu_2}'}. \end{cases}$$

Pour déterminer $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_{\nu-1}$, on aura les équations:

$$(41)\quad \begin{cases} \theta y_1\sqrt{\varphi_1 y_1} = -\,\varepsilon_1\theta_1 y_1\sqrt{\varphi_2 y_1}, \\ \theta y_2\sqrt{\varphi_1 y_2} = -\,\varepsilon_2\theta_1 y_2\sqrt{\varphi_2 y_2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \theta y_{\nu-1}\sqrt{\varphi_1 y_{\nu-1}} = -\,\varepsilon_{\nu-1}\theta_1 y_{\nu-1}\sqrt{\varphi_2 y_{\nu-1}}. \end{cases}$$

Les fonctions $y_1, y_2, \ldots y_{\nu-1}$ sont les racines de l'équation

$$(42)\quad \frac{(\theta y)^2\cdot\varphi_1 y-(\theta_1 y)^2\cdot\varphi_2 y}{(y-x_1)(y-x_2)\ldots(y-x_{\mu_1})(y-x_1')(y-x_2')\ldots(y-x_{\mu_2}')}=0.$$

Le degré de la fonction θy est $n=\frac{\mu_1+\mu_2+\nu-1-\nu_1}{2}$, et celui de $\theta_1 y$ est $m=n+\nu_1-\nu$.

11.

La formule (39) a lieu si plusieurs des quantités $x_1, x_2, \ldots x_1', x_2', \ldots$ sont égales entre elles, mais dans ce cas les équations (40) ne suffisent plus pour déterminer les quantités $a_0, a_1, \ldots c_0, c_1, \ldots$; car si par exemple $x_1=x_2=\cdots=x_k$, les k premières des équations (40) deviendront identiques. Pour avoir les équations nécessaires dans ce cas, posons pour abréger

$$\theta x . \sqrt{\varphi_1 x} - \theta_1 x . \sqrt{\varphi_2 x} = \lambda x.$$

L'expression $\frac{\lambda x}{(x - x_1)^k}$ doit avoir une valeur finie en faisant $x = x_1$. On en déduit, d'après les principes du calcul différentiel, les k équations

(43) $$\lambda x_1 = 0,\ \lambda' x_1 = 0,\ \lambda'' x_1 = 0, \ldots \lambda^{(k-1)} x_1 = 0,$$

et ce sont elles qu'il faut substituer à la place des équations

$$\lambda x_1 = 0,\ \lambda x_2 = 0, \ldots \lambda x_k = 0,$$

dans le cas où $x_1 = x_2 = \cdots = x_k$.

XXII.

SUR LE NOMBRE DES TRANSFORMATIONS DIFFÉRENTES QU'ON PEUT FAIRE SUBIR A UNE FONCTION ELLIPTIQUE PAR LA SUBSTITUTION D'UNE FONCTION RATIONNELLE DONT LE DEGRÉ EST UN NOMBRE PREMIER DONNÉ.

Journal für die reine und angewandte Mathematik, herausgegeben von *Crelle*, Bd. 3, Berlin 1828.

Soit pour abréger

(1) $$\varDelta^2 = (1-x^2)(1-c^2x^2), \quad \varDelta'^2 = (1-y^2)(1-c'^2y^2)$$

et supposons qu'on satisfasse à l'équation différentielle

(2) $$\frac{dy}{\varDelta'} = a\frac{dx}{\varDelta},$$

en y substituant pour y une fonction rationnelle de x de la forme

(3) $$y = \frac{A_0 + A_1x + \cdots + A_{2n+1}x^{2n+1}}{B_0 + B_1x + \cdots + B_{2n+1}x^{2n+1}},$$

où $2n+1$ est un nombre premier, et où l'un au moins des coefficiens A_{2n+1} et B_{2n+1} est différent de zéro. En supposant, ce qui est permis, la fraction précédente réduite à sa plus simple expression, nous dirons que $\frac{dy}{\varDelta'}$ se transforme en $a\frac{dx}{\varDelta}$ par la substitution d'une fonction du degré $2n+1$.

Il s'agit maintenant de trouver toutes les valeurs différentes de y qui répondent à la même valeur de $2n+1$. Si l'on fait

(4) $$\frac{\omega}{2} = \int_0^1 \frac{dx}{\varDelta} \quad \text{et} \quad \frac{\omega'}{2} = \int_0^{\frac{1}{c}} \frac{dx}{\varDelta}$$

et qu'on désigne par $\lambda\theta$ une fonction de θ, telle que

$$d\theta = \frac{dx}{\varDelta} \text{ pour } x = \lambda\theta,$$

et en outre

$$\lambda(0) = 0,$$

il suit immédiatement de ce que j'ai dit sur le problème général de la transformation des fonctions elliptiques dans le n° 138 du journal d'astronomie de M. *Schumacher**), qu'on satisfera de la manière la plus générale à l'équation $\frac{dy}{\varDelta'} = a\frac{dx}{\varDelta}$ dans le cas où $B_{2n+1} = 0$, en prenant

$$(5)\quad \begin{cases} y = a\dfrac{x\left(1-\frac{x^2}{\lambda^2\alpha}\right)\left(1-\frac{x^2}{\lambda^2 2\alpha}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{\lambda^2 n\alpha}\right)}{(1-c^2\lambda^2\alpha\,.\,x^2)\,[1-c^2\lambda^2(2\alpha)\,.\,x^2]\ldots[1-c^2\lambda^2(n\alpha)\,.\,x^2]}, \\ c' = c^{2n+1}\left[\lambda\left(\frac{\omega}{2}+\alpha\right).\,\lambda\left(\frac{\omega}{2}+2\alpha\right)\ldots\lambda\left(\frac{\omega}{2}+n\alpha\right)\right]^4, \\ a = \dfrac{c^{n+\frac{1}{2}}}{\sqrt{c'}}\,[\lambda\alpha\,.\,\lambda(2\alpha)\ldots\lambda(n\alpha)]^2, \end{cases}$$

où α est une quantité de la forme

$$(6)\quad \alpha = \frac{m\omega + m'\omega'}{2n+1},$$

m et m' étant deux entiers. Maintenant, ayant trouvé cette solution, il suit encore de la formule (51) du mémoire cité que toutes les autres valeurs de y seront de la forme $\frac{f'+fy}{g'+gy}$, y étant donné par (5), f', f, g, g' étant des quantités constantes qui doivent satisfaire à l'équation

$$(7)\quad \left(1+\frac{g+f}{g'+f'}x\right)\left(1+\frac{g-f}{g'-f'}x\right)\left(1+\frac{g+c'f}{g'+c'f'}x\right)\left(1+\frac{g-c'f}{g'-c'f'}x\right) = (1-x^2)(1-c'^2x^2).$$

Cette équation donne vingt-quatre systèmes de valeurs différentes. On trouve ainsi qu'à chaque valeur de α répondent 24 valeurs de y et douze valeurs du module c'. Mais comme les valeurs de y sont deux à deux égales, mais de signes contraires, nous n'en compterons que douze. Par la même raison nous réduirons le nombre des valeurs de c' à six. Cela posé, si l'on fait pour abréger:

*) Mémoire XIX de cette édition.

$$(8)\quad\begin{cases} p=x\left(1-\frac{x^2}{\lambda^2\alpha}\right)\dots\left(1-\frac{x^2}{\lambda^2(n\alpha)}\right);\quad v=(1-c^2\lambda^2\alpha.x^2)\dots[1-c^2\lambda^2(n\alpha)x^2];\\ \varepsilon=c^{n+\frac{1}{2}}\left[\lambda\left(\frac{\omega}{2}+\alpha\right)\dots\lambda\left(\frac{\omega}{2}+n\alpha\right)\right]^2;\quad \delta=c^{n+\frac{1}{2}}[\lambda\alpha.\lambda(2\alpha)\dots\lambda(n\alpha)]^2,\end{cases}$$

on trouvera aisément ces valeurs correspondantes des trois quantités c', a, y:

(9)

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
$c'=$	$\varepsilon^2,$	$\frac{1}{\varepsilon^2},$	$\left(\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^2,$	$\left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)^2,$	$\left(\frac{1-\varepsilon i}{1+\varepsilon i}\right)^2,$	$\left(\frac{1+\varepsilon i}{1-\varepsilon i}\right)^2,$
$a=$	$\pm\frac{\delta}{\varepsilon},$	$\mp\delta\varepsilon,$	$\pm\frac{\delta}{2\varepsilon}(1+\varepsilon)^2 i,$	$\mp\frac{\delta}{2\varepsilon}(1-\varepsilon)^2 i,$	$\pm\frac{\delta}{2\varepsilon}(1+\varepsilon i)^2 i,$	$\mp\frac{\delta}{2\varepsilon}(1-\varepsilon i)^2 i,$
$y=$	$\begin{cases}\frac{\delta}{\varepsilon}\frac{p}{v},\ \frac{\varepsilon}{\delta}\frac{v}{p}\\ \frac{1}{\delta\varepsilon}\frac{v}{p},\ \delta\varepsilon\frac{p}{v}\end{cases},$		$\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\cdot\frac{v\pm\delta p}{v\mp\delta p},$	$\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\cdot\frac{v\pm\delta p}{v\mp\delta p},$	$\frac{1+\varepsilon i}{1-\varepsilon i}\cdot\frac{v\pm\delta pi}{v\mp\delta pi},$	$\frac{1-\varepsilon i}{1+\varepsilon i}\cdot\frac{v\pm\delta pi}{v\mp\delta pi},$

(où $i=\sqrt{-1}$).

On voit qu'à chaque valeur de c' correspondent deux valeurs différentes de la fonction y. Maintenant si l'on attribue aux nombres m et m' des valeurs entières quelconques, on aura toutes les solutions possibles de notre problème. Or parmi ces solutions il n'y aura qu'un nombre fini qui soient différentes entre elles. Cherchons d'abord les solutions différentes qui répondent au premier cas, savoir $c'=\varepsilon^2$ et $y=\frac{\delta}{\varepsilon}\cdot\frac{p}{v}$. Pour les trouver, soit α' une valeur de α et désignons les valeurs correspondantes de y, p, v, δ, ε par y', p', v', δ', ε'. Cela posé, il est évident que si y' doit être égal à $\pm y$, on doit avoir

$$p'=p,\quad v'=v,\quad \frac{\delta'}{\varepsilon'}=\pm\frac{\delta}{\varepsilon}.$$

Or en vertu de l'équation (8) on ne pourra avoir $p'=p$, à moins que les quantités $\lambda^2\alpha$, $\lambda^2(2\alpha)$, ... $\lambda^2(n\alpha)$ ne soient, quoique dans un ordre différent, égales à celles-ci:

$$\lambda^2\alpha',\ \lambda^2(2\alpha'),\ \dots\ \lambda^2(n\alpha').$$

Soit donc

$$\lambda^2\alpha'=\lambda^2(\mu\alpha),$$

où μ est moindre que n. On en tire $\lambda\alpha'=\pm\lambda(\mu\alpha)$, d'où, en vertu du théorème II du nº 138 du journal d'astronomie,

$$\alpha' = k\omega + k'\omega' \pm \mu\alpha,$$

où k et k' désignent des nombres entiers quelconques. Cela donne

$$\lambda^2(\mu'\alpha') = \lambda^2(\mu'\mu\alpha),$$

et puisque $\lambda[\theta + (2n+1)\alpha] = \lambda\theta$, et que $2n+1$ est un nombre premier, il s'ensuit que

$$p' = p, \quad v' = v, \quad \delta' = \delta, \quad \varepsilon' = \varepsilon.$$

Donc les solutions qui répondent à α et α' sont précisément égales entre elles.

Soit d'abord $m' = 0$ en sorte que $\alpha = \frac{m\omega}{2n+1}$. Si l'on fait $k' = 0$, et qu'on détermine les nombres k et μ de manière à satisfaire à l'équation

$$k \pm \frac{\mu m}{2n+1} = \frac{1}{2n+1},$$

on aura

$$\alpha' = \frac{\omega}{2n+1}.$$

On voit par là que la solution qui répond à $\alpha = \frac{m\omega}{2n+1}$ est la même que celle qui répond à $\alpha = \frac{\omega}{2n+1}$, quel que soit m.

Supposons maintenant m' différent de zéro, on aura

$$\alpha' = k\omega + k'\omega' \pm \frac{m\mu\omega + m'\mu\omega'}{2n+1}.$$

Si l'on détermine les deux nombres entiers μ et k' par l'équation

$$k' \pm \frac{m'\mu}{2n+1} = \frac{1}{2n+1},$$

et k par celle-ci:

$$k \pm \frac{\mu m}{2n+1} = \frac{\nu}{2n+1},$$

où ν est positif et moindre que $2n+1$, on aura

$$\alpha' = \frac{\omega' + \nu\omega}{2n+1}.$$

On voit par là, que pour obtenir toutes les valeurs différentes de v et p, il suffit de donner à α les valeurs:

$$(10) \qquad \frac{\omega}{2n+1}, \quad \frac{\omega'}{2n+1}, \quad \frac{\omega'+\omega}{2n+1}, \quad \frac{\omega'+2\omega}{2n+1}, \quad \ldots \quad \frac{\omega'+2n\omega}{2n+1}.$$

Or toutes les solutions ainsi obtenues seront effectivement différentes entre elles; car si l'on attribue à α et à α' deux valeurs différentes de la série (10), il est clair qu'on ne pourra satisfaire à l'équation

$$\alpha' = k\omega + k'\omega' \pm \mu\alpha,$$

qui exprime une condition nécessaire de l'identité des deux solutions qui répondent à α et à α'.

Donc le nombre des solutions différentes qui répondent à $y = \frac{\delta}{\varepsilon} \cdot \frac{p}{v}$ est $2n+2$. Maintenant si l'on attribue à α toutes les valeurs (10), les formules (9) donneront $12(2n+2)$ solutions, et il est évident que toutes les $12(2n+2)$ valeurs correspondantes de y seront nécessairement différentes entre elles. Cependant il ne répond à ces $24(n+1)$ solutions que $12(n+1)$ valeurs du module. Il faut observer que la conclusion précédente n'a pas lieu pour le cas particulier où $n=0$. En effet, dans ce cas y n'aura que douze valeurs différentes, car les deux valeurs $\alpha = \omega$, $\alpha = \omega'$, auxquelles dans ce cas se réduisent les quantités (10), donneront pour y une même valeur, savoir $y = x$. Il faut remarquer également que le module c ne doit pas avoir les valeurs zéro ou un. Dans ces cas la fonction $\int \frac{dx}{\Delta}$ n'est plus une fonction elliptique, mais circulaire ou logarithmique.

On pourra mettre les huit dernières valeurs de y (9) sous une autre forme qui est à quelques égards plus élégante. En effet on pourra démontrer qu'on a

$$(11) \left\{ \begin{aligned} v - \delta p &= (1 - x.\sqrt{c})(1 - 2k_1 x\sqrt{c} + c.x^2)(1 - 2k_2 x\sqrt{c} + cx^2)\dots \\ &\qquad \dots(1 - 2k_n x\sqrt{c} + cx^2), \\ v - \delta p\sqrt{-1} &= (1 - x\sqrt{-c})(1 - 2k_1' x\sqrt{-c} - cx^2)(1 - 2k_2' x\sqrt{-c} - cx^2)\dots \\ &\qquad \dots(1 - 2k_n' x\sqrt{-c} - cx^2). \end{aligned} \right.$$

En changeant le signe de x, on aura des expressions semblables pour $v + \delta p$ et $v + \delta p\sqrt{-1}$. Les quantités $k_1, k_2, k_3, \dots k_n$ sont données par la formule

$$k_\mu = \frac{\Delta(\mu\alpha)}{1 - c.\lambda^2(\mu\alpha)}.$$

On a pareillement

$$k_\mu' = \frac{\Delta(\mu\alpha)}{1 + c.\lambda^2(\mu\alpha)},$$

$\Delta(\theta)$ désignant la quantité

$$\frac{d\lambda\theta}{d\theta} = \pm\sqrt{(1-\lambda^2\theta)(1-c^2\lambda^2\theta)}.$$

Donc le numérateur et le dénominateur de la fraction (3), qui exprime la valeur de y, se trouvent décomposés en facteurs dans tous les cas.

Dans le cas où le module c est moindre que l'unité, les équations (9), nous font voir que généralement les modules des transformées sont imaginaires, excepté ceux qui répondent à

$$\alpha = \frac{\omega}{2n+1} \text{ et à } \alpha = \frac{\omega' - \omega}{2n+1},$$

et en même temps à l'une des solutions I, II, III, IV. Il n'y a donc que huit modules réels. Si l'on ne désire que ceux qui sont moindres que l'unité, on n'en aura que quatre. Cependant il pourra arriver, c ayant des valeurs particulières, qu'un plus grand nombre des modules transformés soient réels. Je ferai voir dans une autre occasion, comment on pourra trouver toutes ces valeurs particulières. Pour le moment je ferai connaître une manière d'exprimer toutes les valeurs du module c' à l'aide de produits infinis.

Si c est moindre que l'unité, ω sera une quantité réelle, ω' au contraire sera imaginaire; car on a

$$\omega' = 2\cdot\int_0^{\frac{1}{c}} \frac{dx}{\Delta} = \omega + 2\sqrt{-1}\cdot\int_1^{\frac{1}{c}} \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(1-c^2x^2)}},$$

c'est-à-dire que, si l'on fait

$$\frac{\varpi}{2} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-b^2x^2)}},$$

où

$$b = \sqrt{1-c^2},$$

on aura

$$\omega' = \omega + \varpi\sqrt{-1},$$

ϖ étant une quantité réelle comme ω. Cela posé, les $2n+2$ valeurs de α deviendront:

$$\frac{\omega}{2n+1},\ \frac{\varpi i+\omega}{2n+1},\ \ldots\ \frac{\varpi i+(2n+1)\omega}{2n+1}.$$

A la place de ces valeurs on pourra aussi mettre celles-ci:

$$\frac{\omega}{2n+1},\ \frac{\varpi i}{2n+1},\ \frac{\varpi i+2\omega}{2n+1},\ \frac{\varpi i+4\omega}{2n+1},\ \ldots\ \frac{\varpi i+4n\omega}{2n+1},$$

où $i = \sqrt{-1}$.

En faisant $c=1$, $e=\frac{c}{b}$ (formule 189 t. II, p. 177*), et mettant ensuite $b\omega$ et $b\varpi$ au lieu de ω et ϖ, et enfin $\alpha=b\left(\frac{\omega}{2}-\theta\right)$, on trouvera $\lambda\theta=f\alpha$, et la formule donnera après quelques réductions faciles,

$$(12)\qquad \lambda\theta=\frac{2}{\sqrt{c}}\sqrt[4]{q}\,.\sin\left(\frac{\pi}{\omega}\theta\right).\frac{\left[1-2q^2\cos\left(\frac{2\pi}{\omega}\theta\right)+q^4\right]\left[1-2q^4\cos\left(\frac{2\pi}{\omega}\theta\right)+q^8\right]\dots}{\left[1-2q.\cos\left(\frac{2\pi}{\omega}\theta\right)+q^2\right]\left[1-2q^3\cos\left(\frac{2\pi}{\omega}\theta\right)+q^6\right]\dots},$$

où $q=e^{-\frac{\varpi}{\omega}\pi}$.

Pour calculer la valeur de ε d'après l'équation (8), il suffit de chercher les valeurs de $\lambda\left(\frac{\omega}{2}+\alpha\right)$, $\lambda\left(\frac{\omega}{2}+2\alpha\right)$, ... $\lambda\left(\frac{\omega}{2}+n\alpha\right)$ au moyen de la formule précédente, et de les multiplier ensuite entre elles. Si l'on fait d'abord $\alpha=\frac{\omega}{2n+1}$ on trouvera aisément

$$(13)\qquad \varepsilon=2.\sqrt[4]{q^{2n+1}}.\left(\frac{1+q^{2(2n+1)}}{1+q^{2n+1}}.\frac{1+q^{4(2n+1)}}{1+q^{3(2n+1)}}\dots\right)^2.$$

De même si l'on fait

$$\alpha=\frac{\varpi i+2\mu\omega}{2n+1},$$

et si l'on pose pour abréger

$$\delta_1=\cos\frac{2\pi}{2n+1}+\sqrt{-1}\,.\sin\frac{2\pi}{2n+1},$$

on parviendra à cette formule:

$$(14)\qquad \varepsilon=2.\sqrt[4]{\delta_1^\mu.q^{\frac{1}{2n+1}}}.\left\{\frac{1+\left(\delta_1^\mu.q^{\frac{1}{2n+1}}\right)^2}{1+\delta_1^\mu.q^{\frac{1}{2n+1}}}.\frac{1+\left(\delta_1^\mu.q^{\frac{1}{2n+1}}\right)^4}{1+\left(\delta_1^\mu.q^{\frac{1}{2n+1}}\right)^3}\dots\right\}^2.$$

Donc on voit que pour avoir toutes les valeurs de ε, il suffit de substituer dans l'expression

$$(15)\qquad 2.\sqrt[4]{q}.\left(\frac{1+q^2}{1+q}.\frac{1+q^4}{1+q^3}\dots\frac{1+q^{2m}}{1+q^{2m-1}}\dots\right)^2,$$

au lieu de q, les $2n+2$ valeurs q^{2n+1}, $q^{\frac{1}{2n+1}}$, $\delta_1 q^{\frac{1}{2n+1}}$, $\delta_1^2 q^{\frac{1}{2n+1}}$, ... $\delta_1^{2n} q^{\frac{1}{2n+1}}$, 1, δ_1, δ_1^2, ... étant les racines de l'équation $\delta^{2n+1}=1$. Deux seulement

*) Voyez p. 347 de cette édition.

des valeurs de ε sont réelles, savoir celles qui répondent à la substitution de q^{2n+1} et $q^{\frac{1}{2n+1}}$, c'est-à-dire à

$$\alpha = \frac{\omega}{2n+1} \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{\varpi i}{2n+1}.$$

Il suit encore des formules précédentes que toutes les $2n+2$ valeurs de ε sont nécessairement différentes entre elles, excepté peut-être pour certaines valeurs particulières du module c. Ayant trouvé les valeurs de ε, on aura celles du module c' à l'aide des équations (9). Il est à remarquer que l'expression (15) est précisément la valeur de $\sqrt{c}$, comme on peut le voir en faisant $\theta = \frac{\omega}{2}$. Dans le cas où l'on suppose y de la forme $\frac{\delta}{\varepsilon} \cdot \frac{p}{v}$, le module c' sera égal à ε^2 d'après les formules (9), donc $\sqrt{c'} = \varepsilon$. Par conséquent dans ce cas le module c se changera successivement dans toutes les valeurs du module c', si l'on remplace dans la formule

$$(16) \qquad \sqrt{c} = 2 \cdot \sqrt[4]{q} \cdot \left(\frac{1+q^2}{1+q} \cdot \frac{1+q^4}{1+q^3} \cdots \right)^2,$$

q par q^{2n+1}, $\sqrt[2n+1]{q}$, $\delta_1 \sqrt[2n+1]{q}$, $\delta_1^2 \sqrt[2n+1]{q}$, $\ldots$ $\delta_1^{2n} \sqrt[2n+1]{q}$.

Ce théorème s'accorde parfaitement avec le théorème énoncé par M. *Jacobi* dans le tome III. p. 193 de ce journal. Seulement à l'endroit cité la fonction de q, qui exprime la valeur de $\sqrt{c}$, est présentée sous une autre forme. Donc on trouverait immédiatement le théorème de ce géomètre, si l'on pouvait parvenir à démontrer l'identité des deux fonctions

$$(17) \qquad \sqrt[4]{q} \cdot \left(\frac{1+q^2}{1+q} \cdot \frac{1+q^4}{1+q^3} \cdots \right)^2 = \frac{q^{\frac{1}{4}} + q^{\frac{9}{4}} + q^{\frac{25}{4}} + \cdots}{1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \cdots}.$$

On pourra encore démontrer qu'on aura les $2n+2$ valeurs de c', en mettant dans la formule

$$(18) \qquad \sqrt[4]{c} = \frac{1-r}{1+r} \cdot \frac{1-r^3}{1+r^3} \cdot \frac{1-r^5}{1+r^5} \cdots$$

les quantités r^{2n+1}, $\sqrt[2n+1]{r}$, $\delta_1 \sqrt[2n+1]{r}$, $\delta_1^2 \sqrt[2n+1]{r}$, $\ldots$ $\delta_1^{2n} \sqrt[2n+1]{r}$, au lieu de r, la lettre r désignant la quantité $e^{-\frac{\omega}{\varpi}\pi}$. Cette quantité est liée à q par l'équation

$$\log\left(\frac{1}{r}\right) \cdot \log\left(\frac{1}{q}\right) = \pi^2.$$

Pour avoir la valeur du coefficient a il faut connaître celle de δ (8). Or on pourra la déduire aisément de la formule (12), en y faisant $\theta = \alpha, 2\alpha, \ldots n\alpha$. On trouve de cette manière que les valeurs de δ qui répondent respectivement à

$$\alpha = \frac{\omega}{2n+1},\ \frac{\varpi i}{2n+1},\ \frac{\varpi i + 2\omega}{2n+1}, \ldots \frac{\varpi i + 4n\omega}{2n+1},$$

sont égales à celles que prend l'expression

$$(19) \qquad \delta = 2\,\frac{\pi}{\omega}\sqrt[4]{q}\left(\frac{1-q^2}{1-q}\cdot\frac{1-q^4}{1-q^3}\cdots\right)^2,$$

en y substituant au lieu de q les valeurs $q^{2n+1}, \sqrt[2n+1]{q}, \delta_1\sqrt[2n+1]{q}, \delta_1^2\sqrt[2n+1]{q}, \ldots \delta_1^{2n}\sqrt[2n+1]{q}$.

XXIII.

THÉORÈME GÉNÉRAL SUR LA TRANSFORMATION DES FONCTIONS ELLIPTIQUES DE LA SECONDE ET DE LA TROISIÈME ESPÈCE.

Journal für die reine und angewandte Mathematik, herausgegeben von *Crelle*, Bd. 3, Berlin 1828.

Si une intégrale algébrique $f(y, x) = 0$ satisfait à l'équation

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-c'^2y^2)}} = a \cdot \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}},$$

on aura toujours

$$\int \frac{A+Bx^2}{1-\frac{x^2}{n^2}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}} = \int \frac{A'+B'y^2}{1-\frac{y^2}{m^2}} \cdot \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-c'^2y^2)}} + k \log p,$$

où A, B, n sont des quantités données, A', B', m, k des quantités constantes, fonctions des premières, et p une certaine fonction algébrique de y et x. Il est très remarquable que les paramètres m et n sont liés entre eux par la même équation que y et x, savoir $f(m, n) = 0$. Dans le cas où n est infini, le premier membre deviendra seulement une fonction de la seconde espèce, et dans ce cas on pourra démontrer que

$$(a) \quad \int (A+Bx^2) \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}} = \int (A'+B'y^2) \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-c'^2y^2)}} + v,$$

où v est une fonction algébrique des variables x et y.

Au reste il est aisé de démontrer la formule (a). Il n'y a qu'à différentier l'équation

$$a \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}} = \int \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-c'^2y^2)}}$$

par rapport au module c. Je me réserve de donner dans un autre mémoire des développemens plus étendus sur le théorème ci-dessus.

XXIV.

NOTE SUR QUELQUES FORMULES ELLIPTIQUES.

Journal für die reine und angewandte Mathematik, herausgegeben von *Crelle*, Bd. 4, Berlin 1829.

Dans le second tome de ce journal j'ai donné plusieurs formules pour le développement des fonctions $\varphi\alpha$, $f\alpha$, $F\alpha$, dans le cas où les modules e et c sont réels. Il sera facile d'en déduire des formules analogues pour le cas où e^2 est une quantité négative, comme nous allons voir.

Soit pour plus de simplicité $c = 1$. Cela posé, si l'on fait

$$(1) \qquad \lambda\alpha = f\left(\frac{\omega}{2} - b\alpha\right), \quad \text{où} \quad b = \frac{1}{\sqrt{1+e^2}},$$

on trouvera aisément, par la définition de la fonction f, qu'on a

$$(2) \qquad \alpha = \int_0 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}},$$

en faisant

$$x = \lambda\alpha \quad \text{et} \quad c = \frac{e}{\sqrt{1+e^2}}.$$

Donc le module c est plus petit que l'unité, et comme on a $b = \sqrt{1-c^2}$, b sera son complément.

On trouvera aussi

$$(3) \qquad \begin{cases} \dfrac{\omega}{2} = b\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}} = b\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-c^2\sin^2\theta}}, \\[2ex] \dfrac{\varpi}{2} = b\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-b^2x^2)}} = b\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-b^2\sin^2\theta}}. \end{cases}$$

Si l'on fait

(4) $$\lambda'\alpha = \sqrt{1-\lambda^2\alpha},\quad \lambda''\alpha = \sqrt{1-c^2\lambda^2\alpha},$$

on aura encore

(5) $$\lambda'\alpha = \varphi\left(\frac{\omega}{2}-b\alpha\right),\quad \lambda''\alpha = bF\left(\frac{\omega}{2}-b\alpha\right),$$

et en faisant

(6) $$\frac{\omega'}{2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-c^2\sin^2\theta}},\quad \frac{\varpi'}{2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-b^2\sin^2\theta}},$$

on a, en vertu de (3)

(7) $$\frac{\omega'}{\varpi'} = \frac{\omega}{\varpi},\quad \omega = b\omega',\quad \varpi = b\varpi'.$$

Considérons maintenant d'abord la formule (185) p. 176*), qui donne la valeur de $f\alpha$. Pour en déduire celle de la fonction $\lambda\alpha$, il suffit de mettre $\frac{\omega}{2}-b\alpha$ à la place de α. Faisons donc $\alpha = \frac{\omega}{2}-b\theta$, et posons pour abréger,

(8) $$\varrho = e^{-\frac{\theta\pi}{\varpi'}},\quad r = e^{-\frac{\omega'}{\varpi'}\pi}:$$

alors la formule (185) donne sur le champ

$$\lambda\theta = A.\prod_0^\infty{}_m \frac{(1-r^{2m+1})^2-(\varrho r^m-\varrho^{-1}r^{m+1})^2}{(1+r^{2m+1})^2+(\varrho r^m-\varrho^{-1}r^{m+1})^2},$$

où

(8') $$A^{\frac{1}{2}} = \frac{(1+r)(1+r^3)\dots}{(1-r)(1-r^3)\dots}.$$

Or on a

$$(1-r^{2m+1})^2-(\varrho r^m-\varrho^{-1}r^{m+1})^2 = (1-\varrho^2r^{2m})(1-\varrho^{-2}r^{2m+2})$$

et

$$(1+r^{2m+1})^2+(\varrho r^m-\varrho^{-1}r^{m+1})^2 = (1+\varrho^2r^{2m})(1+\varrho^{-2}r^{2m+2}),$$

par conséquent l'expression de $\lambda\theta$ deviendra, en développant,

(9) $$\lambda\theta = A.\frac{1-\varrho^2}{1+\varrho^2}.\frac{1-\varrho^2r^2}{1+\varrho^2r^2}.\frac{1-\varrho^{-2}r^2}{1+\varrho^{-2}r^2}.\frac{1-\varrho^2r^4}{1+\varrho^2r^4}.\frac{1-\varrho^{-2}r^4}{1+\varrho^{-2}r^4}\dots$$

Avec la même facilité on tirera des deux formules (184) et (186), en y faisant $\alpha = \frac{\omega}{2}-b\theta$,

---

*) P. 346 de cette édition.

$$(10)\qquad \lambda'\theta = A'.\frac{2\varrho}{1+\varrho^2}.\frac{(1-\varrho^2 r)(1-\varrho^{-2}r)(1-\varrho^2 r^3)(1-\varrho^{-2}r^3)\ldots}{(1+\varrho^2 r^2)(1+\varrho^{-2}r^2)(1+\varrho^2 r^4)(1+\varrho^{-2}r^4)\ldots},$$

$$(11)\qquad \lambda''\theta = A''.\frac{2\varrho}{1+\varrho^2}.\frac{(1+\varrho^2 r)(1+\varrho^{-2}r)(1+\varrho^2 r^3)(1+\varrho^{-2}r^3)\ldots}{(1+\varrho^2 r^2)(1+\varrho^{-2}r^2)(1+\varrho^2 r^4)(1+\varrho^{-2}r^4)\ldots},$$

où A', A'' sont donnés par les formules

$$(12)\qquad \sqrt{A'} = \frac{(1+r^2)(1+r^4)(1+r^6)\ldots}{(1-r)(1-r^3)(1-r^5)\ldots},$$

$$(13)\qquad \sqrt{A''} = \frac{(1+r^2)(1+r^4)(1+r^6)\ldots}{(1+r)(1+r^3)(1+r^5)\ldots}.$$

On pourra trouver pour A, A', A'' d'autres expressions beaucoup plus simples et qui donneront des formules très remarquables.

Si l'on fait, dans la formule (9), $\theta = \frac{\omega'}{2} + \frac{\varpi'}{2}i$, on aura

$$\lambda\theta = f\left(\frac{\varpi}{2}i\right) = \frac{\sqrt{1+e^2}}{e} = \frac{1}{c}, \quad \text{et} \quad \varrho^2 = e^{-\pi i - \frac{\omega'}{\varpi'}\pi} = -r,$$

donc en substituant,

$$\frac{1}{c} = A\left(\frac{1+r}{1-r}\cdot\frac{1+r^3}{1-r^3}\cdot\frac{1+r^5}{1-r^5}\cdots\right)^2,$$

c'est-à-dire, en vertu de la formule (8'),

$$\frac{1}{c} = A^2,$$

d'où

$$A = \frac{1}{\sqrt{c}}.$$

En faisant, dans l'expression de $\lambda'\theta$, $\theta = \frac{\omega'}{2} + \frac{\varpi'}{2}i$, on a

$$\lambda'\theta = -\varphi\left(\frac{\varpi i}{2}\right) = -\frac{i}{e} = -i\frac{\sqrt{1-c^2}}{c}, \quad \text{et} \quad \varrho^2 = -r,$$

donc

$$i.\frac{b}{c} = 4A'i\sqrt{r}\left(\frac{1+r^2}{1-r}\cdot\frac{1+r^4}{1-r^3}\cdots\right)^2,$$

d'où l'on tire, en vertu de l'équation (12),

$$A' = \frac{1}{2\sqrt[4]{r}}\cdot\sqrt{\frac{b}{c}}.$$

Enfin si l'on fait dans la formule (11) $\theta = \frac{\omega'}{2}$, on trouvera

$$\lambda''\theta = \sqrt{1-c^2} = b, \quad \varrho^2 = r,$$

donc

$$b = 4A''\sqrt{r}\left(\frac{1+r^2}{1+r} \cdot \frac{1+r^4}{1+r^3} \cdots\right)^2 = 4A''\sqrt{r}\,.\,A'',$$

et par suite

$$A'' = \frac{\sqrt{b}}{2\sqrt[4]{r}}.$$

En comparant ces valeurs de A, A', A'' à celles données plus haut, on en déduira ces formules:

$$\sqrt[4]{c} = \frac{1-r}{1+r} \cdot \frac{1-r^3}{1+r^3} \cdot \frac{1-r^5}{1+r^5} \cdots, \tag{14}$$

$$\sqrt[4]{\frac{b}{c}} = \sqrt{2}\,.\,\sqrt[8]{r}\,.\,\frac{1+r^2}{1-r} \cdot \frac{1+r^4}{1-r^3} \cdot \frac{1+r^6}{1-r^5} \cdots, \tag{15}$$

$$\sqrt[4]{b} = \sqrt{2}\,.\,\sqrt[8]{r}\,.\,\frac{1+r^2}{1+r} \cdot \frac{1+r^4}{1+r^3} \cdot \frac{1+r^6}{1+r^5} \cdots, \tag{16}$$

dont l'une est une suite des deux autres.

Si dans l'expression de $\lambda\theta$ on fait $\theta = 0$, après avoir divisé les deux membres par

$$1 - \varrho^2 = 2\frac{\theta\pi}{\varpi'} + \cdots,$$

et qu'on remarque que $\frac{\lambda\theta}{\theta} = 1$, pour $\theta = 0$, on obtiendra

$$\sqrt[4]{c}\,.\,\sqrt{\frac{\varpi'}{\pi}} = \frac{(1-r^2)(1-r^4)(1-r^6)\ldots}{(1+r^2)(1+r^4)(1+r^6)\ldots}. \tag{17}$$

De là on tire, en substituant la valeur de $\sqrt[4]{c}$:

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{\varpi'}{\pi}} &= \frac{(1+r)(1-r^2)(1+r^3)(1-r^4)\ldots}{(1-r)(1+r^2)(1-r^3)(1+r^4)\ldots} \\ &= (1+r)^2(1+r^3)^2(1+r^5)^2\ldots\times(1-r^2)(1-r^4)(1-r^6)\ldots \\ &= [(1+r)(1+r^3)(1+r^5)\ldots]^2\,.\,(1+r)(1+r^2)(1+r^3)\ldots \\ &\qquad\times(1-r)(1-r^2)(1-r^3)\ldots\end{aligned} \tag{18}$$

A l'aide des formules (16, 14, 18) il est facile de trouver l'expression des produits infinis

$$(1+r)(1+r^2)(1+r^3)\ldots,\quad (1-r)(1-r^2)(1-r^3)\ldots.$$

En effet, si l'on fait pour abréger

(19) $$\begin{cases} P=(1+r)(1+r^3)(1+r^5)\ldots, \\ P'=(1+r^2)(1+r^4)(1+r^6)\ldots, \end{cases}$$

et qu'on ait égard à la formule

$$\frac{1}{(1-r)(1-r^3)(1-r^5)\ldots}=(1+r)(1+r^2)(1+r^3)\ldots=P.P',$$

les formules (14, 16) donneront sur le champ

$$\sqrt[4]{c}=\frac{1}{P^2.P'},\quad \sqrt[4]{b}=\sqrt{2}.\sqrt[8]{r}.\frac{P'}{P},$$

d'où l'on tire

(20) $$P=\sqrt[6]{2}.\sqrt[24]{\frac{r}{b^2c^2}},\quad P'=\frac{\sqrt[6]{b}.\sqrt[24]{r}}{\sqrt[3]{2}.\sqrt[12]{c}}.\frac{1}{\sqrt[8]{r}}.$$

On connait donc les produits P et P'. En les multipliant entre eux, il viendra

(21) $$(1+r)(1+r^2)(1+r^3)(1+r^4)\cdots=\frac{\sqrt[12]{b}}{\sqrt[6]{2c}.\sqrt[24]{r}}.$$

De même la formule (18) donne, en substituant les valeurs de P, P',

$$\sqrt{\frac{\varpi'}{\pi}}=P^3.P'.(1-r)(1-r^2)(1-r^3)\ldots,$$

et de là:

(22) $$(1-r)(1-r^2)(1-r^3)\ldots=\frac{\sqrt[12]{b}.\sqrt[3]{c}}{\sqrt[6]{2}.\sqrt[24]{r}}.\sqrt{\frac{\varpi'}{\pi}},$$

formule due à M. *Jacobi* (Tome III. p. 193, où ce géomètre en présente plusieurs autres très remarquables et très élégantes).

Des formules démontrées précédemment on peut aisément en tirer un grand nombre d'autres. En voici quelques unes des plus remarquables.

Si l'on fait pour abréger

(23) $$q=e^{-\frac{\varpi'}{\omega'}\pi},$$

on aura

$$(24)\quad \lambda\left(\frac{\omega'}{\pi}x\right)=\frac{2}{\sqrt{c}}\cdot\sqrt[4]{q}\,.\sin x\,.\frac{1-2q^2\cos 2x+q^4}{1-2q\ \cos 2x+q^2}\cdot\frac{1-2q^4\cos 2x+q^8}{1-2q^3\cos 2x+q^6}\cdots$$

$$(25)\quad \lambda'\left(\frac{\omega'}{\pi}x\right)=2\sqrt{\frac{b}{c}}\cdot\sqrt[4]{q}\,.\cos x\,.\frac{1+2q^2\cos 2x+q^4}{1-2q\ \cos 2x+q^2}\cdot\frac{1+2q^4\cos 2x+q^8}{1-2q^3\cos 2x+q^6}\cdots$$

$$(26)\quad \lambda''\left(\frac{\omega'}{\pi}x\right)=\sqrt{b}\,.\frac{1+2q\cos 2x+q^2}{1-2q\cos 2x+q^2}\cdot\frac{1+2q^3\cos 2x+q^6}{1-2q^3\cos 2x+q^6}\cdots$$

Ces formules ont été déduites respectivement des formules (11, 10, 9), en changeant c en b, et en faisant ensuite

$$\theta=\frac{\varpi'}{2}+\frac{\omega'}{2}\sqrt{-1}+\frac{\omega'}{\pi}x\sqrt{-1}.$$

En comparant ces valeurs à celles que M. *Jacobi* a données pour les mêmes fonctions à l'endroit cité, on parviendra à des résultats remarquables. Ainsi, en faisant dans la formule (3) de M. *Jacobi*, $k=c$, on aura

$$(27)\quad \left\{\begin{aligned}&\frac{1+2q\cos 2x+2q^4\cos 4x+2q^9\cos 6x+\cdots}{1-2q\cos 2x+2q^4\cos 4x-2q^9\cos 6x+\cdots}\\&=\frac{(1+2q\cos 2x+q^2)(1+2q^3\cos 2x+q^6)(1+2q^5\cos 2x+q^{10})\ldots}{(1-2q\cos 2x+q^2)(1-2q^3\cos 2x+q^6)(1-2q^5\cos 2x+q^{10})\cdots}\end{aligned}\right.$$

formule qui doit avoir lieu pour des valeurs quelconques réelles de x et q, en supposant q moindre que l'unité.

En prenant les logarithmes des valeurs de $\lambda\left(\frac{\omega'}{\pi}x\right)$ etc., on trouvera après quelques réductions faciles:

$$(28)\quad \log\lambda\left(\frac{\omega'}{\pi}x\right)=\log 2-\tfrac{1}{2}\log c-\tfrac{1}{4}\frac{\varpi'}{\omega'}\pi+\log\sin x$$
$$+2\left(\cos 2x\,.\frac{q}{1+q}+\tfrac{1}{2}\cos 4x\,.\frac{q^2}{1+q^2}+\tfrac{1}{3}\cos 6x\,.\frac{q^3}{1+q^3}+\cdots\right),$$

$$(29)\quad \log\lambda'\left(\frac{\omega'}{\pi}x\right)=\log 2+\tfrac{1}{2}\log b-\tfrac{1}{2}\log c-\tfrac{1}{4}\frac{\varpi'}{\omega'}\pi+\log\cos x$$
$$+2\left(\cos 2x\,.\frac{q}{1-q}+\tfrac{1}{2}\cos 4x\,.\frac{q^2}{1+q^2}+\tfrac{1}{3}\cos 6x\,.\frac{q^3}{1-q^3}+\cdots\right),$$

$$(30)\quad \log\lambda''\left(\frac{\omega'}{\pi}x\right)=\tfrac{1}{2}\log b+4\left(\cos 2x\,.\frac{q}{1-q^2}+\tfrac{1}{3}\cos 6x\,.\frac{q^3}{1-q^6}+\cdots\right).$$

En faisant $x=0$, on trouvera:

$$(31)\qquad \log\left(\frac{1}{b}\right)=8\,.\left(\frac{q}{1-q^2}+\tfrac{1}{3}\cdot\frac{q^3}{1-q^6}+\tfrac{1}{5}\cdot\frac{q^5}{1-q^{10}}+\cdots\right),$$

$$(32)\quad \log\left(\frac{1}{c}\right)=\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\varpi'}{\omega'}\pi-2\log 2+4\left(\frac{q}{1+q}-\tfrac{1}{2}\cdot\frac{q^2}{1+q^2}+\tfrac{1}{3}\cdot\frac{q^3}{1+q^3}-\cdots\right)$$
$$=8\cdot\left(\frac{r}{1-r^2}+\tfrac{1}{3}\cdot\frac{r^3}{1-r^6}+\tfrac{1}{5}\cdot\frac{r^5}{1-r^{10}}+\cdots\right).$$

En posant dans les formules (206) et (207) t. II, p. 180*): $\alpha=1-\frac{2x}{\pi}$, on trouvera les expressions suivantes:

$$(33)\quad \lambda\left(\frac{\omega'}{\pi}x\right)=\frac{4\pi}{c\omega'}\cdot\sqrt{q}\cdot\left(\sin x\cdot\frac{1}{1-q}+\sin 3x\cdot\frac{q}{1-q^3}+\sin 5x\cdot\frac{q^2}{1-q^5}+\cdots\right),$$

$$(34)\quad \lambda'\left(\frac{\omega'}{\pi}x\right)=\frac{4\pi}{c\omega'}\cdot\sqrt{q}\cdot\left(\cos x\cdot\frac{1}{1+q}+\cos 3x\cdot\frac{q}{1+q^3}+\cos 5x\cdot\frac{q^2}{1+q^5}+\cdots\right).$$

Ces formules sont peut-être les plus simples qu'on puisse trouver pour exprimer les fonctions elliptiques en quantités connues.

Voici encore deux autres formules qu'on déduira des équations (204) et (205) t. II, p. 179*), en y faisant $\alpha=\frac{\omega}{2}-\omega x$:

$$(35)\quad \lambda'(\omega' x)=\frac{2\pi}{c\varpi'}\cdot\left(\frac{r^x-r^{1-x}}{1+r}-\frac{r^{3x}-r^{3-3x}}{1+r^3}+\frac{r^{5x}-r^{5-5x}}{1+r^5}-\cdots\right),$$

$$(36)\quad \lambda''(\omega' x)=\frac{2\pi}{\varpi'}\cdot\left(\frac{r^x+r^{1-x}}{1-r}-\frac{r^{3x}+r^{3-3x}}{1-r^3}+\frac{r^{5x}+r^{5-5x}}{1-r^5}-\cdots\right),$$

r désignant la même chose que précédemment.

Il est à remarquer que les quantités r et q sont liées entre elles par l'équation:

$$(37)\qquad \log r\,.\,\log q=\pi^2.$$

A l'aide des expressions des modules c et b données plus haut, on pourra trouver une relation générale entre les modules de deux fonctions elliptiques qui sont réductibles l'une à l'autre. En effet on pourra démontrer, comme je l'ai fait dans un des derniers numéros des „Astronomische Nachrichten"**), que si deux fonctions elliptiques *réelles*

$$(38)\qquad F(c,\theta)=\int_0\frac{d\theta}{\sqrt{1-c^2\sin^2\theta}},\quad F(c',\theta')=\int_0\frac{d\theta'}{\sqrt{1-c'^2\sin^2\theta'}},$$

*) P. 350 de cette édition.

**) Mémoire XX de cette édition.

dont les modules c et c' sont moindres que l'unité, sont réductibles l'une à l'autre à l'aide d'une relation algébrique entre $\sin\theta$ et $\sin\theta'$, on peut trouver deux nombres entiers m et n, tels que l'équation

$$(39)\quad n.\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sqrt{1-c^2\sin^2\theta}}.\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sqrt{1-b'^2\sin^2\theta}} = m.\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sqrt{1-b^2\sin^2\theta}}.\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sqrt{1-c'^2\sin^2\theta}}$$

soit satisfaite; b' est le complément de c', savoir $b'=\sqrt{1-c'^2}$.

Si cette condition est remplie, on pourra toujours déterminer $\sin\theta'$ *algébriquement* en $\sin\theta$ de sorte que

$$(40)\qquad F(c',\theta')=a.F(c,\theta),$$

où a est un coefficient constant.

Cela posé, désignons par ω'', ϖ'', r', q' les valeurs de ω', ϖ', r, q qui répondent au module c', on aura en vertu de la formule (14)

$$\sqrt[4]{c'}=\frac{(1-r')(1-r'^3)(1-r'^5)\ldots}{(1+r')(1+r'^3)(1+r'^5)\ldots},$$

r' étant égal à $e^{-\frac{\omega''}{\varpi''}\pi}$. Mais l'équation (39) donne

$$\frac{\omega''}{\varpi''}=\frac{n}{m}.\frac{\omega'}{\varpi'},$$

donc

$$r'=e^{-\frac{n}{m}.\frac{\omega'}{\varpi'}\pi},$$

c'est-à-dire que

$$r'=r^{\frac{n}{m}}.$$

Donc on a ce théorème:

Une fonction elliptique réelle étant proposée, si son module c est donné par la formule:

$$(41)\qquad \sqrt[4]{c}=\frac{(1-r)(1-r^3)(1-r^5)\ldots}{(1+r)(1+r^3)(1+r^5)\ldots}$$

on aura le module de toute autre fonction elliptique réelle, réductible à la première, en mettant au lieu de r la puissance $r^{\frac{n}{m}}$, où n et m sont deux nombres entiers et positifs quelconques; autrement dit, on aura, en désignant par c' le module de la nouvelle fonction,

(42) $$\sqrt[4]{c'} = \frac{\left(1-r^{\frac{n}{m}}\right)\left(1-r^{3\frac{n}{m}}\right)\left(1-r^{5\frac{n}{m}}\right)\dots}{\left(1+r^{\frac{n}{m}}\right)\left(1+r^{3\frac{n}{m}}\right)\left(1+r^{5\frac{n}{m}}\right)\dots}.$$

En faisant

(43) $$\sqrt[4]{c} = \sqrt{2}\,.\,\sqrt[8]{q}\,.\,\frac{1+q^2}{1+q}\,.\,\frac{1+q^4}{1+q^3}\,.\,\frac{1+q^6}{1+q^5}\dots,$$

on aura encore la formule suivante:

(44) $$\sqrt[4]{c'} = \sqrt{2}\,.\left(\sqrt[8]{q}\right)^{\frac{m}{n}}.\,\frac{1+q^{2\frac{m}{n}}}{1+q^{\frac{m}{n}}}\,.\,\frac{1+q^{4\frac{m}{n}}}{1+q^{3\frac{m}{n}}}\,.\,\frac{1+q^{6\frac{m}{n}}}{1+q^{5\frac{m}{n}}}\dots.$$

Dans le cas particulier où le module c est $\sqrt{\frac{1}{2}}$, on a $\varpi' = \omega'$, donc

$$r = e^{-\pi} = q.$$

De là il suit que le module c de toute fonction elliptique réelle, qui est réductible à la fonction $\int_0 \frac{d\theta}{\sqrt{1-\frac{1}{2}.\sin^2\theta}}$, est donné par la formule:

(45) $$\sqrt[4]{c} = \frac{1-e^{-\mu\pi}}{1+e^{-\mu\pi}}\,.\,\frac{1-e^{-3\mu\pi}}{1+e^{-3\mu\pi}}\,.\,\frac{1-e^{-5\mu\pi}}{1+e^{-5\mu\pi}}\dots$$
$$= \sqrt{2}\,.\,e^{-\frac{\pi}{8\mu}}\,\frac{1+e^{-\frac{2\pi}{\mu}}}{1+e^{-\frac{\pi}{\mu}}}\,.\,\frac{1+e^{-\frac{4\pi}{\mu}}}{1+e^{-\frac{3\pi}{\mu}}}\,.\,\frac{1+e^{-\frac{6\pi}{\mu}}}{1+e^{-\frac{5\pi}{\mu}}}\dots,$$

où μ est un nombre rationnel quelconque.

D'ailleurs, dans ce cas c pourra toujours être exprimé en termes finis à l'aide de radicaux.

Si l'on suppose $b' = c$, on a $c' = b$, $\omega'' = \varpi'$, $\varpi'' = \omega'$; mais

$$\frac{\omega''}{\varpi''} = \frac{n}{m}\cdot\frac{\omega'}{\varpi'} = \frac{\varpi'}{\omega'},$$

donc

$$\frac{\omega'}{\varpi'} = \sqrt{\frac{m}{n}} = \sqrt{\mu}.$$

De là nous concluons:

Si deux fonctions elliptiques réelles dont les modules sont complémens l'un de l'autre, sont reductibles entre elles, le module sera donné par la formule:

(46) $$\sqrt[4]{c} = \frac{1-e^{-\pi\sqrt{\mu}}}{1+e^{-\pi\sqrt{\mu}}}\,.\,\frac{1-e^{-3\pi\sqrt{\mu}}}{1+e^{-3\pi\sqrt{\mu}}}\,.\,\frac{1-e^{-5\pi\sqrt{\mu}}}{1+e^{-5\pi\sqrt{\mu}}}\dots,$$

et son complément b par celle-ci:

(47) $$\sqrt[4]{b} = \frac{1-e^{-\frac{\pi}{\sqrt{\mu}}}}{1+e^{-\frac{\pi}{\sqrt{\mu}}}} \cdot \frac{1-e^{-\frac{3\pi}{\sqrt{\mu}}}}{1+e^{-\frac{3\pi}{\sqrt{\mu}}}} \cdot \frac{1-e^{-\frac{5\pi}{\sqrt{\mu}}}}{1+e^{-\frac{5\pi}{\sqrt{\mu}}}} \cdots,$$

où μ est un nombre rationnel quelconque.

Nous ajouterons qu'on a en même temps

(48) $$F(b, \theta') = k\sqrt{\mu} \,.\, F(c, \theta),$$

où k est un autre nombre rationnel. Cela donne immédiatement le théorème suivant:

Si l'équation différentielle

(49) $$\frac{dy}{\sqrt{A - By^2 + Cy^4}} = a \,.\, \frac{dx}{\sqrt{A + Bx^2 + Cx^4}}$$

est intégrable algébriquement, il faut nécessairement que le coefficient a soit égal *à la racine carrée d'un nombre rationnel et positif*, en supposant que les quantités A, B, C, a soient réelles; et si a est de cette forme, on pourra trouver une infinité de valeurs convenables pour A, B, C.

Nous terminerons ces remarques par la démonstration d'une formule curieuse, qu'on tire de la première des équations (20), savoir de la formule

$$(1+r)(1+r^3)(1+r^5)\cdots = \sqrt[6]{2} \,.\, \frac{\sqrt[24]{r}}{\sqrt[12]{bc}}.$$

En y changeant c en b, b se changera en c, et r en q, donc:

$$(1+q)(1+q^3)(1+q^5)\cdots = \sqrt[6]{2} \,.\, \frac{\sqrt[24]{q}}{\sqrt[12]{bc}}.$$

En comparant ces formules, on voit que l'équation

(50) $$\frac{1}{\sqrt[24]{r}} \cdot (1+r)(1+r^3)(1+r^5)\cdots = \frac{1}{\sqrt[24]{q}}(1+q)(1+q^3)(1+q^5)\cdots,$$

a lieu toutes les fois que les quantités r et q sont moindres que l'unité et liées entre elles par l'équation

$$\log r \,.\, \log q = \pi^2.$$

Il existe un grand nombre de relations semblables entre q et r, par exemple la suivante:

$$\sqrt[4]{\log\frac{1}{r}}\cdot\left(\tfrac{1}{2}+r+r^4+r^9+\ldots\right)=\sqrt[4]{\log\frac{1}{q}}\cdot\left(\tfrac{1}{2}+q+q^4+q^9+\ldots\right),$$

qui est due à M. *Cauchy* (Exercices de mathématiques). On pourra la déduire de la formule

$$\sqrt{\frac{\omega'}{\pi}}=1+2q+2q^4+2q^9+\cdots,$$

donnée par M. *Jacobi*, en y changeant c en b.

XXV.

MÉMOIRE SUR UNE CLASSE PARTICULIÈRE D'ÉQUATIONS RÉSOLUBLES ALGÉBRIQUEMENT.

Journal für die reine und angewandte Mathematik, herausgegeben von *Crelle*, Bd. 4, Berlin 1829.

Quoique la résolution algébrique des équations ne soit pas possible en général, il y a néanmoins des équations particulières de tous les degrés qui admettent une telle résolution. Telles sont par exemple les équations de la forme $x^n - 1 = 0$. La résolution de ces équations est fondée sur certaines relations qui existent entre les racines. J'ai cherché à généraliser cette méthode en supposant que deux racines d'une équation donnée soient tellement liées entre elles, qu'on puisse exprimer rationnellement l'une par l'autre, et je suis parvenu à ce resultat, qu'une telle équation peut toujours être résolue à l'aide d'un certain nombre d'équations *moins élevées*. Il y a même des cas où l'on peut résoudre *algébriquement* l'équation donnée elle-même. Cela arrive par exemple toutes les fois que, l'équation donnée étant irréductible, son degré est un nombre premier. La même chose a encore lieu si toutes les racines d'une équation peuvent être exprimées par

$$x, \; \theta x, \; \theta^2 x, \; \theta^3 x, \; \ldots \; \theta^{n-1} x, \quad \text{où} \quad \theta^n x = x,$$

θx étant une fonction rationnelle de x, et $\theta^2 x$, $\theta^3 x$, ... des fonctions de la même forme que θx, prise deux fois, trois fois, etc.

L'équation $\frac{x^n - 1}{x - 1} = 0$, où n est un nombre premier, est dans ce cas; car en désignant par a une racine primitive pour le module n, on peut, comme on sait, exprimer les $n - 1$ racines par

$$x,\ x^{\alpha},\ x^{\alpha^2},\ x^{\alpha^3},\ \ldots\ x^{\alpha^{n-2}},\ \text{ où }\ x^{\alpha^{n-1}} = x,$$

c'est-à-dire, en faisant $x^{\alpha} = \theta x$, par

$$x,\ \theta x,\ \theta^2 x,\ \theta^3 x,\ \ldots\ \theta^{n-2} x,\ \text{ où }\ \theta^{n-1} x = x.$$

La même propriété appartient à une certaine classe d'équations à laquelle je suis parvenu par la théorie des fonctions elliptiques.

En général j'ai démontré le théorème suivant:

„Si les racines d'une équation d'un degré quelconque sont liées entre elles de telle sorte, que *toutes* ces racines puissent être exprimées rationnellement au moyen de l'une d'elles, que nous désignerons par x; si de plus, en désignant par θx, $\theta_1 x$ deux autres racines quelconques, on a

$$\theta\theta_1 x = \theta_1 \theta x,$$

l'équation dont il s'agit sera toujours résoluble algébriquement. De même, si l'on suppose l'équation irréductible, et son degré exprimé par

$$\alpha_1^{\nu_1} \,.\, \alpha_2^{\nu_2} \,\ldots\ldots\, \alpha_\omega^{\nu_\omega},$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\omega$ sont des nombres premiers différens, on pourra ramener la résolution de cette équation à celle de ν_1 équations du degré α_1, de ν_2 équations du degré α_2, de ν_3 équations du degré α_3 etc."

Après avoir exposé cette théorie en général, je l'appliquerai aux fonctions circulaires et elliptiques.

§ 1.

Nous allons d'abord considérer le cas où l'on suppose que deux racines d'une équation irréductible*) soient liées tellement entre elles, que l'une puisse être exprimée rationnellement par l'autre.

Soit

(1) $$\varphi x = 0$$

une équation du degré μ, et x' et x_1 les deux racines qui sont liées entreelles par l'équation

*) Une équation $\varphi x = 0$, dont les coefficiens sont des fonctions rationnelles d'un certain nombre de quantités connues $a, b, c, \ldots$ s'appelle *irréductible*, lorsqu'il est impossible d'exprimer aucune de ses racines par une équation moins élevée, dont les coefficiens soient également des fonctions rationnelles de $a, b, c \ldots.$

(2) $$x' = \theta x_1,$$

où θx désigne une fonction rationnelle de x et de quantités connues. La quantité x' étant racine de l'équation, on aura $\varphi(x') = 0$, et en vertu de l'équation (2)

(3) $$\varphi(\theta x_1) = 0.$$

Je dis maintenant que cette équation aura encore lieu, si au lieu de x_1 on met une autre racine quelconque de l'équation proposée. On a effectivement le théorème suivant*).

Théorème I. „Si une des racines d'une équation irréductible $\varphi x = 0$ satisfait à une autre équation $fx = 0$, où fx désigne une fonction rationnelle de x et des quantités connues qu'on suppose contenues dans φx; cette dernière équation sera encore satisfaite en mettant au lieu de x une racine quelconque de l'équation $\varphi x = 0$.“

Or le premier membre de l'équation (3) est une fonction rationnelle de x, donc on aura

(4) $$\varphi(\theta x) = 0, \text{ si } \varphi x = 0,$$

c'est-à-dire que si x est une racine de l'équation $\varphi x = 0$, la quantité θx le sera également.

Maintenant, d'après ce qui précède, θx_1 est racine de l'équation $\varphi x = 0$, donc $\theta\theta x_1$ le sera aussi; $\theta\theta\theta x_1$, etc. le seront également, en répétant l'opération désignée par θ un nombre quelconque de fois.

*) Ce théorème se démontre aisément comme il suit:

Quelle que soit la fonction rationnelle fx, on peut toujours faire $fx = \frac{M}{N}$, où M et N sont des fonctions entières de x, qui n'ont pas de facteur commun; mais une fonction entière de x peut toujours être mise sous la forme $P + Q.\varphi x$, où P et Q sont des fonctions entières, telles que le degré de P soit moindre que celui de la fonction φx. En faisant donc $M = P + Q.\varphi x$, on aura $fx = \frac{P + Q.\varphi x}{N}$. Cela posé, soit x_1 la racine de $\varphi x = 0$ qui satisfait en même temps à $fx = 0$; x_1 sera également une racine de l'équation $P = 0$. Or si P n'est pas zéro pour une valeur quelconque de x, cette équation donnera x_1 comme racine d'une équation d'un degré moindre que celui de $\varphi x = 0$, ce qui est contre l'hypothèse; donc $P = 0$ et par suite $fx = \varphi x \frac{Q}{N}$, d'où l'on voit que fx sera égal à zéro en même temps que φx c. q. f. d.

Soit pour abréger

$$\theta\theta x_1 = \theta^2 x_1; \quad \theta\theta^2 x_1 = \theta^3 x_1; \quad \theta\theta^3 x_1 = \theta^4 x_1 \text{ etc.},$$

on aura une série de quantités,

(5) $$x_1, \ \theta x_1, \ \theta^2 x_1, \ \theta^3 x_1, \ \theta^4 x_1, \ \ldots,$$

qui toutes seront des racines de l'équation $\varphi x = 0$. La série (5) aura une infinité de termes; mais l'équation $\varphi x = 0$ n'ayant qu'un nombre fini de racines différentes, il faut que plusieurs quantités de la série (5) soient égales entre elles.

Supposons donc

$$\theta^m x_1 = \theta^{m+n} x_1,$$

ou bien

(6) $$\theta^n(\theta^m x_1) - \theta^m x_1 = 0,$$

en remarquant que $\theta^{m+n} x_1 = \theta^n \theta^m x_1$.

Le premier membre de l'équation (6) est une fonction rationnelle de $\theta^m x_1$; or cette quantité est une racine de l'équation $\varphi x = 0$, donc en vertu du théorème énoncé plus haut, on pourra mettre x_1 au lieu de $\theta^m x_1$. Cela donne

(7) $$\theta^n x_1 = x_1,$$

où l'on peut supposer que n ait la plus petite valeur possible, de sorte que toutes les quantités

(8) $$x_1, \ \theta x_1, \ \theta^2 x_1, \ \ldots \ \theta^{n-1} x_1$$

soient différentes entre elles.

L'équation (7) donnera

$$\theta^k \theta^n x_1 = \theta^k x_1, \quad \text{ou} \quad \theta^{n+k} x_1 = \theta^k x_1.$$

Cette formule fait voir qu'à partir du terme $\theta^{n-1} x_1$, les termes de la suite (8) se reproduiront dans le même ordre. Les n quantités (8) seront donc les seules de la série (5) qui soient différentes entre elles.

Cela posé, si $\mu > n$, soit x_2 une autre racine de l'équation proposée, qui n'est pas contenue dans la suite (8), il suit du théorème I que toutes les quantités

(9) $$x_2, \ \theta x_2, \ \theta^2 x_2, \ \ldots \ \theta^{n-1} x_2, \ \ldots$$

seront également des racines de l'équation proposée. Or je dis que cette

suite ne contiendra que n quantités différentes entre elles et des quantités (8). En effet, ayant $\theta^n x_1 - x_1 = 0$, on aura en vertu du théorème I, $\theta^n x_2 = x_2$, et par suite

$$\theta^{n+k} x_2 = \theta^k x_2.$$

Donc les seules quantités de la série (9) qui *puissent* être différentes entre elles, seront les n premières

(10) $$x_2,\ \theta x_2,\ \theta^2 x_2,\ \ldots\ \theta^{n-1} x_2.$$

Or celles-ci seront nécessairement différentes entre elles et des quantités (8). En effet, si l'on avait

$$\theta^m x_2 = \theta^\nu x_2,$$

où m et ν sont moindres que n, il en résulterait $\theta^m x_1 = \theta^\nu x_1$, ce qui est impossible, car toutes les quantités (8) sont différentes entre elles. Si au contraire on avait

$$\theta^m x_2 = \theta^\nu x_1,$$

il en résulterait

$$\theta^{n-m} \theta^\nu x_1 = \theta^{n-m} \theta^m x_2 = \theta^{n-m+m} x_2 = \theta^n x_2 = x_2,$$

donc

$$x_2 = \theta^{n-m+\nu} x_1,$$

c'est-à-dire que la racine x_2 serait contenue dans la série (8), ce qui est contre l'hypothèse.

Le nombre des racines contenues dans (8) et (10) est $2n$, donc μ sera ou égal à $2n$, ou plus grand que ce nombre.

Soit dans le dernier cas x_3 une racine différente des racines (8) et (10), on aura une nouvelle série de racines

$$x_3,\ \theta x_3,\ \theta^2 x_3,\ \ldots\ \theta^{n-1} x_3,\ \ldots,$$

et l'on démontrera, précisément de la même manière, que les n premières de ces racines sont différentes entre elles et des racines (8) et (10).

En continuant ce procédé jusqu'à ce que toutes les racines de l'équation $\varphi x = 0$ soient épuisées, on verra que les μ racines de cette équation seront partagées en plusieurs groupes, composés de n termes; donc μ sera divisible par n, et en nommant m le nombre des groupes, on aura

(11) $$\mu = m \cdot n.$$

Les racines elles-mêmes seront

$$(12)\quad \left\{\begin{array}{l} x_1,\ \theta x_1,\ \theta^2 x_1,\ \ldots\ \theta^{n-1}x_1, \\ x_2,\ \theta x_2,\ \theta^2 x_2,\ \ldots\ \theta^{n-1}x_2, \\ x_3,\ \theta x_3,\ \theta^2 x_3,\ \ldots\ \theta^{n-1}x_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_m,\ \theta x_m,\ \theta^2 x_m,\ \ldots\ \theta^{n-1}x_m. \end{array}\right.$$

Si $m=1$, on aura $n=\mu$, et les μ racines de l'équation $\varphi x=0$ seront exprimées par

$$(13)\qquad x_1,\ \theta x_1,\ \theta^2 x_1,\ \ldots\ \theta^{\mu-1}x_1.$$

Dans ce cas l'équation $\varphi x=0$ est résoluble algébriquement, comme on le verra dans la suite. Mais la même chose n'aura pas toujours lieu lorsque m est plus grand que l'unité. On pourra seulement réduire la résolution de l'équation $\varphi x=0$ à celle d'une équation du $n^{ième}$ degré, dont les coefficiens dépendront d'une équation du $m^{ième}$ degré; c'est ce que nous allons démontrer dans le paragraphe suivant.

§ 2.

Considérons un quelconque des groupes (12), par exemple le premier, et faisons

$$(14)\quad \left\{\begin{array}{l} (x-x_1)(x-\theta x_1)(x-\theta^2 x_1)\ldots(x-\theta^{n-1}x_1) \\ \qquad\qquad = x^n + A_1' x^{n-1} + A_1'' x^{n-2} + \cdots + A_1^{(n-1)}x + A_1^{(n)} = 0; \end{array}\right.$$

les racines de cette équation seront

$$x_1,\ \theta x_1,\ \theta^2 x_1,\ \ldots\ \theta^{n-1}x_1,$$

et les coefficiens $A_1',\ A_1'',\ \ldots\ A_1^{(n)}$ seront des fonctions rationnelles et symétriques de ces quantités. Nous allons voir qu'on peut faire dépendre la détermination de ces coefficiens de la résolution d'une seule équation du degré m.

Pour le montrer, considérons en général une fonction quelconque rationnelle et symétrique de $x_1,\ \theta x_1,\ \theta^2 x_1,\ \ldots\ \theta^{n-1}x_1$, et soit

$$(15)\qquad y_1 = f(x_1,\ \theta x_1,\ \theta^2 x_1,\ \ldots\ \theta^{n-1}x_1)$$

cette fonction.

En mettant au lieu de x_1 successivement $x_2,\ x_3,\ \ldots\ x_m$, la fonction y_1

prendra m valeurs différentes, que nous désignerons par $y_1, y_2, y_3, \ldots y_m$. Cela posé, si l'on forme une équation du degré m:

$$(16) \qquad y^m + p_1 y^{m-1} + p_2 y^{m-2} + \cdots + p_{m-1} y + p_m = 0,$$

dont les racines soient $y_1, y_2, y_3, \ldots y_m$, je dis que les coefficiens de cette équation pourront être exprimés rationnellement par les quantités connues, qu'on suppose contenues dans l'équation proposée.

Les quantités $\theta x_1, \theta^2 x_1, \ldots \theta^{n-1} x_1$ étant des fonctions rationnelles de x_1, la fonction y_1 le sera également. Soit

$$(17) \quad \begin{cases} y_1 = Fx_1, \\ \text{nous aurons aussi} \\ y_2 = Fx_2, \; y_3 = Fx_3, \; \ldots \; y_m = Fx_m. \end{cases}$$

En mettant dans l'équation (15) successivement $\theta x_1, \theta^2 x_1, \theta^3 x_1, \ldots \theta^{n-1} x_1$ au lieu de x_1, et en remarquant que $\theta^n x_1 = x_1$, $\theta^{n+1} x_1 = \theta x_1$, $\theta^{n+2} x_1 = \theta^2 x_1$ etc., il est clair que la fonction y_1 ne change pas de valeur; on aura donc

$$y_1 = Fx_1 = F(\theta x_1) = F(\theta^2 x_1) = \cdots = F(\theta^{n-1} x_1).$$

De même

$$y_2 = Fx_2 = F(\theta x_2) = F(\theta^2 x_2) = \cdots = F(\theta^{n-1} x_2),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y_m = Fx_m = F(\theta x_m) = F(\theta^2 x_m) = \cdots = F(\theta^{n-1} x_m).$$

En élevant chaque membre de ces équations à la $\nu^{\text{ième}}$ puissance, on en tire

$$(18) \quad \begin{cases} y_1^\nu = \frac{1}{n} \cdot [(Fx_1)^\nu + (F\theta x_1)^\nu + \cdots + (F\theta^{n-1} x_1)^\nu], \\ y_2^\nu = \frac{1}{n} \cdot [(Fx_2)^\nu + (F\theta x_2)^\nu + \cdots + (F\theta^{n-1} x_2)^\nu], \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m^\nu = \frac{1}{n} \cdot [(Fx_m)^\nu + (F\theta x_m)^\nu + \cdots + (F\theta^{n-1} x_m)^\nu]. \end{cases}$$

En ajoutant ces dernières équations, on aura la valeur de

$$y_1^\nu + y_2^\nu + y_3^\nu + \cdots + y_m^\nu$$

exprimée en fonction *rationnelle* et *symétrique* de toutes les racines de l'équation $\varphi x = 0$, savoir:

(19) $$y_1^\nu + y_2^\nu + y_3^\nu + \cdots + y_m^\nu = \frac{1}{n}\Sigma(Fx)^\nu.$$

Le second membre de cette équation peut être exprimé rationnellement par les coefficiens de φx et θx, c'est-à-dire par des quantités connues. Donc en faisant

(20) $$r_\nu = y_1^\nu + y_2^\nu + y_3^\nu + \cdots + y_m^\nu,$$

on aura la valeur de r_ν, pour une valeur quelconque entière de ν. Or, connaissant $r_1, r_2, \ldots r_m$, on en pourra tirer rationnellement la valeur de toute fonction symétrique des quantités $y_1, y_2, \ldots y_m$. On pourra donc trouver de cette manière tous les coefficiens de l'équation (16), et par conséquent déterminer toute fonction rationnelle et symétrique de $x_1, \theta x_1, \theta^2 x_1, \ldots \theta^{n-1} x_1$ à l'aide d'une équation du $m^{ième}$ degré. Donc on aura de cette manière les coefficiens de l'équation (14), dont la résolution donnera ensuite la valeur de x_1 etc.

On voit par là qu'on peut ramener la résolution de l'équation $\varphi x = 0$, qui est du degré $\mu = m.n$, à celle d'un certain nombre d'équations du degré m et n. Il suffit même, comme nous allons voir, de résoudre une seule équation du degré m, et m équations du degré n.

Soit ψx_1 l'un quelconque des coefficiens $A_1', A_1'', \ldots A_1^{(n)}$; faisons

(21) $$t_\nu = y_1^\nu.\psi x_1 + y_2^\nu.\psi x_2 + y_3^\nu.\psi x_3 + \cdots + y_m^\nu.\psi x_m.$$

Puisque $y_1^\nu \psi x_1$ est une fonction symétrique des quantités $x_1, \theta x_1, \ldots \theta^{n-1} x_1$, on aura, en remarquant que $\theta^n x_1 = x_1$, $\theta^{n+1} x_1 = \theta x_1$ etc.

$$y_1^\nu \psi x_1 = (Fx_1)^\nu.\psi x_1 = (F\theta x_1)^\nu.\psi\theta x_1 = \cdots = (F\theta^{n-1} x_1)^\nu.\psi\theta^{n-1} x_1,$$

donc:

$$y_1^\nu \psi x_1 = \frac{1}{n}\cdot[(Fx_1)^\nu \psi x_1 + (F\theta x_1)^\nu \psi\theta x_1 + \cdots + (F\theta^{n-1} x_1)^\nu \psi\theta^{n-1} x_1].$$

On aura de semblables expressions pour $y_2^\nu \psi x_2, y_3^\nu \psi x_3, \ldots y_m^\nu \psi x_m$, en mettant $x_2, x_3, \ldots x_m$ à la place de x_1. En substituant ces valeurs, on voit que t_ν deviendra une fonction *rationnelle* et *symétrique* de toutes les racines de l'équation $\varphi x = 0$. En effet, on aura

(22) $$t_\nu = \frac{1}{n}\Sigma(Fx)^\nu \psi x.$$

Donc on peut exprimer t_ν rationnellement par des quantités connues.

Cela posé, en faisant $\nu = 0, 1, 2, 3, \ldots m-1$, la formule (21) donnera

$$\begin{aligned}
\psi x_1 + \psi x_2 + \cdots + \psi x_m &= t_0, \\
y_1 \psi x_1 + y_2 \psi x_2 + \cdots + y_m \psi x_m &= t_1, \\
y_1^2 \psi x_1 + y_2^2 \psi x_2 + \cdots + y_m^2 \psi x_m &= t_2, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
y_1^{m-1} \psi x_1 + y_2^{m-1} \psi x_2 + \cdots + y_m^{m-1} \psi x_m &= t_{m-1}.
\end{aligned}$$

On tirera aisément de ces équations, linéaires par rapport à $\psi x_1, \psi x_2, \ldots \psi x_m$, les valeurs de ces quantités en fonction rationnelle de $y_1, y_2, y_3, \ldots y_m$. En effet, en faisant

$$(23) \quad (y-y_2)(y-y_3)\ldots(y-y_m) = y^{m-1} + R_{m-2}y^{m-2} + R_{m-3}y^{m-3} + \cdots + R_1 y + R_0,$$

on aura

$$(24) \quad \psi x_1 = \frac{t_0 R_0 + t_1 R_1 + t_2 R_2 + \cdots + t_{m-2} R_{m-2} + t_{m-1}}{R_0 + R_1 y_1 + R_2 y_1^2 + \cdots + R_{m-2} y_1^{m-2} + y_1^{m-1}}.$$

Les quantités $R_0, R_1, \ldots R_{m-2}$ sont des fonctions rationnelles de $y_2, y_3, y_4, \ldots y_m$, mais on peut les exprimer par y_1 seul. En effet, en multipliant l'équation (23) par $y - y_1$, on aura

$$\begin{aligned}
(y-y_1)(y-y_2)\ldots(y-y_m) &= y^m + p_1 y^{m-1} + p_2 y^{m-2} + \cdots + p_{m-1} y + p_m \\
&= y^m + (R_{m-2} - y_1) y^{m-1} + (R_{m-3} - y_1 R_{m-2}) y^{m-2} + \cdots,
\end{aligned}$$

d'où l'on tirera, en comparant les puissances égales de y:

$$(25) \quad \left\{\begin{aligned}
R_{m-2} &= y_1 + p_1, \\
R_{m-3} &= y_1 R_{m-2} + p_2 = y_1^2 + p_1 y_1 + p_2, \\
R_{m-4} &= y_1 R_{m-3} + p_3 = y_1^3 + p_1 y_1^2 + p_2 y_1 + p_3, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
R_0 &= y_1^{m-1} + p_1 y_1^{m-2} + p_2 y_1^{m-3} + \cdots + p_{m-1}.
\end{aligned}\right.$$

En substituant ces valeurs, l'expression de ψx_1 deviendra une fonction rationnelle de y_1 et de quantités connues, et l'on voit qu'il est toujours possible de trouver ψx_1 de cette manière, à condition que le dénominateur

$$R_0 + R_1 y_1 + R_2 y_1^2 + \cdots + R_{m-2} y_1^{m-2} + y_1^{m-1}$$

ne sera pas zéro. Or on peut donner à la fonction y_1 une infinité de formes qui rendront impossible cette équation. Par exemple en faisant

$$(26) \qquad y_1 = (\alpha - x_1)(\alpha - \theta x_1)(\alpha - \theta^2 x_1) \cdots (\alpha - \theta^{n-1} x_1),$$

où α est une indéterminée, le dénominateur dont il s'agit ne peut pas s'évanouir. En effet ce dénominateur étant la même chose que

$$(y_1 - y_2)(y_1 - y_3) \ldots (y_1 - y_m),$$

on aurait, dans le cas où il etait nul,

$$y_1 = y_k,$$

c'est-à-dire

$$(\alpha - x_1)(\alpha - \theta x_1) \ldots (\alpha - \theta^{n-1} x_1) = (\alpha - x_k)(\alpha - \theta x_k) \ldots (\alpha - \theta^{n-1} x_k),$$

ce qui est impossible, car toutes les racines $x_1, \theta x_1, \theta^2 x_1, \ldots \theta^{n-1} x_1$ sont différentes de celles-ci: $x_k, \theta x_k, \theta^2 x_k, \ldots \theta^{n-1} x_k$.

Les coefficiens $A_1', A_1'', \ldots A_1^{(n)}$ peuvent donc s'exprimer rationnellement par une même fonction y_1, dont la détermination dépend d'une équation du degré m.

Les racines de l'équation (14) sont

$$x_1, \theta x_1, \theta^2 x_1 \ldots \theta^{n-1} x_1.$$

En remplaçant dans les coefficiens A_1', A_1'' etc. y_1 par $y_2, y_3, \ldots y_m$, on obtiendra $m-1$ autres équations, dont les racines seront respectivement:

$$x_2, \theta x_2, \ldots \theta^{n-1} x_2;$$
$$x_3, \theta x_3, \ldots \theta^{n-1} x_3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_m, \theta x_m, \ldots \theta^{n-1} x_m.$$

Théorème II. L'équation proposée $\varphi x = 0$ peut donc être décomposée en m équations du degré n, dont les coefficiens sont respectivement des fonctions rationnelles d'une même racine d'une seule équation du degré m.

Cette dernière équation n'est pas généralement résoluble algébriquement quand elle passe le quatrième degré, mais l'équation (14) et les autres semblables le sont toujours, en supposant connus les coefficiens A_1', A_1'' etc., comme nous le verrons dans le paragraphe suivant.

§ 3.

Dans le paragraphe précédent nous avons considéré le cas où m est plus grand que l'unité. Maintenant nous allons nous occuper du cas où $m=1$. Dans ce cas on aura $\mu=n$, et les racines de l'équation $\varphi x=0$ seront

(27) $$x_1,\ \theta x_1,\ \theta^2 x_1,\ \dots\ \theta^{\mu-1} x_1.$$

Je dis que toute équation dont les racines peuvent être exprimées de cette manière est résoluble algébriquement.

Soit α une racine quelconque de l'équation $\alpha^\mu-1=0$, et faisons

(28) $$\psi x=(x+\alpha\theta x+\alpha^2\theta^2 x+\alpha^3\theta^3 x+\dots+\alpha^{\mu-1}\theta^{\mu-1}x)^\mu,$$

ψx sera une fonction rationnelle de x. Or cette fonction peut s'exprimer rationnellement par les coefficiens de φx et θx. En mettant $\theta^m x$ au lieu de x, on aura

$$\psi\theta^m x=(\theta^m x+\alpha\theta^{m+1}x+\dots+\alpha^{\mu-m}\theta^\mu x+\alpha^{\mu-m+1}\theta^{\mu+1}x+\dots+\alpha^{\mu-1}\theta^{\mu+m-1}x)^\mu;$$

maintenant on a

$$\theta^\mu x=x,\ \theta^{\mu+1}x=\theta x,\ \dots\ \theta^{\mu+m-1}x=\theta^{m-1}x,$$

donc

$$\psi\theta^m x=$$
$$(\alpha^{\mu-m}x+\alpha^{\mu-m+1}\theta x+\dots+\alpha^{\mu-1}\theta^{m-1}x+\theta^m x+\alpha\theta^{m+1}x+\dots+\alpha^{\mu-m-1}\theta^{\mu-1}x)^\mu.$$

Or $\alpha^\mu=1$, donc

$$\psi\theta^m x=[\alpha^{\mu-m}(x+\alpha\theta x+\alpha^2\theta^2 x+\dots+\alpha^{\mu-1}\theta^{\mu-1}x)]^\mu$$
$$=\alpha^{\mu(\mu-m)}(x+\alpha\theta x+\dots+\alpha^{\mu-1}\theta^{\mu-1}x)^\mu,$$

donc, puisque $\alpha^{\mu(\mu-m)}=1$, on voit que

$$\psi\theta^m x=\psi x.$$

En faisant $m=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \dots\ \mu-1$, et en ajoutant ensuite, on trouvera

(29) $$\psi x=\frac{1}{\mu}(\psi x+\psi\theta x+\psi\theta^2 x+\dots+\psi\theta^{\mu-1}x).$$

ψx sera donc une fonction rationnelle et symétrique de toutes les racines de l'équation $\varphi x=0$, et par conséquent on pourra l'exprimer rationnellement par des quantités connues.

Soit $\psi x = v$, on tire de l'équation (28)

$$\sqrt[\mu]{v} = x + \alpha\theta x + \alpha^2\theta^2 x + \cdots + \alpha^{\mu-1}\theta^{\mu-1}x. \tag{30}$$

Cela posé, désignons les μ racines de l'équation

$$\alpha^\mu - 1 = 0$$

par

$$1,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \ldots\ \alpha_{\mu-1}, \tag{31}$$

et les valeurs correspondantes de v par

$$v_0,\ v_1,\ v_2,\ v_3,\ \ldots\ v_{\mu-1}, \tag{32}$$

l'équation (30) donnera, en mettant à la place de α successivement 1, α_1, α_2, α_3, ... $\alpha_{\mu-1}$:

$$(33)\quad \left\{\begin{array}{l} \sqrt[\mu]{v_0} = x + \theta x + \theta^2 x + \cdots + \theta^{\mu-1}x, \\ \sqrt[\mu]{v_1} = x + \alpha_1\theta x + \alpha_1^2\theta^2 x + \cdots + \alpha_1^{\mu-1}\theta^{\mu-1}x, \\ \sqrt[\mu]{v_2} = x + \alpha_2\theta x + \alpha_2^2\theta^2 x + \cdots + \alpha_2^{\mu-1}\theta^{\mu-1}x, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sqrt[\mu]{v_{\mu-1}} = x + \alpha_{\mu-1}\theta x + \alpha_{\mu-1}^2\theta^2 x + \cdots + \alpha_{\mu-1}^{\mu-1}\theta^{\mu-1}x. \end{array}\right.$$

En ajoutant ces équations on aura

$$x = \frac{1}{\mu}\left[-A + \sqrt[\mu]{v_1} + \sqrt[\mu]{v_2} + \sqrt[\mu]{v_3} + \cdots + \sqrt[\mu]{v_{\mu-1}}\right], \tag{34}$$

où l'on a remplacé $\sqrt[\mu]{v_0}$, qui est une quantité constante, par $-A$.

On connaît par là la racine x. Généralement on trouve la racine $\theta^m x$ en multipliant la première des équations (33) par 1, la seconde par α_1^{-m}, la troisième par α_2^{-m} etc., et en ajoutant; il viendra alors

$$\theta^m x = \frac{1}{\mu}\left[-A + \alpha_1^{-m}.\sqrt[\mu]{v_1} + \alpha_2^{-m}.\sqrt[\mu]{v_2} + \cdots + \alpha_{\mu-1}^{-m}.\sqrt[\mu]{v_{\mu-1}}\right]. \tag{35}$$

En donnant à m les valeurs $0, 1, 2, \ldots \mu-1$, on aura la valeur de toutes les racines de l'équation.

L'expression précédente des racines contient généralement $\mu - 1$ radicaux différens de la forme $\sqrt[\mu]{v}$. Elle aura donc $\mu^{\mu-1}$ valeurs, tandis que la

racine de l'équation $\varphi x = 0$ n'en a que μ. Mais on peut donner à l'expression des racines une autre forme, qui n'est pas sujette à cette difficulté. En effet, lorsque la valeur de $\sqrt[\mu]{v_1}$ est fixée, celle des autres radicaux le sera également, comme nous allons le voir.

Quel que soit le nombre μ, premier ou non, on peut toujours trouver une racine α de l'équation $\alpha^\mu - 1 = 0$, telle que les racines

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \ldots\ \alpha_{\mu-1}$$

puissent être représentées par

(36) $$\alpha,\ \alpha^2,\ \alpha^3,\ \ldots\ \alpha^{\mu-1}.$$

Cela posé, on aura

(37) $$\begin{cases} \sqrt[\mu]{v_k} = x + \alpha^k . \theta x + \alpha^{2k} \theta^2 x + \cdots + \alpha^{(\mu-1)k} . \theta^{\mu-1} x, \\ \sqrt[\mu]{v_1} = x + \alpha . \theta x + \alpha^2 \theta^2 x + \cdots + \alpha^{\mu-1} . \theta^{\mu-1} x, \end{cases}$$

d'où l'on tire

(38) $$\begin{cases} \sqrt[\mu]{v_k} . (\sqrt[\mu]{v_1})^{\mu-k} = (x + \alpha^k \theta x + \alpha^{2k} \theta^2 x + \cdots + \alpha^{(\mu-1)k} \theta^{\mu-1} x) \\ \qquad \times (x + \alpha \theta x + \alpha^2 \theta^2 x + \cdots + \alpha^{\mu-1} \theta^{\mu-1} x)^{\mu-k}. \end{cases}$$

Le second membre de cette équation est une fonction rationnelle de x, qui ne changera pas de valeur en mettant au lieu de x une autre racine quelconque $\theta^m x$, comme on le verra aisément, en faisant cette substitution et en ayant égard à l'équation $\theta^{\mu+\nu} x = \theta^\nu x$. En désignant donc la fonction dont il s'agit par ψx, on aura

$$\sqrt[\mu]{v_k} . (\sqrt[\mu]{v_1})^{\mu-k} = \psi x = \psi \theta x = \psi \theta^2 x = \cdots = \psi \theta^{\mu-1} x,$$

d'où

(39) $$\sqrt[\mu]{v_k} . (\sqrt[\mu]{v_1})^{\mu-k} = \frac{1}{\mu} (\psi x + \psi \theta x + \psi \theta^2 x + \cdots + \psi \theta^{\mu-1} x).$$

Le second membre de cette équation est une fonction rationnelle et symétrique des racines, donc on peut l'exprimer en quantités connues. En le désignant par a_k, on aura

(40) $$\sqrt[\mu]{v_k} (\sqrt[\mu]{v_1})^{\mu-k} = a_k,$$

d'où

$$(41) \qquad \sqrt[\mu]{v_k} = \frac{a_k}{v_1} (\sqrt[\mu]{v_1})^k.$$

A l'aide de cette formule l'expression de la racine x deviendra

$$(42) \quad x = \frac{1}{\mu} \left(-A + \sqrt[\mu]{v_1} + \frac{a_2}{v_1} (\sqrt[\mu]{v_1})^2 + \frac{a_3}{v_1} (\sqrt[\mu]{v_1})^3 + \cdots + \frac{a_{\mu-1}}{v_1} (\sqrt[\mu]{v_1})^{\mu-1} \right).$$

Cette expression de x n'a que μ valeurs différentes, qu'on obtiendra en mettant au lieu de $\sqrt[\mu]{v_1}$ les μ valeurs:

$$\sqrt[\mu]{v_1}, \ \alpha \sqrt[\mu]{v_1}, \ \alpha^2 \sqrt[\mu]{v_1}, \ \ldots \ \alpha^{\mu-1} \sqrt[\mu]{v_1}.$$

La méthode que nous avons suivie précédemment pour résoudre l'équation $\varphi x = 0$ est au fond la même que celle dont s'est servi M. *Gauss* dans ses „Disquisitiones arithmeticae" art. 359 et suiv. pour résoudre une certaine classe d'équations, auxquelles il était parvenu dans ses recherches sur l'équation $x^n - 1 = 0$. Ces équations ont la même propriété que notre équation $\varphi x = 0$; savoir que toutes ses racines peuvent être représentées par

$$x, \ \theta x, \ \theta^2 x, \ \ldots \ \theta^{\mu-1} x,$$

θx étant une fonction rationnelle.

En vertu de ce qui précède nous pourrons énoncer le théorème suivant:

Théorème III. Si les racines d'une équation algébrique peuvent être représentées par

$$x, \ \theta x, \ \theta^2 x, \ \ldots \ \theta^{\mu-1} x,$$

où $\theta^\mu x = x$, et où θx désigne une fonction rationnelle de x et de quantités connues, cette équation sera toujours résoluble algébriquement.

On en tire le suivant, comme corollaire:

Théorème IV. Si deux racines d'une équation *irréductible*, dont le degré est un nombre *premier*, sont tellement liées entre elles, qu'on puisse exprimer l'une *rationnellement* par l'autre, cette équation sera résoluble algébriquement.

En effet cela suit immédiatement de l'équation (11)

$$\mu = m \,.\, n;$$

car on doit avoir $m = 1$, si μ est un nombre premier; et par conséquent les racines s'expriment par $x, \ \theta x, \ \theta^2 x, \ \ldots \ \theta^{\mu-1} x$.

Dans le cas où toutes les quantités connues de φx et θx sont *réelles*, les racines de l'équation $\varphi x = 0$ jouiront d'une propriété remarquable, que nous allons démontrer.

Par ce qui précède on voit que $a_{\mu-1}$ peut être exprimée rationnellement par les coefficiens de φx et θx, et par α. Donc si ces coefficiens sont réels, $a_{\mu-1}$ doit avoir la forme

$$a_{\mu-1} = a + b\sqrt{-1},$$

où $\sqrt{-1}$ n'entre qu'à cause de la quantité α, qui en général est imaginaire, et qui généralement peut avoir la valeur

$$\alpha = \cos\frac{2\pi}{\mu} + \sqrt{-1}\,.\,\sin\frac{2\pi}{\mu}.$$

En changeant donc dans α le signe de $\sqrt{-1}$ et désignant par $a'_{\mu-1}$ la valeur correspondante de $a_{\mu-1}$, on aura

$$a'_{\mu-1} = a - b\sqrt{-1}.$$

Or d'après la formule (40), il est évident que $a'_{\mu-1} = a_{\mu-1}$; donc $b = 0$ et

(43) $$a_{\mu-1} = a.$$

Donc $a_{\mu-1}$ a toujours une valeur réelle. On démontrera de la même manière que

$$v_1 = c + d\sqrt{-1} \quad \text{et} \quad v_{\mu-1} = c - d\sqrt{-1},$$

où c et d sont réels.

Donc

$$v_1 + v_{\mu-1} = 2c,$$
$$v_1 v_{\mu-1} = a^\mu.$$

De là on tire

(44) $$v_1 = c + \sqrt{-1}\,.\,\sqrt{a^\mu - c^2},$$

et par suite $\sqrt{a^\mu - c^2} = d$; d'où l'on voit que $\sqrt{a^\mu - c^2}$ a toujours une valeur réelle.

Cela posé, on peut faire

(45) $$c = (\sqrt{\varrho})^\mu \cos\delta, \quad \sqrt{a^\mu - c^2} = (\sqrt{\varrho})^\mu \sin\delta,$$

où ϱ est une quantité positive.

On en tire

$$c^2 + (\sqrt{a^\mu - c^2})^2 = (\sqrt{\varrho})^{2\mu},$$

c'est-à-dire:

(46) $$a^{\mu} = \varrho^{\mu};$$

par conséquent ϱ sera égal à la valeur numérique de a. On voit en outre que a est toujours positif, si μ est un nombre impair.

Connaissant ϱ et δ, on aura

$$v_1 = (\sqrt{\varrho})^{\mu} . (\cos\delta + \sqrt{-1} . \sin\delta)$$

et par suite

$$\sqrt[\mu]{v_1} = \sqrt{\varrho} . \left[\cos\left(\frac{\delta + 2m\pi}{\mu}\right) + \sqrt{-1} . \sin\left(\frac{\delta + 2m\pi}{\mu}\right)\right].$$

En substituant cette valeur de $\sqrt[\mu]{v_1}$ dans l'expression de x (42), elle prendra la forme:

(47) $$x = \frac{1}{\mu}\left[-A + \sqrt{\varrho} . \left(\cos\frac{\delta + 2m\pi}{\mu} + \sqrt{-1} . \sin\frac{\delta + 2m\pi}{\mu}\right)\right.$$
$$+ (f + g\sqrt{-1})\left(\cos\frac{2(\delta + 2m\pi)}{\mu} + \sqrt{-1} . \sin\frac{2(\delta + 2m\pi)}{\mu}\right)$$
$$+ (F + G\sqrt{-1})\sqrt{\varrho} . \left(\cos\frac{3(\delta + 2m\pi)}{\mu} + \sqrt{-1} . \sin\frac{3(\delta + 2m\pi)}{\mu}\right)$$
$$+ (f_1 + g_1\sqrt{-1})\left(\cos\frac{4(\delta + 2m\pi)}{\mu} + \sqrt{-1} . \sin\frac{4(\delta + 2m\pi)}{\mu}\right)$$
$$\left. + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \right],$$

où ϱ, A, f, g, F, G etc., sont des fonctions rationnelles de $\cos\frac{2\pi}{\mu}$, $\sin\frac{2\pi}{\mu}$ et des coefficiens de φx et θx. On aura toutes les racines, en donnant à m les valeurs 0, 1, 2, 3, . . . $\mu - 1$.

L'expression précédente de x fournit ce résultat:

Théorème V. Pour résoudre l'équation $\varphi x = 0$, il suffit:

1) de diviser la circonférence entière du cercle en μ parties égales,
2) de diviser un angle δ, qu'on peut construire ensuite, en μ parties égales,
3) d'extraire la racine carrée d'une seule quantité ϱ.

Ce théorème n'est que l'extension d'un théorème semblable, que M. *Gauss* donne sans démonstration dans l'ouvrage cité plus haut, art. 360.

Il est encore à remarquer que les racines de l'équation $\varphi x = 0$ sont

ou toutes réelles ou toutes imaginaires. En effet si une racine x est réelle, les autres le sont également, comme le font voir les expressions

$$\theta x, \ \theta^2 x, \ \dots \ \theta^{\mu-1} x,$$

qui ne contiennent que des quantités réelles. Si au contraire x est imaginaire, les autres racines le sont aussi, car si par exemple $\theta^m x$ était réelle, $\theta^{\mu-m}(\theta^m x) = \theta^\mu x = x$, le serait également, contre l'hypothèse. Dans le premier cas a sera positif et dans le second négatif. Si μ est un nombre impair, toutes les racines seront réelles.

La méthode que nous avons donnée dans ce paragraphe, pour résoudre l'équation $\varphi x = 0$, est applicable dans tous les cas, le nombre μ étant premier ou non; mais si μ est un nombre composé, il existe encore une autre méthode qui donne lieu à quelques simplifications et que nous allons exposer en peu de mots.

Soit $\mu = m.n$, les racines

$$x, \ \theta x, \ \theta^2 x, \ \dots \ \theta^{\mu-1} x$$

pourront être groupées de la manière suivante:

$$\begin{array}{lllll} x, & \theta^m x, & \theta^{2m} x, & \dots & \theta^{(n-1)m} x, \\ \theta x, & \theta^{m+1} x, & \theta^{2m+1} x, & \dots & \theta^{(n-1)m+1} x, \\ \theta^2 x, & \theta^{m+2} x, & \theta^{2m+2} x, & \dots & \theta^{(n-1)m+2} x, \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \theta^{m-1} x, & \theta^{2m-1} x, & \theta^{3m-1} x, & \dots & \theta^{mn-1} x. \end{array}$$

En faisant pour abréger:

(48) $$\theta^m x = \theta_1 x,$$

(49) $$x = x_1, \ \theta x = x_2, \ \theta^2 x = x_3, \ \dots \ \theta^{m-1} x = x_m,$$

on peut écrire les racines comme il suit:

(50) $$\left\{ \begin{array}{ll} 1') & x_1, \ \theta_1 x_1, \ \theta_1^2 x_1, \ \dots \ \theta_1^{n-1} x_1, \\ 2') & x_2, \ \theta_1 x_2, \ \theta_1^2 x_2, \ \dots \ \theta_1^{n-1} x_2, \\ & \dots \\ m') & x_m, \ \theta_1 x_m, \ \theta_1^2 x_m, \ \dots \ \theta_1^{n-1} x_m, \end{array} \right.$$

Donc en vertu de ce qu'on a vu (§ 2) on peut décomposer l'équation $\varphi x = 0$, qui est du degré $m.n$, en m équations du degré n, dont les coef-

ficiens dépendront d'une équation du degré m. Les racines de ces m équations seront respectivement les racines $1', 2', \ldots m'$.

Si n est un nombre composé $m_1 n_1$, on peut décomposer de la même manière chacune des équations du degré n en m_1 équations du degré n_1, dont les coefficiens dépendront d'une équation du degré m_1. Si n_1 est encore un nombre composé, on peut continuer la décomposition de la même manière.

Théorème VI. En général, si l'on suppose

$$\mu = m_1 . m_2 . m_3 \ldots m_n, \tag{51}$$

la résolution de l'équation proposée $\varphi x = 0$ sera ramenée à celle de n équations des degrés

$$m_1, \; m_2, \; m_3, \; \ldots \; m_n.$$

Il suffit même de connaître une seule racine de chacune de ces équations, car si l'on connaît une racine de l'équation proposée, on aura toutes les autres racines, exprimées en fonctions rationnelles de celle-ci.

La méthode précédente est au fond la même que celle donnée par M. *Gauss* pour la réduction de l'équation à deux termes, $x^\mu - 1 = 0$.

Pour faire voir plus clairement la décomposition précédente de l'équation $\varphi x = 0$ en d'autres de degrés moins élevés, supposons par exemple $\mu = 30 = 5.3.2$.

Dans ce cas les racines seront

$$x, \; \theta x, \; \theta^2 x, \; \ldots \; \theta^{29} x.$$

Nous formerons d'abord une équation du 6ième degré, dont les racines seront

$$x, \; \theta^5 x, \; \theta^{10} x, \; \theta^{15} x, \; \theta^{20} x, \; \theta^{25} x.$$

Soit $R = 0$ cette équation, on peut déterminer ses coefficiens, rationnellement, par une même quantité y, qui sera racine d'une équation du cinquième degré: $P = 0$.

Le degré de l'équation $R = 0$ étant lui-même un nombre composé, nous formerons une équation du 3ième degré: $R_1 = 0$, dont les racines seront

$$x, \; \theta^{10} x, \; \theta^{20} x,$$

et dont les coefficiens sont des fonctions rationnelles de y, et d'une même quantité z, qui est racine d'une équation du second degré $P_1 = 0$, dans laquelle les coefficiens sont exprimés rationnellement par y.



Voici le tableau des opérations:

$$x^3 + f(y,z).x^2 + f_1(y,z).x + f_2(y,z) = 0,$$
$$z^2 + fy.z + f_1 y = 0,$$
$$y^5 + A_1.y^4 + A_2.y^3 + A_3.y^2 + A_4.y + A_5 = 0.$$

On peut aussi commencer par une équation du $2^{\text{ième}}$ degré en x, ou bien par une équation du $5^{\text{ième}}$ degré.

Reprenons l'équation générale $\varphi x = 0$. En supposant $\mu = m.n$, on peut faire

(52) $$x^n + fy.x^{n-1} + f_1 y.x^{n-2} + \dots = 0,$$

où y est déterminé par une équation du $m^{\text{ième}}$ degré:

(53) $$y^m + A.y^{m-1} + \dots = 0,$$

dont tous les coefficiens sont exprimés rationnellement en quantités connues.

Cela posé, soient

(54) $$\begin{cases} \mu = m_1.m_2.m_3 \dots m_\omega \\ \text{et} \\ \mu = m_1 n_1, \ \mu = m_2 n_2; \ \dots \ \mu = m_\omega n_\omega, \end{cases}$$

plusieurs manières de décomposer le nombre μ en deux facteurs, on pourra décomposer l'équation proposée $\varphi x = 0$ en deux autres des ω manières suivantes:

(1) $F_1(x, y_1) = 0$, dont les racines seront x, $\theta^{m_1}x$, $\theta^{2m_1}x$, ... $\theta^{(n_1-1)m_1}x$ et les coefficiens des fonctions rationnelles d'une quantité y_1, racine d'une équation $f_1 y_1 = 0$, du degré m_1.

(2) $F_2(x, y_2) = 0$, dont les racines seront x, $\theta^{m_2}x$, $\theta^{2m_2}x$, ... $\theta^{(n_2-1)m_2}x$ et les coefficiens des fonctions rationnelles d'une même quantité y_2, racine d'une équation $f_2 y_2 = 0$, du degré m_2.

. . . .

(ω) $F_\omega(x, y_\omega) = 0$, dont les racines seront x, $\theta^{m_\omega}x$, $\theta^{2m_\omega}x$, ... $\theta^{(n_\omega-1)m_\omega}x$ et les coefficiens des fonctions rationnelles d'une même quantité y_ω, racine d'une équation $f_\omega y_\omega = 0$, du degré m_ω.

Supposons maintenant que $m_1, m_2, \dots m_\omega$ pris deux à deux, soient premiers entre eux, je dis qu'on pourra exprimer la valeur de x rationnelle-

ment par les quantités $y_1, y_2, y_3, \ldots y_\omega$. En effet, si $m_1, m_2, \ldots m_\omega$ sont premiers entre eux, il est clair qu'il n'y a qu'une seule racine qui satisfasse à la fois à toutes les équations

$$(55) \qquad F_1(x, y_1) = 0,\ F_2(x, y_2) = 0,\ \ldots\ F_\omega(x, y_\omega) = 0;$$

savoir la racine x. Donc, suivant un théorème connu, on peut exprimer x rationnellement par les coefficiens de ces équations et conséquemment par les quantités $y_1, y_2, \ldots y_\omega$.

La résolution de l'équation proposée est donc ramenée à celle de ω équations: $f_1 y_1 = 0$; $f_2 y_2 = 0$; $\ldots f_\omega y_\omega = 0$, qui sont respectivement des degrés: $m_1, m_2, \ldots m_\omega$, et dont les coefficiens sont des fonctions rationnelles des coefficiens de φx et θx.

Si l'on veut que les équations

$$(56) \qquad f_1 y_1 = 0,\ f_2 y_2 = 0,\ \ldots\ f_\omega y_\omega = 0$$

soient les moins élevées possibles, il faut choisir $m_1, m_2, \ldots m_\omega$ tels, que ces nombres soient des puissances de nombres premiers. Par exemple si l'équation proposée $\varphi x = 0$ est du degré

$$(57) \qquad \mu = \varepsilon_1^{\nu_1} . \varepsilon_2^{\nu_2} \ldots \varepsilon_\omega^{\nu_\omega},$$

où $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_\omega$ sont des nombres premiers différens, on aura

$$(58) \qquad m_1 = \varepsilon_1^{\nu_1},\ \ m_2 = \varepsilon_2^{\nu_2},\ \ldots\ m_\omega = \varepsilon_\omega^{\nu_\omega}.$$

L'équation proposée étant résoluble algébriquement, les équations (56) le seront aussi; car les racines de ces équations sont des fonctions rationnelles de x. On peut aisément les résoudre de la manière suivante.

La quantité y est une fonction rationnelle et symétrique des racines de l'équation (52), c'est-à-dire de

$$(59) \qquad x,\ \theta^m x,\ \theta^{2m} x,\ \ldots\ \theta^{(n-1)m} x.$$

Soit

$$(60) \qquad y = Fx = f(x,\ \theta^m x,\ \theta^{2m} x,\ \ldots\ \theta^{(n-1)m} x),$$

les racines de l'équation (53) seront

$$(61) \qquad Fx;\ F(\theta x);\ F(\theta^2 x);\ \ldots\ F(\theta^{m-1} x);$$

or je dis que l'on peut exprimer ces racines de la manière suivante:

$$(62) \qquad y,\ \lambda y,\ \lambda^2 y,\ \ldots\ \lambda^{m-1} y,$$

où λy est une fonction rationnelle de y et de quantités connues.

On aura

(63) $$F(\theta x) = f[\theta x,\ \theta(\theta^m x),\ \theta(\theta^{2m} x),\ \dots\ \theta(\theta^{(n-1)m} x)],$$

donc $F(\theta x)$ sera, ainsi que Fx, une fonction rationnelle et symétrique des racines x, $\theta^m x$, ... $\theta^{(n-1)m} x$, donc on peut, par le procédé trouvé (24) exprimer $F(\theta x)$ rationnellement par Fx. Soit donc

$$F\theta x = \lambda F x = \lambda y,$$

on aura, en remplaçant (en vertu du théorème I) x par θx, $\theta^2 x$, ... $\theta^{m-1} x$,

$$F\theta^2 x = \lambda F\theta x = \lambda^2 y,$$
$$F\theta^3 x = \lambda F\theta^2 x = \lambda^3 y,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$F\theta^{m-1} x = \lambda F\theta^{m-2} x = \lambda^{m-1} y,$$

c. q. f. d.

Maintenant les racines de l'équation (53) pouvant être représentées par

$$y,\ \lambda y,\ \lambda^2 y,\ \dots\ \lambda^{m-1} y,$$

on peut résoudre algébriquement cette équation de la même manière que l'équation $\varphi x = 0$. (Voyez le théorème III).

Si m est une puissance d'un nombre premier, $m = \varepsilon^\nu$, on peut encore déterminer y à l'aide de ν équations du degré ε. (Voyez le théorème VI).

Si dans le théorème VI on suppose que μ soit une puissance de 2, on aura, comme corollaire, le théorème suivant:

Théorème VII. Si les racines d'une équation du degré 2^ω peuvent être représentées par

$$x,\ \theta x,\ \theta^2 x,\ \dots\ \theta^{2^\omega - 1} x, \text{ où } \theta^{2^\omega} x = x,$$

cette équation pourra être résolue à l'aide de l'extraction de ω racines carrées.

Ce théorème, appliqué à l'équation $\frac{x^{1+2^\omega} - 1}{x - 1} = 0$, où $1 + 2^\omega$ est un nombre premier, donne le théorème de M. *Gauss* pour le cercle.

§ 4.

Des équations dont toutes les racines peuvent être exprimées rationnellement par l'une d'entre elles.

Nous avons vu précédemment (théorème III) qu'une équation d'un degré quelconque, dont les racines peuvent être exprimées par

$$x,\ \theta x,\ \theta^2 x,\ \dots\ \theta^{\mu-1}x$$

est toujours résoluble algébriquement. Dans ce cas toutes les racines sont exprimées rationnellement par l'une d'entre elles; mais une équation dont les racines ont cette propriété, n'est pas toujours résoluble algébriquement; néanmoins, hors le cas considéré précédemment, il y a encore un autre, dans lequel cela a lieu. On aura le théorème suivant:

Théorème VIII. Soit $\chi x = 0$ une équation algébrique quelconque dont toutes les racines peuvent être exprimées rationnellement par l'une d'entre elles, que nous désignerons par x. Soient θx et $\theta_1 x$ deux autres racines quelconques, l'équation proposée séra résoluble algébriquement, si l'on a $\theta\theta_1 x = \theta_1\theta x$.

La démonstration de ce théorème peut être réduite sur le champ à la théorie exposée § 2, comme nous allons le voir.

Si l'on connaît la racine x, on en aura en même temps toutes les autres; il suffit donc de chercher la valeur de x.

Si l'équation

(64) $$\chi x = 0$$

n'est pas irréductible, soit

(65) $$\varphi x = 0$$

l'équation la moins élevée à laquelle puisse satisfaire la racine x, les coefficiens de cette équation ne contenant que des quantités connues. Alors les racines de l'équation $\varphi x = 0$ se trouveront parmi celles de l'équation $\chi x = 0$ (voyez le premier théorème), et par conséquent elles pourront s'exprimer rationnellement par l'une d'entre elles.

Cela posé, soit θx une racine différente de x; en vertu de ce qu'on a vu dans le premier paragraphe, les racines de l'équation $\varphi x = 0$ pourront être exprimées comme il suit:



$$\begin{array}{lllll} x, & \theta x, & \theta^2 x, & \ldots & \theta^{n-1} x, \\ x_1, & \theta x_1, & \theta^2 x_1, & \ldots & \theta^{n-1} x_1, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{m-1}, & \theta x_{m-1}, & \theta^2 x_{m-1}, & \ldots & \theta^{n-1} x_{m-1}, \end{array}$$

et en formant l'équation

$$(66) \qquad x^n + A' x^{n-1} + A'' x^{n-2} + A''' x^{n-3} + \cdots + A^{(n-1)} x + A^{(n)} = 0,$$

dont les racines sont x, θx, $\theta^2 x$, $\ldots$ $\theta^{n-1} x$, les coefficiens A', A'', $\ldots$ $A^{(n)}$ pourront être exprimés rationnellement par une même quantité y, qui sera racine d'une équation irréductible*):

$$(67) \qquad y^m + p_1 y^{m-1} + p_2 y^{m-2} + \cdots + p_{m-1} y + p_m = 0,$$

dont les coefficiens sont des quantités connues (voyez § 2).

La détermination de x peut s'effectuer à l'aide des deux équations (66) et (67). La première de ces équations est résoluble algébriquement, en supposant connus les coefficiens, c'est-à-dire la quantité y (voyez le théorème III). Quant à l'équation en y, nous allons démontrer que ses racines ont la même propriété que celles de l'équation proposée $\varphi x = 0$, savoir d'être exprimables rationnellement par l'une d'entre elles.

La quantité y est (voy. 15) une certaine fonction rationnelle et symétrique des racines x, θx, $\theta^2 x$, $\ldots$ $\theta^{n-1} x$. En faisant

$$(68) \quad \begin{cases} y = f(x, \theta x, \theta^2 x, \ldots \theta^{n-1} x), \\ \text{les autres racines de l'équation (67) seront} \\ y_1 = f(x_1, \theta x_1, \theta^2 x_1, \ldots \theta^{n-1} x_1), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{m-1} = f(x_{m-1}, \theta x_{m-1}, \theta^2 x_{m-1}, \ldots \theta^{n-1} x_{m-1}). \end{cases}$$

---

*) On démontrera aisément que cette équation ne pourra être réductible. Soit $R = 0$ l'équation irréductible en y, et ν son degré. En éliminant y, on aura une équation en x du degré $n\nu$; donc $n\nu \gtreqless \mu$. Mais on a

$$\mu = m \cdot n,$$

donc

$$\nu \gtreqless m,$$

ce qui est impossible, car ν est moindre que m.

Maintenant, dans le cas que nous considérons, $x_1, \ldots x_{m-1}$ sont des fonctions rationnelles de la racine x. Faisons par conséquent

$$x_1 = \theta_1 x,\ x_2 = \theta_2 x,\ \ldots\ x_{m-1} = \theta_{m-1} x,$$

les racines de l'équation (67) auront la forme:

$$y_1 = f(\theta_1 x,\ \theta\theta_1 x,\ \theta^2\theta_1 x,\ \ldots\ \theta^{n-1}\theta_1 x).$$

D'après l'hypothèse les fonctions θ et θ_1 ont la propriété que

$$\theta\theta_1 x = \theta_1\theta x,$$

équation qui, en vertu du théorème I, aura lieu en substituant à la place de x une autre racine quelconque de l'équation $\varphi x = 0$. On en tire successivement

$$\theta^2\theta_1 x = \theta\theta_1\theta x = \theta_1\theta^2 x,$$
$$\theta^3\theta_1 x = \theta\theta_1\theta^2 x = \theta_1\theta^3 x,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\theta^{n-1}\theta_1 x = \theta\theta_1\theta^{n-2} x = \theta_1\theta^{n-1} x.$$

L'expression de y_1 deviendra par là

$$y_1 = f(\theta_1 x,\ \theta_1\theta x,\ \theta_1\theta^2 x,\ \ldots\ \theta_1\theta^{n-1} x),$$

et l'on voit que y_1, comme y, est une fonction *rationnelle* et *symétrique* des racines

$$x,\ \theta x,\ \theta^2 x,\ \ldots\ \theta^{n-1} x.$$

Donc (§ 2) on peut exprimer y_1 rationnellement par y et des quantités connues. Le même raisonnement s'applique à toute autre racine de l'équation (67).

Soient maintenant λy, $\lambda_1 y$ deux racines quelconques, je dis qu'on aura

$$\lambda\lambda_1 y = \lambda_1\lambda y.$$

En effet, ayant par exemple

$$\lambda y = f(\theta_1 x,\ \theta\theta_1 x,\ \ldots\ \theta^{n-1}\theta_1 x),$$

si

$$y = f(x,\ \theta x,\ \ldots\ \theta^{n-1} x),$$

on aura, en mettant $\theta_2 x$ au lieu de x,

$$\lambda y_2 = f(\theta_1\theta_2 x,\ \theta\theta_1\theta_2 x,\ \ldots\ \theta^{n-1}\theta_1\theta_2 x),$$

où

$$y_2 = f(\theta_2 x,\ \theta\theta_2 x,\ \ldots\ \theta^{n-1}\theta_2 x) = \lambda_1 y;$$

donc

$$\lambda\lambda_1 y = f(\theta_1\theta_2 x,\ \theta\theta_1\theta_2 x,\ \ldots\ \theta^{n-1}\theta_1\theta_2 x)$$

et également

$$\lambda_1\lambda y = f(\theta_2\theta_1 x,\ \theta\theta_2\theta_1 x,\ \ldots\ \theta^{n-1}\theta_2\theta_1 x),$$

donc, puisque $\theta_1\theta_2 x = \theta_2\theta_1 x$,

$$\lambda\lambda_1 y = \lambda_1\lambda y.$$

Les racines de l'équation (67) auront donc précisément la même propriété que celles de l'équation $\varphi x = 0$.

Cela posé, on peut appliquer à l'équation (67) le même procédé qu'à l'équation $\varphi x = 0$; c'est-à-dire que la détermination de y peut s'effectuer à l'aide de deux équations, dont l'une sera résoluble algébriquement et l'autre aura la propriété de l'équation $\varphi x = 0$. Donc le même procédé peut encore être appliqué à cette dernière équation. En continuant, il est clair que la détermination de x pourra s'effectuer à l'aide d'un certain nombre d'équations, qui seront toutes résolubles algébriquement. Donc enfin l'équation $\varphi x = 0$ sera résoluble à l'aide d'opérations algébriques, en supposant connues les quantités qui avec x composent les fonctions

$$\varphi x,\ \theta x,\ \theta_1 x,\ \theta_2 x,\ \ldots\ \theta_{m-1} x.$$

Il est clair que le degré de chacune des équations auxquelles se réduit la détermination de x, sera un facteur du nombre μ qui marque le degré de l'équation $\varphi x = 0$; et:

Théorème IX. Si l'on désigne les degrés de ces équations respectivement par

$$n,\ n_1,\ n_2,\ \ldots\ n_\omega,$$

on aura

$$\mu = n \,.\, n_1 \,.\, n_2 \,.\, \ldots\ n_\omega.$$

En rapprochant ce qui précède de ce qui a été exposé (§ 3), on aura le théorème suivant:

Théorème X. En supposant le degré μ de l'équation $\varphi x = 0$ décomposé comme il suit:

(69) $$\mu = \varepsilon_1^{\nu_1} \,.\, \varepsilon_2^{\nu_2} \,.\, \varepsilon_3^{\nu_3} \ldots \varepsilon_\alpha^{\nu_\alpha},$$

où $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3,\ \ldots\ \varepsilon_\alpha$ sont des nombres premiers, la détermination de x pourra s'effectuer à l'aide de la résolution de ν_1 équations du degré ε_1, de ν_2 équa-

tions du degré ε_3, etc., et toutes ces équations seront résolubles algébriquement.

Dans le cas où $\mu = 2^\nu$, on peut trouver la valeur de x à l'aide de l'extraction de ν racines carrées.

§ 5.

Application aux fonctions circulaires.

En désignant par a la quantité $\frac{2\pi}{\mu}$, on sait qu'on peut trouver une équation algébrique du degré μ dont les racines seront les μ quantités

$$\cos a, \ \cos 2a, \ \cos 3a, \ \ldots \ \cos \mu a,$$

et dont les coefficiens seront des nombres rationnels. Cette équation sera

(70) $$x^\mu - \tfrac{1}{4}\mu x^{\mu-2} + \tfrac{1}{16}\frac{\mu(\mu-3)}{1.2}\cdot x^{\mu-4} - \cdots = 0.$$

Nous allons voir que cette équation a la même propriété que l'équation $\chi x = 0$, considérée dans le paragraphe précédent.

Soit $\cos a = x$, on aura d'après une formule connue, quel que soit a,

(71) $$\cos ma = \theta(\cos a),$$

où θ désigne une fonction entière. Donc $\cos ma$, qui exprime une racine quelconque de l'équation (70), sera une fonction rationnelle de la racine x. Soit $\theta_1 x$ une autre racine, je dis qu'on aura

$$\theta\theta_1 x = \theta_1 \theta x.$$

En effet, soit $\theta_1 x = \cos m'a$, la formule (71) donnera, en mettant $m'a$ au lieu de a,

$$\cos(mm'a) = \theta(\cos m'a) = \theta\theta_1 x.$$

De la même manière on aura

$$\cos(m'ma) = \theta_1(\cos ma) = \theta_1\theta x,$$

donc

$$\theta\theta_1 x = \theta_1\theta x.$$

Donc, suivant ce qu'on a vu dans le paragraphe précédent,

$$x \ \text{ou} \ \cos a = \cos\frac{2\pi}{\mu}$$

pourra être déterminé algébriquement. Cela est connu.

Supposons maintenant que μ soit un nombre premier $2n+1$, les racines de l'équation (70) seront

$$\cos\frac{2\pi}{2n+1},\quad \cos\frac{4\pi}{2n+1},\ \ldots\ \cos\frac{4n\pi}{2n+1},\quad \cos 2\pi.$$

La dernière racine $\cos 2\pi$ est égale à l'unité; donc l'équation (70) est divisible par $x-1$. Les autres racines seront toujous égales entre elles par couples, car on a $\cos\frac{2m\pi}{2n+1}=\cos\frac{(2n+1-m)2\pi}{2n+1}$, donc on peut trouver une équation dont les racines seront,

$$(72)\qquad \cos\frac{2\pi}{2n+1},\quad \cos\frac{4\pi}{2n+1},\ \ldots\ \cos\frac{2n\pi}{2n+1}.$$

Cette équation sera

$$(73)\qquad x^n+\tfrac{1}{2}x^{n-1}-\tfrac{1}{4}(n-1)x^{n-2}-\tfrac{1}{8}(n-2)x^{n-3} +\tfrac{1}{16}\frac{(n-2)(n-3)}{1.2}x^{n-4}+\tfrac{1}{32}\frac{(n-3)(n-4)}{1.2}x^{n-5}-\cdots=0.$$

Cela posé, soit

$$\cos\frac{2\pi}{2n+1}=x=\cos a,$$

on aura d'après ce qui précède

$$\cos\frac{2m\pi}{2n+1}=\theta x=\cos ma.$$

L'équation (73) sera donc satisfaite par les racines

$$(74)\qquad x,\ \theta x,\ \theta^2 x,\ \theta^3 x,\ \ldots$$

On a, quelle que soit la valeur de a,

$$\theta(\cos a)=\cos ma.$$

De là on tire successivement:

$$\begin{aligned}
\theta^2(\cos a) &= \theta(\cos ma) &&= \cos m^2 a,\\
\theta^3(\cos a) &= \theta(\cos m^2 a) &&= \cos m^3 a,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\theta^\mu(\cos a) &= \theta(\cos m^{\mu-1}a) &&= \cos m^\mu a.
\end{aligned}$$

Les racines (74) deviendront donc

$$(75)\qquad \cos a,\ \cos ma,\ \cos m^2 a,\ \cos m^3 a,\ \ldots\ \cos m^\mu a,\ \ldots$$

Cela posé, si m est une racine primitive pour le module $2n+1$ (voyez *Gauss* Disquis. arithm. art. 57), je dis que toutes les racines

(76) $$\cos a,\ \cos ma,\ \cos m^2 a,\ \ldots \cos m^{n-1} a$$

seront différentes entre elles. En effet si l'on avait

$$\cos m^\mu a = \cos m^\nu a,$$

où μ et ν sont moindres que n, on en tirerait

$$m^\mu a = \pm m^\nu a + 2k\pi,$$

où k est entier. Cela donne, en remettant pour a sa valeur $\frac{2\pi}{2n+1}$,

$$m^\mu = \pm m^\nu + k(2n+1),$$

donc

$$m^\mu \mp m^\nu = m^\nu(m^{\mu-\nu} \mp 1) = k(2n+1)$$

et par conséquent $m^{2(\mu-\nu)} - 1$ serait divisible par $2n+1$, ce qui est impossible, car $2(\mu-\nu)$ est moindre que $2n$, et nous avons supposé que m est une racine primitive.

On aura encore

$$\cos m^n a = \cos a,$$

car $m^{2n} - 1$ ou $(m^n - 1)(m^n + 1)$ est divisible par $2n+1$, donc

$$m^n = -1 + k(2n+1),$$

et par suite

$$\cos m^n a = \cos(-a + k.2\pi) = \cos a.$$

Par là on voit que les n racines de l'équation (73) pourront s'exprimer par (76); c'est-à-dire par:

$$x,\ \theta x,\ \theta^2 x,\ \theta^3 x,\ \ldots\ \theta^{n-1} x,\ \text{ où }\ \theta^n x = x.$$

Donc, en vertu du théorème III, cette équation sera résoluble algébriquement.

En faisant $n = m_1 . m_2 \ldots m_\omega$, on peut diviser la circonférence entière du cercle en $2n+1$ parties égales, à l'aide de ω équations des degrés m_1, m_2, m_3, ... m_ω. Si les nombres m_1, m_2, ... m_ω sont premiers entre eux, les coefficiens de ces équations seront des nombres rationnels.

En supposant $n = 2^\omega$, on aura le théorème connu sur les polygones réguliers qui peuvent être construits géométriquement.

En vertu du théorème V on voit que pour diviser la circonférence entière du cercle en $2n+1$ parties égales, il suffit

1) de diviser la circonférence entière du cercle en $2n$ parties égales,

2) de diviser un arc, qu'on peut construire ensuite, en $2n$ parties égales,

3) et d'extraire la racine carrée d'une seule quantité ϱ.

M. *Gauss* a énoncé ce théorème dans ses Disquis., et il ajoute que la quantité dont il faut extraire la racine, sera égale à $2n+1$. C'est ce qu'on peut démontrer aisément comme il suit.

On a vu (40, 38, 46) que ϱ est la valeur numérique de la quantité

$$(x+\alpha\theta x+\alpha^2\theta^2 x+\cdots+\alpha^{n-1}\theta^{n-1}x)(x+\alpha^{n-1}\theta x+\alpha^{n-2}\theta^2 x+\cdots+\alpha\theta^{n-1}x),$$

où $\alpha=\cos\frac{2\pi}{n}+\sqrt{-1}\,.\sin\frac{2\pi}{n}$. En substituant pour x, θx, ... leurs valeurs $\cos a$, $\cos ma$, $\cos m^2 a$, ... on aura

$$\begin{aligned}\pm\varrho=&(\cos a+\alpha\cos ma+\alpha^2\cos m^2 a+\cdots+\alpha^{n-1}\cos m^{n-1}a)\\ &\times(\cos a+\alpha^{n-1}\cos ma+\alpha^{n-2}\cos m^2 a+\cdots+\alpha\cos m^{n-1}a).\end{aligned}$$

En développant et en mettant $\pm\varrho$ sous la forme

$$\pm\varrho=t_0+t_1\alpha+t_2\alpha^2+\cdots+t_{n-1}\alpha^{n-1},$$

on trouvera facilement

$$\begin{aligned}t_\mu=&\cos a\,.\cos m^\mu a+\cos ma\,.\cos m^{\mu+1}a+\cdots+\cos m^{n-1-\mu}a\,.\cos m^{n-1}a\\ &+\cos m^{n-\mu}a\,.\cos a+\cos m^{n-\mu+1}a\,.\cos ma+\cdots+\cos m^{n-1}a\,.\cos m^{\mu-1}a.\end{aligned}$$

Maintenant on a

$$\cos m^\nu a\,.\cos m^{\mu+\nu}a=\tfrac{1}{2}\cos(m^{\mu+\nu}a+m^\nu a)+\tfrac{1}{2}\cos(m^{\mu+\nu}a-m^\nu a),$$

donc

$$\begin{aligned}t_\mu=&\tfrac{1}{2}[\cos(m^\mu+1)a+\cos(m^\mu+1)ma+\cdots+\cos(m^\mu+1)m^{n-1}a]\\ &+\tfrac{1}{2}[\cos(m^\mu-1)a+\cos(m^\mu-1)ma+\cdots+\cos(m^\mu-1)m^{n-1}a].\end{aligned}$$

Si l'on fait $(m^\mu+1)a=a'$, $(m^\mu-1)a=a''$, on aura

$$\begin{aligned}t_\mu=&\tfrac{1}{2}[\cos a'+\theta(\cos a')+\theta^2(\cos a')+\cdots+\theta^{n-1}(\cos a')]\\ &+\tfrac{1}{2}[\cos a''+\theta(\cos a'')+\theta^2(\cos a'')+\cdots+\theta^{n-1}(\cos a'')].\end{aligned}$$

Cela posé, il y a deux cas, savoir: μ est différent de zéro ou non.

Dans le premier cas il est clair que $\cos a'$ et $\cos a''$ sont des racines de l'équation (73), donc $\cos a'=\theta^\delta x$, $\cos a''=\theta^\varepsilon x$. En substituant, il viendra, en remarquant que $\theta^n x=x$:

$$t_\mu = \tfrac{1}{2}(\theta^\delta x + \theta^{\delta+1} x + \cdots + \theta^{n-1} x + x + \theta x + \cdots + \theta^{\delta-1} x)$$
$$+ \tfrac{1}{2}(\theta^\varepsilon x + \theta^{\varepsilon+1} x + \cdots + \theta^{n-1} x + x + \theta x + \cdots + \theta^{\varepsilon-1} x),$$

donc

$$t_\mu = x + \theta x + \theta^2 x + \cdots + \theta^{n-1} x,$$

c'est-à-dire que t_μ est égal à la somme des racines; par suite, en vertu de l'équation (73),

$$t_\mu = -\tfrac{1}{2}.$$

Dans le cas où $\mu = 0$, la valeur de t_μ deviendra:

$$t_0 = \tfrac{1}{2}(\cos 2a + \cos 2ma + \cdots + \cos 2m^{n-1} a) + \tfrac{1}{2} n;$$

or $\cos 2a$ est une racine de l'équation (73), donc en faisant

$$\cos 2a = \theta^\delta x,$$

on aura

$$\cos 2a + \cos 2ma + \cdots + \cos 2m^{n-1} a$$
$$= \theta^\delta x + \theta^{\delta+1} x + \cdots + \theta^{n-1} x + x + \theta x + \cdots + \theta^{\delta-1} x = -\tfrac{1}{2},$$

par conséquent

$$t_0 = \tfrac{1}{2} n - \tfrac{1}{4}.$$

En vertu de ces valeurs de t_0 et t_μ, la valeur de $\pm \varrho$ deviendra:

$$\pm \varrho = \tfrac{1}{2} n - \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2}(\alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \cdots + \alpha^{n-1}),$$

mais $\alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \cdots + \alpha^{n-1} = -1$, donc

$$\pm \varrho = \tfrac{1}{2} n + \tfrac{1}{4},$$

et puisque ϱ est essentiellement positif,

$$\varrho = \frac{2n+1}{4}.$$

Cette valeur de ϱ donne

$$\sqrt{\varrho} = \tfrac{1}{2}.\sqrt{2n+1},$$

donc la racine carrée qu'il faut extraire est celle du nombre $2n+1$, comme le dit M. *Gauss**).

Christiania, le 29 mars 1828.

*) Dans le cas où n est un nombre impair, on peut même se dispenser de l'extraction de cette racine carrée.

XXVI.

THÉORÈMES SUR LES FONCTIONS ELLIPTIQUES.

Journal für die reine und angewandte Mathematik, herausgegeben von *Crelle*, Bd. 4, Berlin 1829.

La formule donnée par M. *Jacobi* dans le tome III p. 86 de ce journal peut être établie facilement à l'aide d'un théorème que nous allons démontrer dans ce qui suit.

En faisant $\varphi\theta = x$, on aura, en vertu de ce qu'on a vu dans le § III du mémoire n° 12 tome II de ce journal*)

(1) $$\varphi(2n+1)\theta = R,$$

où R est une fonction rationnelle de x, le numérateur étant du degré $(2n+1)^2$ et le dénominateur du degré $(2n+1)^2-1$. L'équation (1) est donc du degré $(2n+1)^2$ et ses racines peuvent être exprimées par la formule:

(2) $$x = \varphi\left(\theta + \frac{2m\omega + 2\mu\varpi i}{2n+1}\right),$$

en donnant à m et μ toutes les valeurs entières depuis zéro jusqu'à $2n$.

Soit pour abréger

(3) $$\frac{2\omega}{2n+1} = \alpha,\quad \frac{2\varpi i}{2n+1} = \beta,$$

l'expression des racines sera

(4) $$x = \varphi(\theta + m\alpha + \mu\beta).$$

*) Mémoire XVI de cette édition.

Cela posé, nous allons démontrer le théorème suivant:

Théorème I. Soit $\psi\theta$ une fonction *entière* quelconque des quantités $\varphi(\theta+m\alpha+\mu\beta)$ qui reste la même en changeant θ en $\theta+\alpha$ et en $\theta+\beta$. Soit ν le plus grand exposant de la quantité $\varphi\theta$ dans la fonction $\psi\theta$, on aura toujours

(5) $$\psi\theta=p+q.f(2n+1)\theta.F(2n+1)\theta,$$

p et q étant deux fonctions *entières* de $\varphi(2n+1)\theta$, la première du degré ν et la seconde du degré $\nu-2$.

Démonstration. En vertu de la formule (10) tome II p. 105*) on a

$$\varphi(\theta+m\alpha+\mu\beta)=\frac{\varphi\theta.f(m\alpha+\mu\beta).F(m\alpha+\mu\beta)+\varphi(m\alpha+\mu\beta).f\theta.F\theta}{1+e^2c^2.\varphi^2(m\alpha+\mu\beta).\varphi^2\theta},$$

d'où il suit qu'on pourra exprimer $\psi\theta$ rationnellement en $\varphi\theta$ et $f\theta.F\theta$. Or le carré de $f\theta.F\theta$ est rationnel en $\varphi\theta$, car

$$(f\theta.F\theta)^2=(1-c^2\varphi^2\theta)(1+e^2\varphi^2\theta),$$

donc on pourra faire en sorte que l'expression de $\psi\theta$ ne contienne la quantité $f\theta.F\theta$ qu'à la première puissance. On pourra donc faire

(7) $$\psi\theta=\psi_1(\varphi\theta)+\psi_2(\varphi\theta).f\theta.F\theta,$$

où $\psi_1(\varphi\theta)$ et $\psi_2(\varphi\theta)$ sont des fonctions rationnelles de $\varphi\theta$.

Si l'on met $\omega-\theta$ à la place de θ, on aura, en remarquant que $\varphi(\omega-\theta)=\varphi\theta$, $f(\omega-\theta)=-f\theta$, $F(\omega-\theta)=F\theta$:

(8) $$\psi(\omega-\theta)=\psi_1(\varphi\theta)-\psi_2(\varphi\theta).f\theta.F\theta.$$

Des équations (7) et (8) on tire

(9) $$\psi_1(\varphi\theta)=\tfrac{1}{2}.[\psi\theta+\psi(\omega-\theta)],$$

(10) $$\psi_2(\varphi\theta).f\theta.F\theta=\tfrac{1}{2}.[\psi\theta-\psi(\omega-\theta)].$$

Considérons d'abord la fonction $\psi_1(\varphi\theta)$. En y mettant $\theta+\alpha$ au lieu de θ, il viendra

$$\psi_1[\varphi(\theta+\alpha)]=\tfrac{1}{2}.[\psi(\theta+\alpha)+\psi(\omega-\alpha-\theta)];$$

or on a $\psi(\theta+\alpha)=\psi\theta$, et par conséquent aussi, en mettant $\omega-\alpha-\theta$ au lieu de θ,

*) P. 268 de cette édition.

$$\psi(\omega - \theta) = \psi(\omega - \alpha - \theta);$$

donc

$$\psi_1[\varphi(\theta + \alpha)] = \tfrac{1}{2}[\psi\theta + \psi(\omega - \theta)],$$

c'est-à-dire

$$\psi_1[\varphi(\theta + \alpha)] = \psi_1(\varphi\theta).$$

On aura de la même manière

$$\psi_1[\varphi(\theta + \beta)] = \psi_1(\varphi\theta).$$

La première de ces équations donne, en mettant successivement $\theta + \alpha$, $\theta + 2\alpha$, ... au lieu de θ,

(11) $$\psi_1[\varphi(\theta + m\alpha)] = \psi_1(\varphi\theta),$$

où m est un nombre entier quelconque. De même la seconde équation donne

$$\psi_1[\varphi(\theta + \mu\beta)] = \psi_1(\varphi\theta),$$

d'où, en mettant $\theta + m\alpha$ au lieu de θ, et en ayant égard à l'équation (11) on tire

(12) $$\psi_1[\varphi(\theta + m\alpha + \mu\beta)] = \psi_1(\varphi\theta).$$

Donc la fonction $\psi_1(\varphi\theta)$ reste la même, en y substituant au lieu de $\varphi\theta$ une autre racine quelconque de l'équation (1). En attribuant à m et μ toutes les valeurs entières depuis zéro jusqu'à $2n$ et en ajoutant, la formule (12) donne

(13) $$\psi_1(\varphi\theta) = \frac{1}{(2n+1)^2} \cdot \sum_0^{2n}{}_m \sum_0^{2n}{}_\mu \psi_1[\varphi(\theta + m\alpha + \mu\beta)].$$

Le second membre de cette équation est une fonction *rationnelle* et *symétrique* des racines de l'équation (1), donc on pourra l'exprimer rationnellement par les coefficiens de cette équation, c'est-à-dire par $\varphi(2n+1)\theta$. Soit donc

$$\psi_1(\varphi\theta) = p,$$

la quantité p sera une fonction rationnelle de $\varphi(2n+1)\theta$. Or je dis que p sera toujours entier. En effet soit $\varphi(2n+1)\theta = y$ et $p = \frac{p'}{q'}$, où p' et q' sont des fonctions entières de y sans diviseur commun. Soit $y = \varphi(2n+1)\delta$ une racine de l'équation $q' = 0$: la quantité $p = \frac{1}{2}[\psi\theta + \psi(\omega - \theta)]$ sera infinie en faisant $\theta = \delta$, donc on aura $\psi\delta + \psi(\omega - \delta) = \frac{1}{0}$; maintenant il est évident par la forme de la fonction $\psi\theta$, que cette équation ne peut subsister à moins qu'une quantité de la forme

$$\varphi(\delta + m\alpha + \mu\beta) \quad \text{ou} \quad \varphi(\omega - \delta + m\alpha + \mu\beta)$$

n'ait une valeur infinie. Soit donc $\varphi(\delta + m\alpha + \mu\beta) = \frac{1}{0}$, on aura en vertu de l'équation (30) tome II p. 113*)

$$\delta = (m' + \tfrac{1}{2})\omega + (n' + \tfrac{1}{2})\varpi i - m\alpha - \mu\beta,$$

où m' et n' sont des nombres entiers; or cette valeur de δ donne

$$\varphi(2n+1)\delta = \varphi\left[[(2n+1)m' + n - 2m]\omega + [(2n+1)n' + n - 2\mu]\varpi i + \frac{\omega}{2} + \frac{\varpi}{2} i\right],$$

c'est-à-dire (26 p. 111*):

$$\varphi(2n+1)\delta = \tfrac{1}{0}.$$

Mais cela est impossible, car une racine quelconque de l'équation $q' = 0$ doit être finie. On trouvera également que $\varphi(\omega - \delta + m\alpha + \mu\beta) = \frac{1}{0}$ donne $\varphi(2n+1)\delta = \frac{1}{0}$. La quantité p est donc une fonction entière de $\varphi(2n+1)\theta$.

Considérons maintenant l'équation (10). En divisant les deux membres par $f(2n+1)\theta . F(2n+1)\theta$, on aura

$$\frac{\psi_2(\varphi\theta) . f\theta . F\theta}{f(2n+1)\theta . F(2n+1)\theta} = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{\psi\theta - \psi(\omega - \theta)}{f(2n+1)\theta . F(2n+1)\theta}.$$

En vertu de ce qu'on a vu (45) tome II p. 117*), on aura $f(2n+1)\theta = f\theta . u$, $F(2n+1)\theta = F\theta . v$, u et v étant des fonctions rationnelles de $\varphi\theta$; donc le second membre de l'équation précédente sera une fonction rationnelle de $\varphi\theta$. En la désignant par $\chi(\varphi\theta)$, on aura

$$\chi(\varphi\theta) = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{\psi\theta - \psi(\omega - \theta)}{f(2n+1)\theta . F(2n+1)\theta}.$$

En mettant $\theta + \alpha$ au lieu de θ, il viendra

$$\psi(\theta + \alpha) = \psi\theta, \quad \psi[\omega - (\theta + \alpha)] = \psi(\omega - \theta),$$

$$f(2n+1)(\theta + \alpha) = f[(2n+1)\theta + 2m\omega + 2\mu\varpi i] = f(2n+1)\theta,$$

$$F(2n+1)(\theta + \alpha) = F[(2n+1)\theta + 2m\omega + 2\mu\varpi i] = F(2n+1)\theta,$$

donc on aura

$$\chi[\varphi(\theta + \alpha)] = \chi(\varphi\theta).$$

De la même manière on trouvera

$$\chi[\varphi(\theta + \beta)] = \chi(\varphi\theta).$$

On en déduit, comme plus haut pour la fonction $\psi_1(\varphi\theta)$, que $\chi(\varphi\theta)$ peut être exprimé par une fonction entière de $\varphi(2n+1)\theta$. Soit donc

*) Les formules citées se trouvent p. 275—281 de cette édition.



$$\chi(\varphi\theta) = q,$$

on aura

$$\psi_2(\varphi\theta) . f\theta . F\theta = q . f(2n+1)\theta . F(2n+1)\theta,$$

et enfin

(14) $$\psi\theta = p + q . f(2n+1)\theta . F(2n+1)\theta,$$

où p et q sont des fonctions entières de $\varphi(2n+1)\theta$.

Pour trouver les degrés de ces fonctions, soit $(\varphi\theta)^\nu . \chi\theta$ le terme de $\psi\theta$, dans lequel $\varphi\theta$ est élevé à la plus haute puissance, on aura, en supposant $\varphi\theta$ infini,

$$\psi\theta = A . (\varphi\theta)^\nu,$$

A étant une constante. De même on aura

$$\psi(\omega - \theta) = A' . (\varphi\theta)^\nu,$$

et par suite:

$$p = \tfrac{1}{2}(A + A') . (\varphi\theta)^\nu;$$

mais pour $\varphi\theta$ infini, on a $\varphi(2n+1)\theta = B . \varphi\theta$, B étant une constante. Il suit de là que p sera du degré ν par rapport à $\varphi(2n+1)\theta$. On démontrera de la même manière que la fonction q sera du degré $\nu - 2$, tout au plus.

Notre théorème est donc démontré.

Dans le cas où la quantité $\varphi\theta$ ne monte qu'à la première puissance dans $\psi\theta$, on a $\nu = 1$; par conséquent q sera du degré -1, c'est-à-dire $q = 0$. Donc on a dans ce cas

(15) $$\psi\theta = A + B . \varphi(2n+1)\theta,$$

où A et B sont des quantités constantes, qu'on déterminera facilement en faisant $\theta = 0$ et $\varphi\theta = \frac{1}{0}$.

Soit par exemple $\pi\theta$ le produit d'un nombre quelconque des racines de l'équation (1), et faisons

$$\psi\theta = \sum_0^{2n}{}_m \sum_0^{2n}{}_\mu \pi(\theta + m\alpha + \mu\beta),$$

il est clair qu'on aura $\psi(\theta) = \psi(\theta + \alpha) = \psi(\theta + \beta)$, en remarquant que

$$\pi[\theta + (2n+1)\alpha + \mu\beta] = \pi(\theta + \mu\beta)$$

et

$$\pi[\theta + (2n+1)\beta + m\alpha] = \pi(\theta + m\alpha).$$

Donc

$$(16) \qquad \sum_0^{2n}{}_m \sum_0^{2n}{}_\mu \pi(\theta + m\alpha + \mu\beta) = A + B . \varphi(2n+1)\theta.$$

Il faut remarquer que l'une des quantités A et B est toujours égale à zéro. On a $A = 0$ si le nombre des facteurs de $\pi\theta$ est un nombre impair, et $B = 0$ si ce nombre est pair. Dans ce dernier cas la quantité $\psi\theta$ est indépendante de la valeur de θ; par conséquent, en faisant $\theta = 0$, on a

$$(17) \qquad \sum_0^{2n}{}_m \sum_0^{2n}{}_\mu \pi(\theta + m\alpha + \mu\beta) = \sum_0^{2n}{}_m \sum_0^{2n}{}_\mu \pi(m\alpha + \mu\beta).$$

Si l'on fait par exemple

$$\pi\theta = \varphi\theta . \varphi(\theta + k\alpha + k'\beta),$$

on a

$$(18) \quad \begin{cases} \sum_0^{2n}{}_m \sum_0^{2n}{}_\mu \varphi(\theta + m\alpha + \mu\beta) . \varphi[\theta + (m+k)\alpha + (\mu + k')\beta] \\ = \sum_0^{2n}{}_m \sum_0^{2n}{}_\mu \varphi(m\alpha + \mu\beta) . \varphi[(m+k)\alpha + (\mu + k')\beta], \end{cases}$$

où k et k' sont des nombres entiers quelconques, moindres que $2n+1$. Cependant on ne peut pas supposer à la fois $k = 0$, $k' = 0$. Car alors $\pi\theta = (\varphi\theta)^2$ et par suite $\nu = 2$, tandis qu'on doit avoir

$$\nu = 1.$$

De la même manière que nous avons démontré le théorème précédent on pourra encore établir les deux suivans:

Théorème II. Soit $\psi\theta$ une fonction quelconque entière des quantités de la forme $f(\theta + m\alpha + \mu\beta)$, telle que

$$\psi\theta = \psi(\theta + \alpha) = \psi(\theta + \beta),$$

on aura

$$\psi\theta = p + q . \varphi(2n+1)\theta . F(2n+1)\theta,$$

où p et q sont des fonctions entières de $f(2n+1)\theta$, la première du degré ν et la seconde du degré $\nu - 2$, tout au plus, en désignant par ν le plus grand exposant de $f\theta$ dans $\psi\theta$.

Théorème III. Soit $\psi\theta$ une fonction quelconque entière des quantités de la forme $F(\theta + m\alpha + \mu\beta)$, telle que

$$\psi(\theta) = \psi(\theta + \alpha) = \psi(\theta + \beta),$$

on aura

$$\psi\theta = p + q . \varphi(2n+1)\theta . f(2n+1)\theta,$$

où p et q sont des fonctions entières de $F(2n+1)\theta$, la première du degré ν et la seconde du degré $\nu-2$, tout au plus, en désignant par ν le plus grand exposant de $F\theta$ dans $\psi\theta$.

En vertu du premier théorème on voit sans difficulté que la valeur de $\varphi\left(\frac{\theta}{2n+1}\right)$, exprimée en fonction de $\varphi\theta$, sera

$$\varphi\left(\frac{\theta}{2n+1}\right)=\frac{1}{2n+1}\cdot\sum_0^{4n^2+4n}{}_m \sqrt[2n+1]{p_m+q_m\cdot f\theta\cdot F\theta},$$

où p_m et q_m sont deux fonctions entières de $\varphi\theta$, la première impaire et du degré $2n+1$, la seconde paire et du degré $2n-2$. D'ailleurs ces fonctions sont déterminées par l'équation

$$p_m^2-q_m^2(f\theta)^2\cdot(F\theta)^2=(\varphi^2\theta-a_m^2)^{2n+1},$$

où a_m est une constante.

Christiania le 27 août 1828.

XXVII.

DÉMONSTRATION D'UNE PROPRIÉTÉ GÉNÉRALE D'UNE CERTAINE CLASSE DE FONCTIONS TRANSCENDANTES.

Journal für die reine und angewandte Mathematik, herausgegeben von *Crelle*, Bd. 4, Berlin 1829.

Théorème. Soit y une fonction de x qui satisfait à une équation quelconque irréductible de la forme

(1) $$0 = p_0 + p_1 y + p_2 y^2 + \cdots + p_{n-1} y^{n-1} + y^n,$$

où $p_0, p_1, p_2, \ldots p_{n-1}$ sont des fonctions entières de la variable x. Soit de même

(2) $$0 = q_0 + q_1 y + q_2 y^2 + \cdots + q_{n-1} y^{n-1},$$

une équation semblable, $q_0, q_1, q_2, \ldots q_{n-1}$ étant également des fonctions entières de x, et supposons variables les coefficiens des diverses puissances de x dans ces fonctions. Nous désignerons ces coefficiens par a, a', a'' ... En vertu des deux équations (1) et (2) x sera une fonction de a, a', a'', ... et on en déterminera les valeurs en éliminant la quantité y. Désignons par

(3) $$\varrho = 0$$

le résultat de l'élimination, de sorte que ϱ ne contiendra que les variables x, a, a', a'', ... Soit μ le degré de cette équation par rapport à x, et désignons par

(4) $$x_1, x_2, x_3, \ldots x_\mu$$

ses μ racines, qui seront autant de fonctions de a, a', a'', ... Cela posé, si l'on fait

$$(5) \qquad \psi x = \int f(x, y)\, dx,$$

où $f(x, y)$ désigne une fonction *rationnelle* quelconque de x et de y, je dis que la fonction transcendante ψx jouira de la propriété générale exprimée par l'équation suivante:

$$(6) \quad \psi x_1 + \psi x_2 + \cdots + \psi x_\mu = u + k_1 \log v_1 + k_2 \log v_2 + \cdots + k_n \log v_n,$$

u, v_1, v_2, ... v_n étant des fonctions rationnelles de a, a', a'', ..., et k_1, k_2, ... k_n des constantes.

Démonstration. Pour établir ce théorème il suffit d'exprimer la différentielle du premier membre de l'équation (6) en fonction de a, a', a'', ...; car il se réduira par là à une différentielle rationnelle, comme on va voir. D'abord les deux équations (1) et (2) donneront y en fonction rationnelle de x, a, a', a'', ... De même l'équation (3) $\varrho = 0$ donnera pour dx une expression de la forme

$$dx = \alpha . da + \alpha' . da' + \alpha'' . da'' + \cdots,$$

où α, α', α'', ... sont des fonctions rationnelles de x, a, a', a'', ... De là il suit qu'on pourra mettre la différentielle $f(x, y)\, dx$ sous la forme

$$f(x, y)\, dx = \varphi x . da + \varphi_1 x . da' + \varphi_2 x . da'' + \cdots,$$

où φx, $\varphi_1 x$, ... sont des fonctions rationnelles de x, a, a', a'', ... En intégrant, il viendra

$$\psi x = \int (\varphi x . da + \varphi_1 x . da' + \cdots)$$

et de là on tire, en remarquant que cette équation aura lieu en mettant pour x les μ valeurs de cette quantité,

$$(7) \qquad \psi x_1 + \psi x_2 + \cdots + \psi x_\mu$$
$$= \int [(\varphi x_1 + \varphi x_2 + \cdots + \varphi x_\mu)\, da + (\varphi_1 x_1 + \varphi_1 x_2 + \cdots + \varphi_1 x_\mu)\, da' + \cdots].$$

Dans cette équation les coefficiens des différentielles da, da', ... sont des fonctions rationnelles de a, a', a'', ... et de x_1, x_2, ... x_μ, mais en outre ils sont symétriques par rapport à x_1, x_2, ... x_μ; donc, en vertu d'un théorème connu, on pourra exprimer ces fonctions rationnellement par a, a', a'', ... et par les coefficiens de l'équation $\varrho = 0$; mais ceux-ci sont eux-

mêmes des fonctions rationnelles des variables a, a', a'', ..., donc enfin les coefficiens de da, da', da'', ... de l'équation (7) le seront également. Donc, en intégrant, on aura une équation de la forme (6).

Je me réserve de développer dans une autre occasion les nombreuses applications de ce théorème, qui jetteront du jour sur la nature des fonctions transcendantes dont il s'agit.

Christiania le 6 janvier 1829.

XXVIII.

PRECIS D'UNE THÉORIE DES FONCTIONS ELLIPTIQUES.

Journal für die reine und angewandte Mathematik, herausgegeben von *Crelle*, Bd. 4, Berlin 1829.

Introduction.

La théorie des fonctions elliptiques, créée par M. *Legendre*, forme une partie des plus intéressantes de l'analyse. Ayant cherché de mon côté à donner de nouveaux développemens à cette théorie, je suis, si je ne me trompe, parvenu à plusieurs résultats qui me paraissent mériter quelque attention. J'ai cherché surtout à donner de la généralité à mes recherches, en me proposant des problèmes d'une vaste étendue. Si je n'ai pas été assez heureux pour les résoudre complètement, au moins j'ai donné des moyens pour y parvenir. L'ensemble de mes recherches sur ce sujet formera un ouvrage de quelque étendue, mais que les circonstances ne m'ont pas encore permis de publier. C'est pourquoi je vais donner ici un précis de la méthode que j'ai suivie, avec les résultats généraux auxquelles elle m'a conduit. Ce mémoire sera divisé en deux parties.

Dans *la première* je considère les fonctions elliptiques comme intégrales indéfinies, sans rien y ajouter sur la nature des quantités réelles ou imaginaires qui les composent. Je me servirai des notations suivantes:

$$\Delta(x, c) = \pm\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)},$$

$$\varpi(x, c) = \int\frac{dx}{\Delta(x, c)},$$

$$\varpi_0(x, c) = \int\frac{x^2\,dx}{\Delta(x, c)},$$

$$\Pi(x, c, a) = \int \frac{dx}{\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \Delta(x, c)},$$

de sorte que

$$\varpi(x, c), \quad \varpi_0(x, c), \quad \Pi(x, c, a)$$

remplacent respectivement les fonctions de première, de seconde et de troisième espèce.

Cela posé, je me suis proposé ce problème général: „Trouver tous les cas possibles dans lesquels on peut satisfaire à une équation de la forme:

$$(a) \begin{cases} \alpha_1 \varpi(x_1, c_1) + \alpha_2 \varpi(x_2, c_2) + \cdots + \alpha_n \varpi(x_n, c_n) \\ + \alpha_1' \varpi_0(x_1', c_1') + \alpha_2' \varpi_0(x_2', c_2') + \cdots + \alpha_m' \varpi_0(x_m', c_m') \\ + \alpha_1'' \Pi(x_1'', c_1'', a_1) + \alpha_2'' \Pi(x_2'', c_2'', a_2) + \cdots + \alpha_\mu'' \Pi(x_\mu'', c_\mu'', a_\mu) \\ \qquad = u + A_1 \log v_1 + A_2 \log v_2 + \cdots + A_\nu \log v_\nu, \end{cases}$$

où

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n; \quad \alpha_1', \alpha_2', \ldots \alpha_m';$$
$$\alpha_1'', \alpha_2'', \ldots \alpha_\mu''; \quad A_1, A_2, \ldots A_\nu$$

sont des quantités constantes, $x_1, x_2, \ldots x_n$; $x_1', x_2', \ldots x_m'$; $x_1'', x_2'', \ldots x_\mu''$ des *variables* liées entre elles par des équations *algébriques*, et $u, v_1, v_2, \ldots v_\nu$ des fonctions *algébriques* de ces variables.“

J'établis d'abord les propriétés fondamentales des fonctions elliptiques, ou ce qui concerne leur sommation, en employant une méthode particulière, qui est applicable avec la même facilité à une infinité d'autres transcendantes plus compliquées. En m'appuyant sur ces propriétés fondamentales, je considère ensuite l'équation dans toute sa généralité, et je fais le premier pas en démontrant un théorème général sur la forme qu'on pourra donner à l'intégrale d'une fonction algébrique quelconque, en supposant cette intégrale exprimable par des fonctions *algébriques*, *logarithmiques* et *elliptiques*, théorème qui est d'un grand usage dans tout le calcul intégral, à cause de sa grande généralité.

J'en déduis, comme corollaire, le théorème suivant:

„Si $\int \frac{r\,dx}{\Delta(x, c)}$, où r est une fonction rationnelle quelconque de x, est exprimable par des fonctions algébriques et logarithmiques et par des fonctions elliptiques $\psi, \psi_1, \psi_2, \ldots$, on pourra toujours supposer

$$(b) \int \frac{r\,dx}{\Delta(x, c)} = p\,\Delta(x, c) + \alpha\,\psi(y) + \alpha'\,\psi_1(y_1) + \alpha''\,\psi_2(y_2) + \cdots$$
$$\cdots + A_1 \log \frac{q_1 + q_1'\,\Delta(x, c)}{q_1 - q_1'\,\Delta(x, c)} + A_2 \log \frac{q_2 + q_2'\,\Delta(x, c)}{q_2 - q_2'\,\Delta(x, c)} + \cdots$$

où toutes les quantités $p, q_1, q_2, \ldots q_1', q_2', \ldots y, y_1, y_2, \ldots$ sont des *fonctions rationnelles* de x"*).

De ce théorème je tire ensuite celui-ci:

„Si une équation quelconque de la forme (a) a lieu, et qu'on désigne par c l'un quelconque des modules qui y entrent, parmi les autres modules il y en aura au moins un, c', tel qu'on puisse satisfaire à l'équation différentielle:

$$\frac{dy}{\varDelta(y,c')} = \varepsilon \frac{dx}{\varDelta(x,c)},$$

en mettant pour y une fonction *rationnelle* de x, et vice versa."

Ces théorèmes sont très importans dans la théorie des fonctions elliptiques. Ils ramènent la solution du problème général à la détermination de la solution la plus générale de l'équation

$$\frac{dy}{\varDelta(y,c')} = \varepsilon \frac{dx}{\varDelta(x,c)},$$

ou à la transformation des fonctions de première espèce. Je donne la solution complète de ce problème, et j'en déduis ensuite la transformation générale des fonctions de première espèce. Je fais voir que les modules doivent nécessairement être liés entre eux par une équation algébrique. On peut se contenter de considérer le cas où le dégré de la fonction y est un nombre premier, y compris l'unité. Si ce degré est désigné par μ, c' pourra avoir $6(\mu+1)$ valeurs différentes, excepté pour $\mu = 1$, où ce nombre se réduit à 6.

La seconde partie traite des fonctions à modules réels et moindres que l'unité. Au lieu des fonctions $\varpi(x,c)$, $\varpi_0(x,c)$, $\Pi(x,c,a)$ j'en introduis trois autres, savoir d'abord la fonction $\lambda(\theta)$, déterminée par l'équation

$$\theta = \int_0^{\lambda\theta} \frac{dx}{\varDelta(x,c)},$$

C'est la fonction inverse de la première espèce. En mettant $x = \lambda\theta$ dans les expressions de $\varpi_0(x,c)$, $\Pi(x,c,a)$, elles deviendront de la forme:

$$\varpi_0(x,c) = \int \lambda^2\theta \,.\, d\theta;$$

$$\Pi(x,c,a) = \int \frac{d\theta}{1 - \frac{\lambda^2\theta}{a^2}}.$$

*) Ce théorème a également lieu, si $\varDelta(x,c)$ est la racine carrée d'une fonction entière d'un degré *quelconque*.



Sous cette forme, les fonctions elliptiques offrent des propriétés très remarquables, et sont beaucoup plus faciles à traiter. C'est surtout la fonction $\lambda\theta$ qui mérite une attention particulière. Cette fonction a été l'objet d'un mémoire qui est inséré dans les tomes II et III de ce journal*), où j'en ai démontré le premier quelques-unes des propriétés fondamentales. On en trouvera davantage dans ce mémoire. Je vais indiquer rapidement quelques-uns des résultats auxquels je suis parvenu:

1. La fonction $\lambda\theta$ jouit de la propriété remarquable d'être périodique de deux manières différentes, savoir non seulement pour des valeurs réelles de la variable, mais encore pour des valeurs imaginaires. En effet si l'on fait pour abréger

$$\frac{\varpi}{2}=\int_0^1\frac{dx}{\varDelta(x,c)},\quad \frac{\omega}{2}=\int_0^1\frac{dx}{\varDelta(x,b)},$$

où $b=\sqrt{1-c^2}$ et $\sqrt{-1}=i$, on aura

$$\lambda(\theta+2\varpi)=\lambda\theta;\quad \lambda(\theta+\omega i)=\lambda\theta.$$

2. La fonction $\lambda\theta$ devient égale à zéro et à l'infini, pour une infinité de valeurs réelles et imaginaires de θ

$$(c)\qquad \lambda(m\varpi+n\omega i)=0,\quad \lambda[m\varpi+(n+\tfrac{1}{2})\omega i]=\tfrac{1}{0},$$

où m et n sont des nombres entiers quelconques, positifs ou négatifs. De même on a

$$\lambda\theta'=\lambda\theta,$$

si

$$\theta'=(-1)^m\theta+m\varpi+n\omega i;$$

cette relation est nécessaire.

3. La propriété fondamentale de $\lambda\theta$ est exprimée par l'équation

$$\lambda(\theta'+\theta).\lambda(\theta'-\theta)=\frac{\lambda^2\theta'-\lambda^2\theta}{1-c^2\lambda^2\theta.\lambda^2\theta'},$$

où θ' et θ sont des variables quelconques, réelles ou imaginaires.

4. La fonction $\lambda\theta$ pourra se développer en facteurs et en fractions de beaucoup de manières; par exemple si l'on fait pour abréger

$$q=e^{-\frac{\omega}{\varpi}\pi},\quad p=e^{-\frac{\varpi}{\omega}\pi},$$

*) Mémoire XVI de cette édition.

on a

$$\lambda(\theta\varpi) = \frac{2}{\sqrt{c}} \sqrt[4]{q} \cdot \sin(\pi\theta) \frac{[1-2q^2\cos(2\theta\pi)+q^4][1-2q^4\cos(2\theta\pi)+q^8]\ldots}{[1-2q\cos(2\theta\pi)+q^2][1-2q^3\cos(2\theta\pi)+q^6]\ldots}$$

$$= \frac{4\sqrt{q}}{c} \cdot \frac{\pi}{\varpi} \cdot \left(\frac{1}{1-q}\sin(\theta\pi) + \frac{q}{1-q^3}\sin(3\theta\pi) + \frac{q^2}{1-q^5}\sin(5\theta\pi) + \cdots\right),$$

$$\lambda\left(\frac{\varpi}{2} - \theta\omega\right) = \frac{1}{\sqrt{c}} \cdot \frac{(1-pe^{-2\pi\theta})(1-pe^{2\pi\theta})(1-p^3e^{-2\pi\theta})(1-p^3e^{2\pi\theta})\ldots}{(1+pe^{-2\pi\theta})(1+pe^{2\pi\theta})(1+p^3e^{-2\pi\theta})(1+p^3e^{2\pi\theta})\ldots}.$$

On pourra exprimer d'une manière analogue les fonctions de seconde et de troisième espèce. Les deux formules précédentes sont au fond les mêmes que les formules (c).

5. Une des propriétés les plus fécondes de la fonction $\lambda\theta$ est la suivante: [On a fait pour abréger: $\varDelta\theta = \pm\sqrt{(1-\lambda^2\theta)(1-c^2\lambda^2\theta)}$].

„Si l'équation

$$(\lambda\theta)^{2n} + a_{n-1}(\lambda\theta)^{2n-2} + \cdots + a_1(\lambda\theta)^2 + a_0 = [b_0\lambda\theta + b_1(\lambda\theta)^3 + \cdots + b_{n-2}(\lambda\theta)^{2n-3}]\varDelta\theta$$

est satisfaite, en mettant pour θ $2n$ quantités $\theta_1, \theta_2, \ldots \theta_{2n}$, telles que $\lambda^2\theta_1, \lambda^2\theta_2, \ldots \lambda^2\theta_{2n}$ soient différentes entre elles, on aura toujours

$$\lambda(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_{2n}) = 0,$$

$$-\lambda(\theta_{2n}) = +\lambda(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_{2n-1}) = \frac{-a_0}{\lambda\theta_1 \cdot \lambda\theta_2 \ldots \lambda\theta_{2n-1}};$$

les coefficiens $a_0, a_1, \ldots, b_0, b_1, \ldots$ pourront être quelconques, et il est facile de voir qu'on pourra les déterminer de sorte que $\theta_1, \theta_2, \ldots \theta_{2n-1}$ soient donnés."

Voici une autre propriété plus générale:

„Si l'on fait

$$p^2 - q^2(1-x^2)(1-c^2x^2) = A(x-\lambda\theta_1)(x-\lambda\theta_2)\ldots(x-\lambda\theta_\mu),$$

où p et q sont des fonctions entières quelconques de *l'indéterminée* x, on pourra toujours prendre les quantités $\theta_1, \theta_2, \ldots \theta_\mu$ telles que l'expression

$$\lambda(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \cdots + \theta_\mu)$$

soit égale à zéro ou à l'infini."

Ainsi par exemple, si

$$(d) \qquad p^2 - q^2(1-x^2)(1-c^2x^2) = A(x^2 - \lambda^2\theta)^\mu,$$

l'une des fonctions p et q étant paire et l'autre impaire, on aura

1) si p est pair:

$$\lambda(\mu\theta)=0, \text{ si } \mu \text{ est pair et}$$
$$\lambda(\mu\theta)=\tfrac{1}{0}, \text{ si } \mu \text{ est impair;}$$

2) si p est impair:

$$\lambda(\mu\theta)=0, \text{ si } \mu \text{ est impair et}$$
$$\lambda(\mu\theta)=\tfrac{1}{0}, \text{ si } \mu \text{ est pair.}$$

De là il suit encore que, si l'équation (d) a lieu, on aura toujours

$$\lambda\theta=\lambda\left(\frac{m\varpi+\frac{1}{2}n\omega i}{\mu}\right),$$

où m et n sont entiers et moindres que μ.

6. Il existe entre les quantités $\lambda\left(\frac{m\varpi+n\omega i}{2\mu+1}\right)$ et les racines $(2\mu+1)^{\text{ièmes}}$ de l'unité des relations bien remarquables, savoir si l'on fait pour abréger

$$\delta=\cos\frac{2\pi}{2\mu+1}+\sqrt{-1}\,.\sin\frac{2\pi}{2\mu+1},$$

on aura, quels que soient les nombres entiers m et μ:

$$0=\lambda\left(\frac{2m\varpi}{2\mu+1}\right)+\delta^{k}.\lambda\left(\frac{2m\varpi+\omega i}{2\mu+1}\right)+\delta^{2k}.\lambda\left(\frac{2m\varpi+2\omega i}{2\mu+1}\right)+\delta^{3k}.\lambda\left(\frac{2m\varpi+3\omega i}{2\mu+1}\right)$$
$$+\cdots+\delta^{2\mu k}.\lambda\left(\frac{2m\varpi+2\mu\omega i}{2\mu+1}\right),$$

$$0=\lambda\left(\frac{m\omega i}{2\mu+1}\right)+\delta^{k'}.\lambda\left(\frac{2\varpi+m\omega i}{2\mu+1}\right)+\delta^{2k'}.\lambda\left(\frac{4\varpi+m\omega i}{2\mu+1}\right)+\delta^{3k'}.\lambda\left(\frac{6\varpi+m\omega i}{2\mu+1}\right)$$
$$+\cdots+\delta^{2\mu k'}.\lambda\left(\frac{4\mu\varpi+m\omega i}{2\mu+1}\right).$$

D'ailleurs toutes les quantités $\lambda\left(\frac{m\varpi+n\omega i}{2\mu+1}\right)$ sont les racines d'une même équation du degré $(2\mu+1)^2$, dont les coefficiens sont des fonctions rationnelles de c^2.

7. Si la fonction

$$\int\frac{dx}{\Delta(x,c)},$$

dont le module c est réel et moindre que l'unité, peut être transformée dans une autre

$$\varepsilon\int\frac{dy}{\Delta(y,c')},$$

dont le module c' est réel ou imaginaire, en mettant pour y une fonction algébrique quelconque de x, il faut nécessairement que le module c' soit déterminé par l'une des deux équations

$$\sqrt[4]{c'} = \sqrt{2}\,.\,\sqrt[8]{q_1}\,.\,\frac{(1+q_1^2)(1+q_1^4)(1+q_1^6)\ldots}{(1+q_1)(1+q_1^3)(1+q_1^5)\ldots},$$

$$\sqrt[4]{c'} = \frac{1-q_1}{1+q_1}\cdot\frac{1-q_1^3}{1+q_1^3}\cdot\frac{1-q_1^5}{1+q_1^5}\ldots,$$

où $q_1 = q^\mu$, μ étant rationnel; ou, ce qui revient au même,

$$q_1 = e^{\left(-\mu\frac{\omega}{\varpi}+\mu' i\right)\pi},$$

μ et μ' étant des nombres rationnels quelconques.

8. La théorie de la transformation devient très facile à l'aide des propriétés les plus simples de la fonction $\lambda\theta$. Pour en donner un exemple, soit proposé le problème: satisfaire de la manière la plus générale à l'équation

$$\frac{dy}{\varDelta(y,c')} = \varepsilon\frac{dx}{\varDelta(x,c)},$$

en supposant c et c' moindres que l'unité et y fonction rationnelle, réelle ou imaginaire, de x.

Soit $x = \lambda\theta$, $y = \lambda'\theta'$, en désignant par λ' la fonction qui répond au module c'. L'équation différentielle se changera dans ce cas en $d\theta' = \varepsilon d\theta$, d'où

$$\theta' = \varepsilon\theta + a,$$

a étant une constante. Cela posé, soit

$$y = \frac{\varphi x}{f x},$$

on aura

$$\lambda'(\varepsilon\theta + a) = \frac{\varphi(\lambda\theta)}{f(\lambda\theta)}.$$

En mettant $\theta + 2\varpi$, $\theta + \omega i$ au lieu de θ, $\lambda\theta$ ne change pas de valeur et par conséquent on doit avoir

$$\lambda'(\varepsilon\theta + 2\varepsilon\varpi + a) = \lambda'(\varepsilon\theta + a),$$

$$\lambda'(\varepsilon\theta + \varepsilon\omega i + a) = \lambda'(\varepsilon\theta + a).$$

Donc, si l'on désigne par ϖ' et ω' les valeurs de ϖ et ω qui répondent au module c', on aura en vertu de l'équation (2):

$$2\varepsilon\varpi = 2m\varpi' + n\omega' i,$$
$$\varepsilon\omega i = 2m'\varpi' + n'\omega' i,$$

ce qui donne

$$\varepsilon = m.\frac{\varpi'}{\varpi} + \frac{n}{2}\cdot\frac{\omega'}{\varpi} i = n'\frac{\omega'}{\omega} - 2m'\frac{\varpi'}{\omega} i;$$

donc

$$m\frac{\varpi'}{\varpi} = n'\frac{\omega'}{\omega}, \quad \frac{n}{2}\cdot\frac{\omega'}{\varpi} = -2m'\frac{\varpi'}{\omega},$$

ou bien

$$\frac{\varpi'}{\omega'} = \frac{n'}{m}\cdot\frac{\varpi}{\omega} = -\frac{n}{4m'}\cdot\frac{\omega}{\varpi}.$$

Maintenant, si c est indéterminé, cette équation ne pourra subsister à moins qu'on n'ait ou $n=0$, $m'=0$, ou $n'=0$, $m=0$. Dans le premier cas ε est réel et égal à

$$m\frac{\varpi'}{\varpi} = n'\frac{\omega'}{\omega},$$

et dans le second cas ε est imaginaire et égal à

$$\frac{n}{2}\cdot\frac{\omega'}{\varpi} i = -2m'\frac{\varpi'}{\omega} i.$$

Supposons ε réel. Alors on aura ce théorème:

„Si deux fonctions réelles peuvent être transformées l'une dans l'autre, il faut qu'on ait entre les fonctions complètes ϖ, ω, ϖ', ω' cette relation:

$$\frac{\varpi'}{\omega'} = \frac{n'}{m}\cdot\frac{\varpi}{\omega},$$

où n' et m sont des nombres entiers.“

On pourra démontrer que si cette condition est remplie, on pourra effectivement satisfaire à l'équation

$$\int\frac{dy}{\Delta(y,c')} = m\frac{\varpi'}{\varpi}\int\frac{dx}{\Delta(x,c)}.$$

Rien n'est plus simple que de trouver l'expression de y. Il suffit pour cela de chercher les racines des deux équations $\varphi x = 0$, $fx = 0$.

Désignons par $\lambda\delta$ et $\lambda\delta'$ deux racines quelconques appartenant respectivement à ces deux équations, on aura, pour déterminer δ et δ', ces deux équations:

$$\lambda'(\varepsilon\delta + a) = 0, \quad \lambda'(\varepsilon\delta' + a) = \tfrac{1}{0},$$

ce qui donne

$$\delta = -\frac{a}{\varepsilon} + \frac{k}{\varepsilon}\varpi' + \frac{k'}{\varepsilon}\omega' i; \quad \delta' = -\frac{a}{\varepsilon} + \frac{k}{\varepsilon}\varpi' + (k' + \tfrac{1}{2})\frac{\omega'}{\varepsilon} i,$$

c'est-à-dire:

$$\delta = -\frac{a}{\varepsilon} + \frac{k}{m}\varpi + \frac{k'}{n'}\omega i; \quad \delta' = -\frac{a}{\varepsilon} + \frac{k}{m}\varpi + (k' + \tfrac{1}{2})\frac{\omega}{n'} i,$$

k et k' étant des nombres entiers. Pour déterminer a, il suffit de remarquer que $\lambda\theta$ ne change pas de valeur en mettant $\varpi - \theta$ au lieu de θ. On aura donc

$$\lambda'(\varepsilon\varpi - \varepsilon\theta + a) = \lambda'(\varepsilon\theta + a),$$

ce qui donne

$$a = \tfrac{1}{2}[(2\mu + 1 - m)\varpi' + \mu'\omega' i).$$

Dans le cas où m est impair, on pourra toujours faire $a = 0$.

Connaissant les valeurs de δ et δ', on aura immédiatement les racines des deux équations $\varphi x = 0$, $fx = 0$, et par suite l'expression des fonctions φx et fx en produits de facteurs. Les formules les plus simples répondent aux cas de $m = 1$ ou $n' = 1$, et elles sont les seules nécessaires, comme il est aisé de le voir par l'équation $\frac{\varpi'}{\omega'} = \frac{n'}{m} \cdot \frac{\varpi}{\omega}$. On pourra aussi se servir des expressions de la fonction $\lambda\theta$ en produits infinis rapportées plus haut. Je l'ai fait voir dans un mémoire qui a été envoyé à M. *Schumacher* pour être inséré dans son journal*).

9. Le cas où un module c peut être transformé en son complément $\sqrt{1 - c^2} = b$, mérite une attention particulière. En vertu de l'équation $\frac{\varpi'}{\omega'} = \frac{n}{m} \cdot \frac{\varpi}{\omega}$, on aura alors

$$\frac{\varpi}{\omega} = \sqrt{\frac{m}{n}} \quad \text{et} \quad \frac{dy}{\Delta(y, b)} = \sqrt{mn}\,\frac{dx}{\Delta(x, c)}.$$

Le module c sera déterminé par une équation algébrique, qui paraît être résoluble par des radicaux; au moins cela aura lieu si $\frac{m}{n}$ est un carré parfait. Dans tous les cas il est facile d'exprimer c par des produits infinis. En effet, si $\frac{\varpi}{\omega} = \sqrt{\frac{m}{n}}$, on a

*) Mémoire XX de cette édition.

$$\sqrt[4]{c} = \sqrt{2} \cdot e^{-\frac{1}{8}\pi\sqrt{\frac{m}{n}}} \cdot \frac{\left(1+e^{-2\pi\sqrt{\frac{m}{n}}}\right)\left(1+e^{-4\pi\sqrt{\frac{m}{n}}}\right)\cdots}{\left(1+e^{-\pi\sqrt{\frac{m}{n}}}\right)\left(1+e^{-3\pi\sqrt{\frac{m}{n}}}\right)\cdots}$$

$$= \frac{\left(1-e^{-\pi\sqrt{\frac{n}{m}}}\right)\left(1-e^{-3\pi\sqrt{\frac{n}{m}}}\right)\cdots}{\left(1+e^{-\pi\sqrt{\frac{n}{m}}}\right)\left(1+e^{-3\pi\sqrt{\frac{n}{m}}}\right)\cdots}.$$

Si deux modules c' et c peuvent être transformés l'un dans l'autre, ils auront entre eux une relation algébrique. Il ne paraît pas possible en général d'en tirer la valeur de c' en c à l'aide de radicaux*), mais il est remarquable, que cela est toujours possible si c peut être transformé en son complément, par exemple si $c^2 = \frac{1}{2}$.

Les équations modulaires jouissent d'ailleurs de la propriété remarquable, que toutes leurs racines peuvent être exprimées *rationnellement* par deux d'entre elles. De même on pourra exprimer toutes les racines par l'une d'elles à l'aide de radicaux.

10. On pourra développer la fonction $\lambda\theta$ de la manière suivante:

$$\lambda\theta = \frac{\theta + a\theta^3 + a'\theta^5 + \cdots}{1 + b'\theta^4 + b''\theta^6 + \cdots},$$

où le numérateur et le dénominateur sont des séries toujours convergentes. En faisant

$$\varphi\theta = \theta + a\theta^3 + a'\theta^5 + \cdots$$
$$f\theta = 1 + b'\theta^4 + b''\theta^6 + \cdots$$

ces deux fonctions auront la propriété exprimée par les deux équations

*) Dans le cas par exemple où y est de la forme:

$$y = \sqrt{\frac{c^5}{c'}} \cdot \frac{x(a^2 - x^2)(a_1^2 - x^2)}{(1 - c^2a^2x^2)(1 - c^2a_1^2x^2)},$$

l'équation entre c' et c est du sixième degré. Or je suis parvenu à démontrer rigoureusement, que si une équation du sixième degré est résoluble à l'aide de *radicaux*, il doit arriver l'un de deux, ou cette équation sera décomposable en deux autres du troisième degré, dont les coefficiens dépendent d'une équation du second degré, ou elle sera décomposable en trois équations du second degré, dont les coefficiens sont déterminés par une équation du troisième degré. L'équation entre c' et c ne paraît guère être décomposable de cette manière.

$$\varphi(\theta'+\theta).\varphi(\theta'-\theta)=(\varphi\theta.f\theta')^2-(\varphi\theta'.f\theta)^2,$$
$$f(\theta'+\theta).f(\theta'-\theta)=(f\theta.f\theta')^2-c^2(\varphi\theta.\varphi\theta')^2,$$

où θ' et θ sont deux variables indépendantes. Ainsi par exemple si l'on fait $\theta'=\theta$, on a

$$f(2\theta)=(f\theta)^4-c^2(\varphi\theta)^4.$$

Ces fonctions jouissent de beaucoup de propriétés remarquables.

11. Les formules présentées dans ce qui précède ont lieu avec quelques restrictions, si le module c est quelconque, réel ou imaginaire.

PREMIÈRE PARTIE.

DES FONCTIONS ELLIPTIQUES EN GÉNÉRAL.

CHAPITRE I.

Propriétés générales des fonctions elliptiques.

Les fonctions elliptiques jouissent comme on sait de cette propriété remarquable, que la somme d'un nombre quelconque de fonctions peut être exprimée par une seule fonction de la même espèce, en y ajoutant une certaine expression *algébrique* et *logarithmique*. La découverte de cette propriété est due, si je ne me trompe, à M. *Legendre*. La démonstration que cet illustre géomètre en a donnée, est fondée sur l'intégration algébrique de l'équation différentielle

$$\frac{dy}{\sqrt{\alpha+\beta y+\gamma y^2+\delta y^3+\varepsilon y^4}}=\frac{dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4}}.$$

L'objet de ce chapitre sera de démontrer cette propriété des fonctions elliptiques, mais en nous appuyant sur des considérations différentes de celles de M. *Legendre*.

§ 1.

Démonstration d'un théorème fondamental.

Nous allons commencer par établir un théorème général qui servira de

fondement de tout ce qui va être exposé dans ce mémoire, et qui en même temps exprime une propriété très remarquable des fonctions elliptiques.

Théorème I. Soient fx et φx deux fonctions quelconques *entières* de x, l'une paire, l'autre impaire, et dont les coefficiens soient supposés variables. Cela posé, si l'on décompose la fonction entière paire

$$(fx)^2-(\varphi x)^2(\varDelta x)^2$$

en facteurs de la forme $x^2-x_1^2$, de sorte qu'on ait

(1) $$(fx)^2-(\varphi x)^2(\varDelta x)^2=A(x^2-x_1^2)(x^2-x_2^2)(x^2-x_3^2)\ldots(x^2-x_\mu^2),$$

où A est indépendant de l'indéterminée x, je dis qu'on aura

(2) $$\Pi x_1+\Pi x_2+\Pi x_3+\cdots+\Pi x_\mu=C-\frac{a}{2\varDelta a}\log\frac{fa+\varphi a.\varDelta a}{fa-\varphi a.\varDelta a},$$

a désignant le paramètre de la fonction Πx, de sorte que

(3) $$\Pi x=\int\frac{dx}{\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\varDelta x}.$$

La quantité C est la constante d'intégration.

Démonstration. Supposons d'abord que tous les coefficiens des diverses puissances de x dans les fonctions fx et φx soient les variables indépendantes. Alors toutes les quantités $x_1, x_2, \ldots x_\mu$ seront évidemment inégales et fonctions de ces variables. En désignant par x l'une quelconque d'entre elles, l'équation (1) donnera

(4) $$(fx)^2-(\varphi x)^2(\varDelta x)^2=0,$$

d'où

(5) $$fx+\varphi x.\varDelta x=0.$$

Cela posé, faisons pour abréger

$$\psi x=(fx)^2-(\varphi x)^2(\varDelta x)^2,$$

et désignons par $\psi' x$ la dérivée de cette fonction par rapport à x seul. De même désignons par la caractéristique δ la différentiation qui se rapporte aux seules variables indépendantes. Alors on tire de l'équation (4) en différentiant

$$\psi' x.dx+2fx.\delta fx-2\varphi x.\delta\varphi x.(\varDelta x)^2=0;$$

mais en vertu de l'équation (5) on a

$$fx = -\varphi x . \Delta x,$$

$$\varphi x(\Delta x)^2 = -fx . \Delta x,$$

donc, en substituant,

$$\psi' x . dx - 2\Delta x(\varphi x . \delta fx - fx . \delta\varphi x) = 0.$$

De là on tire, en divisant par $\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)\Delta x$,

$$\frac{dx}{\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)\Delta x} = \frac{2(\varphi x . \delta fx - fx . \delta\varphi x)}{\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)\psi' x},$$

et en intégrant

$$\Pi x = \int \frac{2(\varphi x . \delta fx - fx . \delta\varphi x)}{\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)\psi' x}.$$

En faisant maintenant $x = x_1, x_2, \ldots x_\mu$, en ajoutant les résultats et en faisant pour abréger

$$2(\varphi x . \delta fx - fx . \delta\varphi x) = \theta x,$$

on obtiendra

(6) $$\Pi x_1 + \Pi x_2 + \cdots + \Pi x_\mu$$
$$= \int \left(\frac{\theta x_1}{\left(1 - \frac{x_1^2}{a^2}\right)\psi' x_1} + \frac{\theta x_2}{\left(1 - \frac{x_2^2}{a^2}\right)\psi' x_2} + \cdots + \frac{\theta x_\mu}{\left(1 - \frac{x_\mu^2}{a^2}\right)\psi' x_\mu} \right).$$

Maintenant θx étant une fonction entière de x dont le degré est évidemment inférieur à celui de la fonction ψx, le second membre, d'après un théorème connu sur la décomposition des fonctions fractionnaires, se réduit à

$$\int \frac{a\theta a}{2\psi a},$$

ou, en substituant la valeur de θa et celle de ψa, à

$$a\int \frac{\varphi a . \delta fa - fa . \delta\varphi a}{(fa)^2 - (\varphi a)^2(\Delta a)^2}.$$

Cette intégrale se trouvera facilement; en effet, Δa étant constant, on aura en intégrant d'après les règles connues,

$$C - \frac{a}{2\Delta a}\log\frac{fa + \varphi a . \Delta a}{fa - \varphi a . \Delta a},$$

C étant la constante d'intégration. Cette fonction mise à la place du second membre de l'équation (6), donne précisément la formule (2) qu'il s'agissait de démontrer.

La propriété de la fonction $\Pi(x)$, exprimée par la formule (2), est d'autant plus remarquable, qu'elle aura lieu en supposant la fonction $\varDelta x$ racine carrée d'une fonction quelconque entière et paire de x. En effet la démonstration précédente est fondée sur cette seule propriété de la fonction $\varDelta x$. On a ainsi une propriété générale d'une classe très étendue de fonctions transcendantes*).

La formule (2) étant démontrée pour le cas où les quantités x_1, x_2, ... x_μ sont inégales, il est évident qu'elle aura encore lieu en établissant entre les variables indépendantes des relations quelconques qui pourront rendre égales plusieurs des quantités $x_1, x_2, \ldots x_\mu$.

Il faut observer que les signes des radicaux $\varDelta x_1, \varDelta x_2, \ldots \varDelta x_\mu$ ne sont pas arbitraires. Ils doivent être pris tels qu'ils satisfassent aux équations

(7) $$fx_1+\varphi x_1.\varDelta x_1=0,\ fx_2+\varphi x_2.\varDelta x_2=0, \ldots fx_\nu+\varphi x_\mu.\varDelta x_\mu=0,$$

qu'on tire de l'équation (5), en mettant pour x les valeurs $x_1, x_2, \ldots x_\mu$.

La formule (2) exprime une propriété de la fonction de la troisième espèce $\Pi(x)$. Or rien n'est plus facile que d'en déduire des propriétés semblables des fonctions:

(8) $$\varpi x=\int\frac{dx}{\varDelta x} \quad \text{et} \quad \varpi_0 x=\int\frac{x^2dx}{\varDelta x}.$$

D'abord si l'on fait a infini, on a $\Pi x=\varpi x$; mais il est clair que la partie logarithmique de la formule (2) s'évanouira dans ce cas; le second membre se réduira donc à une constante, et par conséquent on aura

(9) $$\varpi x_1+\varpi x_2+\cdots+\varpi x_\mu=C.$$

De même si l'on développe les deux membres de l'équation (2) suivant les puissances ascendantes de $\frac{1}{a}$, on aura, en comparant les coefficiens de $\frac{1}{a^2}$ dans les deux membres,

(10) $$\varpi_0 x_1+\varpi_0 x_2+\cdots+\varpi_0 x_\mu=C-p,$$

où p est une fonction *algébrique* des variables, savoir le coefficient de $\frac{1}{a^2}$ dans le développement de la fonction

*) Voyez sur ce sujet un mémoire inséré dans le tome III, p. 313, de ce journal. On trouve un théorème beaucoup plus général t. IV, p. 200.

$$\frac{a}{2\varDelta a}\log\frac{fa+\varphi a.\varDelta a}{fa-\varphi a.\varDelta a}$$

suivant les puissances ascendantes de $\frac{1}{a}$.

En vertu des formules (2, 9, 10) il est clair, qu'en désignant par ψx une fonction quelconque de la forme:

$$(11)\left\{\begin{array}{l}\psi x=\int\left\{A+Bx^2+\frac{\alpha}{1-\frac{x^2}{a^2}}+\frac{\alpha_1}{1-\frac{x^2}{a_1^2}}+\cdots+\frac{\alpha_\nu}{1-\frac{x^2}{a_\nu^2}}\right\}\frac{dx}{\varDelta x},\\ \text{on aura}\\ \psi x_1+\psi x_2+\cdots+\psi x_\mu=C-B.p-\frac{\alpha a}{2\varDelta a}\log\frac{fa+\varphi a\varDelta a}{fa-\varphi a\varDelta a}\\ \qquad -\frac{\alpha_1 a_1}{2\varDelta a_1}\log\frac{fa_1+\varphi a_1\varDelta a_1}{fa_1-\varphi a_1\varDelta a_1}-\cdots-\frac{\alpha_\nu a_\nu}{2\varDelta a_\nu}\log\frac{fa_\nu+\varphi a_\nu\varDelta a_\nu}{fa_\nu-\varphi a_\nu\varDelta a_\nu}.\end{array}\right.$$

On voit que cette équation a lieu quelle que soit la constante A.

§ 2.

Propriété fondamentale des fonctions elliptiques, tirée des formules précédentes.

Dans ce qui précède les quantités $x_1, x_2, x_3, \ldots x_\mu$ sont regardées comme fonctions des coefficiens variables dans fx et φx. Supposons maintenant qu'on détermine ces coefficiens de manière qu'un certain nombre des quantités $x_1, x_2, \ldots x_\mu$ prennent des valeurs données mais variables. Soient

$$x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_m$$

des variables indépendantes. Alors les coefficiens dans fx, φx deviendront des fonctions de ces quantités. En les substituant dans l'équation

$$(fx)^2-(\varphi x)^2(\varDelta x)^2=0,$$

le premier membre sera divisible par le produit

$$(x^2-x_1^2)(x^2-x_2^2)\cdots(x^2-x_m^2),$$

et le quotient, égalé à zéro, donnera une équation du degré $\mu-m$ par rapport à x^2, dont les racines seront les $\mu-m$ quantités

$$x_{m+1}^2,\ x_{m+2}^2,\ \ldots\ x_\mu^2,$$

qui par suite sont des fonctions algébriques de $x_1, x_2, \ldots x_m$.



Le cas le plus simple et le plus important est celui où le nombre $\mu - m$ a la moindre valeur possible. Pour avoir ce minimum, il faut donner aux fonctions fx et φx la forme la plus générale pour laquelle le degré de l'équation $(fx)^2 - (\varphi x)^2 (\varDelta x)^2 = 0$ est égal à 2μ.

Il est facile de voir que le plus grand nombre de coefficiens qu'il soit possible à introduire dans fx et φx, est μ. Mais, puisqu'en vertu de la forme des équations (7) on peut supposer un de ces coefficiens égal à l'unité, sans diminuer la généralité, on n'aura réellement que $\mu - 1$ indéterminées. On pourra donc faire $m = \mu - 1$, en sorte que toutes les quantités $x_1, x_2, \ldots x_\mu$, excepté une seule, seront des variables indépendantes. Par là on aura immédiatement la propriété fondamentale des fonctions elliptiques dont il a été question au commencement du chapitre.

Il y a deux cas différens à considérer, savoir μ pair ou impair.

Premier cas, si μ est pair et égal à $2n$.

A. Si la fonction fx est paire et φx impaire, il est clair que fx doit être du degré $2n$, et φx du degré $2n - 3$. Faisons donc

(12) $$\begin{cases} fx = a_0 + a_1 x^2 + a_2 x^4 + \cdots + a_{n-1} x^{2n-2} + x^{2n}, \\ \varphi x = (b_0 + b_1 x^2 + b_2 x^4 + \cdots + b_{n-2} x^{2n-4}) x \end{cases}$$

et

(13) $$(fx)^2 - (\varphi x)^2 (1 - x^2)(1 - c^2 x^2) = (x^2 - x_1^2)(x^2 - x_2^2) \ldots (x^2 - x_{2n-1}^2)(x^2 - y^2),$$

où nous avons mis y au lieu de x_{2n}, qui sera une fonction des variables x_1, $x_2, \ldots x_{2n-1}$. Les coefficiens $a_0, a_1, a_2, \ldots a_{n-1}, b_0, b_1, \ldots b_{n-2}$ sont déterminés en fonction de $x_1, x_2, \ldots$ à l'aide des $\mu - 1$ équations (7), savoir:

(13') $$fx_1 + \varphi x_1 . \varDelta x_1 = 0, \; fx_2 + \varphi x_2 . \varDelta x_2 = 0, \ldots fx_{2n-1} + \varphi x_{2n-1} . \varDelta x_{2n-1} = 0.$$

Ces équations, étant linéaires par rapport aux inconnues, donneront celles-ci en fonction *rationnelle* des quantités

$$x_1, \; x_2, \; \ldots \; x_{2n-1}, \; \varDelta x_1, \; \varDelta x_2, \; \ldots \; \varDelta x_{2n-1}.$$

Il est clair qu'on pourra donner aux radicaux $\varDelta x_1, \varDelta x_2, \ldots \varDelta x_{2n-1}$ des signes arbitraires.

Pour avoir la valeur de y, faisons dans l'équation (13) $x = 0$. Cela donne

$$a_0^2 = x_1^2 x_2^2 \ldots x_{2n-1}^2 . y^2,$$

d'où l'on tire

(14) $$y = -\frac{a_0}{x_1 \cdot x_2 \ldots x_{2n-1}}.$$

La quantité y est donc une fonction rationnelle des variables $x_1, x_2, \ldots$ et des radicaux correspondans. Si maintenant y a cette valeur et si l'on fait de plus

$$\varDelta x_{2n} = -\varDelta y,$$

les formules (2, 9, 10) donneront

(15) $$\begin{cases} \varpi x_1 + \varpi x_2 + \cdots + \varpi x_{2n-1} = \varpi y + C, \\ \varpi_0 x_1 + \varpi_0 x_2 + \cdots + \varpi_0 x_{2n-1} = \varpi_0 y - b_{n-2} + C, \\ \Pi x_1 + \Pi x_2 + \cdots + \Pi x_{2n-1} = \Pi y - \frac{a}{2\varDelta a} \log \frac{fa + \varphi a \cdot \varDelta a}{fa - \varphi a \cdot \varDelta a} + C. \end{cases}$$

Quant aux fonctions ϖy, $\varpi_0 y$, Πy, il faut bien observer que le signe du radical $\varDelta y$ n'est pas toujours le même. Il est dans tous les cas déterminé par la dernière des équations (7) qui, en mettant pour x_{2n} et $\varDelta x_{2n}$ leurs valeurs y et $-\varDelta y$, deviendra

$$fy - \varphi y \cdot \varDelta y = 0.$$

On en tire

(16) $$\varDelta y = \frac{fy}{\varphi y},$$

ce qui fait voir que le radical $\varDelta y$, comme y, est une fonction *rationnelle* des quantités $x_1, x_2, \ldots \varDelta x_1, \varDelta x_2 \ldots$

La fonction y a la propriété d'être zéro en même temps que les variables $x_1, x_2, \ldots x_{2n-1}$. En effet si l'on fait

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_{2n-1} = 0,$$

l'équation (13) ne pourra subsister à moins que tous les coefficiens $a_0, a_1, \ldots a_{n-1}, b_0, b_1, \ldots b_{n-2}$ ne soient égaux à zéro, donc cette équation se réduit à

$$x^{4n} = x^{4n-2}(x^2 - y^2),$$

donc on aura $y = 0$.

On pourrait donner le signe contraire au second membre de l'équation (14). Celui que nous avons choisi est tel que le radical $\varDelta y$ se réduit à $+1$, en supposant $x_1 = x_2 = x_3 = \cdots = x_{2n-1} = 0$, et en même temps $\varDelta x_1 = \varDelta x_2 = \cdots = \varDelta x_{2n-1} = +1$. Pour démontrer cela, supposons $x_1, x_2, \ldots x_{2n-1}$ infiniment petits; on aura alors

$$\varDelta x_1 = \varDelta x_2 = \cdots = \varDelta x_{2n-1} = 1,$$

et par conséquent les équations (13′) font voir que $x_1, x_2, \ldots x_{2n-1}$ satisfont à l'équation

(17) $$x^{2n} + a_{n-1}x^{2n-2} + b_{n-2}x^{2n-3} + \cdots + b_0 x + a_0 = 0.$$

Cette équation étant du degré $2n$, doit avoir encore une racine. En la désignant par z, on aura

$$a_0 = z . x_1 . x_2 \ldots x_{2n-1},$$

donc en vertu de l'équation (14),

$$z = -y.$$

L'équation est donc satisfaite en faisant $x = -y$. Or cela donne

$$y^{2n} + a_{n-1}y^{2n-2} + \cdots + a_1 y^2 + a_0 = (b_0 + b_1 y^2 + \cdots + b_{n-2} y^{2n-4})y,$$

donc en vertu de l'équation (16):

(18) $$\varDelta y = +1.$$

On pourra encore remarquer que y se réduit pour des valeurs infiniment petites de $x_1, x_2, \ldots x_{2n-1}$ à $x_1 + x_2 + \cdots + x_{2n-1}$. On le voit par l'équation (17), qui, n'ayant pas de second terme, donnera la somme des racines égale à zéro, c'est-à-dire

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{2n-1} - y = 0,$$

donc

(19) $$y = x_1 + x_2 + \cdots + x_{2n-1}.$$

B. Si fx est impair et φx pair, fx doit être du degré $2n-1$ et φx du degré $2n-2$. Donc on aura dans ce cas $2n-1$ coefficiens indéterminés, et on parviendra à des formules semblables aux formules (15); mais la fonction y aura une valeur différente. Il sera facile de démontrer qu'elle sera égale à $\frac{1}{cy}$, la valeur de y étant déterminée par l'équation (14).

Second cas, si μ est un nombre impair et égal à $2n+1$.

A. Si fx est impair et φx pair, on aura

(20) $$\begin{cases} fx = (a_0 + a_1 x^2 + a_2 x^4 + \cdots + a_{n-1} x^{2n-2} + x^{2n})x, \\ \varphi x = b_0 + b_1 x^2 + b_2 x^4 + \cdots + b_{n-1} x^{2n-2}, \end{cases}$$

(21) $$(fx)^2 - (\varphi x)^2 (1-x^2)(1-c^2x^2) = (x^2 - x_1^2)(x^2 - x_2^2) \ldots (x^2 - x_{2n}^2)(x^2 - y^2).$$

Les coefficiens $a_0, a_1, \ldots a_{n-1}, b_0, b_1, \ldots b_{n-1}$ sont déterminés par les $2n$ équations linéaires

(22) $fx_1 + \varphi x_1 . \Delta x_1 = 0,\ fx_2 + \varphi x_2 . \Delta x_2 = 0,\ \ldots fx_{2n} + \varphi x_{2n} . \Delta x_{2n} = 0.$

La fonction y le sera par l'équation

$$y = \frac{b_0}{x_1 . x_2 \ldots x_{2n}}, \tag{23}$$

qu'on obtiendra, en faisant dans (21) $x = 0$. Enfin le radical Δy est déterminé par

$$\Delta y = \frac{fy}{\varphi y}. \tag{24}$$

Cela posé on aura

$$(25) \left\{\begin{array}{l} \varpi x_1 + \varpi x_2 + \cdots + \varpi x_{2n} = \varpi y + C, \\ \varpi_0 x_1 + \varpi_0 x_2 + \cdots + \varpi_0 x_{2n} = \varpi_0 y - b_{n-1} + C, \\ \Pi x_1 + \Pi x_2 + \cdots + \Pi x_{2n} = \Pi y - \frac{a}{2\Delta a} \log \frac{fa + \varphi a . \Delta a}{fa - \varphi a . \Delta a} + C. \end{array}\right.$$

Les fonctions y et Δy sont, comme dans le cas précédent, des fonctions rationnelles des variables $x_1, x_2, \ldots x_{2n}$ et des radicaux $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots \Delta x_{2n}$, et on démontrera de la même manière, qu'on aura pour des valeurs infiniment petites de $x_1, x_2, \ldots x_{2n}$,

$$y = x_1 + x_2 + \cdots + x_{2n},\quad \Delta y = +1, \tag{26}$$

si l'on suppose en même temps que les radicaux $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots \Delta x_{2n}$ se réduisent à $+1$; donc y s'évanouira simultanément avec les variables.

Les formules (25) pourront d'ailleurs être déduites sur le champ de celles du premier cas, en y faisant $x_{2n-1} = 0$, et changeant ensuite n en $n+1$.

B. Si fx est pair et φx impair, on parviendra à des formules semblables. La valeur qui en résultera pour la fonction y, sera égale à $\frac{1}{cy}$, où y est déterminé par la formule (23).

On voit par les formules (15, 25), qu'on pourra toujours exprimer la somme d'un nombre donné de fonctions par une seule fonction de la même espèce, en y ajoutant, pour les fonctions de la première espèce, une *constante*, pour celles de la seconde espèce une certaine fonction *algébrique*, et pour celles de la troisième espèce une fonction *logarithmique*.

En remarquant qu'une intégrale quelconque de la forme

$$\int \frac{\theta x \, . \, dx}{\varDelta x},$$

peut être réduite aux fonctions ϖx et $\varpi_0 x$ et à un certain nombre de fonctions de la troisième espèce, en y ajoutant une expression algébrique et logarithmique, il est clair qu'en faisant

$$\psi x = \int \frac{\theta x \, . \, dx}{\varDelta x},$$

on aura la relation

$$(27) \qquad \psi x_1 + \psi x_2 + \psi x_3 + \cdots = \psi y + v + C,$$

où v est exprimable par des fonctions algébriques et logarithmiques.

En vertu des formules (15, 25) il est clair que la fonction v ne change pas de valeur, si l'on ajoute à la fonction rationnelle θx une quantité constante quelconque, de sorte qu'on peut supposer également

$$\psi x = \int (A + \theta x) \frac{dx}{\varDelta x} \cdot$$

Je dis maintenant que la fonction ψ est la seule qui puisse satisfaire à l'équation (27). En effet si l'on différentie cette équation par rapport à l'une des variables indépendantes x_1, x_2, ..., par exemple à x_1, on aura

$$\psi' x_1 \, . \, dx_1 = \psi' y \frac{dy}{dx_1} dx_1 + \frac{dv}{dx_1} dx_1 .$$

Cela posé, si l'on suppose toutes les quantités x_3, x_4, ... y égales à des constantes déterminées, on aura, en mettant x pour x_1, et en faisant

$$\psi' y = A, \quad \frac{dv}{dx_1} = p, \quad \frac{dy}{dx_1} = q:$$

$$\psi' x \, . \, dx = A q dx + p dx,$$

d'où l'on tire

$$\psi x = \int (A q + p) \, dx.$$

La fonction ψx ne pourra donc contenir qu'une seule constante indéterminée A, et par conséquent

$$\psi x = \int (A + \theta x) \frac{dx}{\varDelta x}$$

est son expression générale.

Les propriétés exprimées par les formules de ce paragraphe appartien-

nent donc aux seules fonctions elliptiques. C'est pourquoi je les ai nommées *fondamentales.*

Dans les formules que nous avons données, y a une valeur unique, mais on pourra satisfaire aux mêmes formules, en mettant pour y une expression algébrique contenant une constante arbitraire. En effet, pour avoir une telle expression, il suffit de supposer une des variables $x_1, x_2, x_3, \ldots$ égale à une constante arbitraire, et la valeur de y qu'on obtiendra ainsi, sera la plus générale possible, comme on sait par la théorie de l'intégration des équations différentielles du premier ordre, dont l'intégrale complète ne contient qu'une seule constante arbitraire.

A l'aide des formules (15, 25) on pourra exprimer la somme d'un nombre quelconque de fonctions par une seule fonction. Il est facile d'en tirer les formules suivantes:

$$(28)\quad \begin{cases} \frac{\mu_1}{\mu}\varpi x_1 + \frac{\mu_2}{\mu}\varpi x_2 + \cdots + \frac{\mu_n}{\mu}\varpi x_n = C + \varpi y, \\ \frac{\mu_1}{\mu}\varpi_0 x_1 + \frac{\mu_2}{\mu}\varpi_0 x_2 + \cdots + \frac{\mu_n}{\mu}\varpi_0 x_n = \varpi_0 y - p + C, \\ \frac{\mu_1}{\mu}\Pi x_1 + \frac{\mu_2}{\mu}\Pi x_2 + \cdots + \frac{\mu_n}{\mu}\Pi x_n = \Pi y - \frac{a}{2\Delta a}\log\frac{fa + \varphi a.\Delta a}{fa - \varphi a.\Delta a} + C, \end{cases}$$

où $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n, \mu$ désignent des nombres entiers quelconques, et où y est une fonction *algébrique* des variables $x_1, x_2, \ldots x_n$, de même que les coefficiens de fa et φa. Pour avoir ces formules, il suffit de supposer dans (13) et (21) un certain nombre des quantités $x_1, x_2, \ldots y$ égales entre elles.

Pour déterminer y, fx, φx, on aura cette équation

$$(29)\quad (fx)^2 - (\varphi x)^2(1-x^2)(1-c^2x^2) \\ = (x^2-x_1^2)^{\mu_1}(x^2-x_2^2)^{\mu_2}\ldots(x^2-x_n^2)^{\mu_n}(x^2-y^2)^{\mu},$$

qui doit avoir lieu pour une valeur quelconque de x.

§ 3.

Application au cas où deux fonctions sont données.

Pour réduire deux fonctions à une seule, il suffit de supposer, dans les formules (25), $n=1$. On aura alors

$$fx = a_0 x + x^3,\quad \varphi x = b_0,$$

et pour déterminer les deux constantes a_0 et b_0, on aura les deux équations

$$a_0 x_1 + x_1^3 + b_0 \Delta x_1 = 0, \quad a_0 x_2 + x_2^3 + b_0 \Delta x_2 = 0,$$

qui donnent

$$a_0 = \frac{x_2^3 \Delta x_1 - x_1^3 \Delta x_2}{x_1 \Delta x_2 - x_2 \Delta x_1}, \quad b_0 = \frac{x_2 x_1^3 - x_1 x_2^3}{x_1 \Delta x_2 - x_2 \Delta x_1}.$$

Connaissant b_0, on aura la valeur de y par la formule (23), savoir pour $n = 1$

$$y = \frac{b_0}{x_1 x_2};$$

donc

(30) $$y = \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1 \Delta x_2 - x_2 \Delta x_1},$$

ou bien, en multipliant haut et bas par $x_1 \Delta x_2 + x_2 \Delta x_1$,

(31) $$y = \frac{x_1 \Delta x_2 + x_2 \Delta x_1}{1 - c^2 x_1^2 x_2^2}.$$

Si l'on exprime a_0 et b_0 en x_1, x_2, y, on aura ces expressions très simples:

(32) $$b_0 = x_1 x_2 y, \quad a_0 = \tfrac{1}{2}(c^2 x_1^2 x_2^2 y^2 - x_1^2 - x_2^2 - y^2).$$

L'expression de a_0 se tire de l'équation

$$(a_0 x + x^3)^2 - b_0^2 (1 - x^2)(1 - c^2 x^2) = (x^2 - x_1^2)(x^2 - x_2^2)(x^2 - y^2),$$

en égalant entre eux les coefficiens de x^4 dans les deux membres.

Les fonctions a_0 et y étant déterminées comme on vient de le voir, les formules (25) donneront, en faisant $n = 1$,

(33) $$\begin{cases} \varpi x_1 + \varpi x_2 = \varpi y + C, \\ \varpi_0 x_1 + \varpi_0 x_2 = \varpi_0 y - x_1 x_2 y + C, \\ \Pi x_1 + \Pi x_2 = \Pi y - \dfrac{a}{2 \Delta a} \log \dfrac{a_0 a + a^3 + x_1 x_2 y \Delta a}{a_0 a + a^3 - x_1 x_2 y \Delta a} + C. \end{cases}$$

Quant à la valeur du radical Δy, elle est donnée par l'équation (24)

$$\Delta y = \frac{fy}{\varphi y} = \frac{a_0 y + y^3}{b_0},$$

c'est-à-dire

(34) $$\Delta y = \frac{a_0 + y^2}{x_1 x_2}.$$

Pour réduire la différence de deux fonctions à une seule, il suffit de chan-

ger le signe de x_2 dans les formules précédentes. La valeur de y deviendra alors

(35) $$y = \frac{x_1 \Delta x_2 - x_2 \Delta x_1}{1 - c^2 x_1^2 x_2^2} = \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1 \Delta x_2 + x_2 \Delta x_1}.$$

Si dans les formules (33) on fait x_2 égal à une constante arbitraire, on aura la relation qui doit avoir lieu entre les variables de deux fonctions pour qu'elles soient réductibles l'une à l'autre. En faisant $x_2 = e$, $x_1 = x$, on aura

(36) $$y = \frac{x \Delta e + e \Delta x}{1 - c^2 e^2 x^2} \quad \text{et} \quad \varpi x = \varpi y + C.$$

En différentiant, il viendra

(37) $$\frac{dy}{\Delta y} = \frac{dx}{\Delta x}.$$

L'intégrale complète de cette équation est donc exprimée par l'équation algébrique (36), e étant la constante arbitraire. Parmi les intégrales particulières on doit remarquer les suivantes:

1) $y = x$, qui répond à $e = 0$, $\Delta y = \Delta x$,

2) $y = \pm \frac{1}{cx}$, qui répond à $e = \frac{1}{0}$, $\Delta y = \mp \frac{\Delta x}{cx^2}$,

3) $y = \sqrt{\frac{1 - x^2}{1 - c^2 x^2}}$, qui répond à $e = 1$, $\Delta y = \frac{(c^2 - 1)x}{1 - c^2 x^2}$,

4) $y = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{1 - c^2 x^2}{1 - x^2}}$, qui répond à $e = \frac{1}{c}$, $\Delta y = \frac{(1 - c^2)x}{(1 - x^2)c}$.

§ 4.

Application au cas où toutes les fonctions données sont égales

Si l'on fait dans les formules (15, 25).

$$x_1 = x_2 = x_3 = \cdots = x, \quad \Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x_3 = \cdots = \Delta x,$$

on aura celles-ci:

(38) $$\begin{cases} \mu \varpi x = \varpi y + C, \\ \mu \varpi_0 x = \varpi_0 y - p + C, \\ \mu \Pi x = \Pi y - \frac{a}{2 \Delta a} \log \frac{fa + \varphi a \,.\, \Delta a}{fa - \varphi a \,.\, \Delta a} + C, \end{cases}$$

ʻiendra

re, on
ictions
$_1=x$,

algé-
alié-

où

(39) $$(fz)^2-(\varphi z)^2(1-z^2)(1-c^2z^2)=(z^2-x^2)^\mu(z^2-y^2),$$

z étant indéterminé.

La fonction y est déterminée par les équations (14, 23):

(40) $$y=-\frac{a_0}{x^\mu},\quad y=\frac{b_0}{x^\mu}.$$

La première a lieu si $\mu=2n-1$, la seconde si $\mu=2n$. Les équations (13′, 22), qui doivent déterminer les coefficiens $a_0, a_1, a_2, \ldots, b_0, b_1, b_2, \ldots$, se réduiront dans le cas que nous considérons à une seule, savoir

$$fx+\varphi x.\Delta x=0,$$

mais d'après les principes du calcul différentiel, cette équation doit encore avoir lieu, en la différentiant par rapport à x seul un nombre quelconque de fois moindre que μ. On aura donc en tout μ équations linéaires entre les μ inconnues; on en tire leurs valeurs en fonction rationnelle de la variable x et du radical Δx. Connaissant $a_0, a_1, a_2, \ldots, b_0, b_1, b_2, \ldots$, on aura ensuite la valeur de Δy par l'équation

$$\Delta y=\frac{fy}{\varphi y}.$$

On pourrait ainsi déterminer toutes les quantités nécessaires, mais pour mieux approfondir les propriétés de la fonction y, nous allons traiter le problème d'une autre manière, qui conduira successivement aux valeurs de y qui répondent aux valeurs 1, 2, 3, etc. de μ.

Désignons par x_μ la valeur de y qui répond à μ. On aura

$$\varpi x_\mu=C+\mu\varpi x,$$

donc

$$\varpi(x_{\mu+m})=C+\varpi x_\mu+\varpi x_m,$$

mais si l'on fait

$$y=\frac{x_m\Delta x_\mu+x_\mu\Delta x_m}{1-c^2x_m^2x_\mu^2},$$

on aura, en vertu des équations (31, 33)

$$\varpi x_m+\varpi x_\mu=\varpi y,$$

donc

(41) $$\varpi x_{\mu+m}=C+\varpi y.$$

La valeur la plus générale de $x_{\mu+m}$, qui satisfera à cette équation est

(41′) $$x_{\mu+m} = \frac{y\Delta e + e\Delta y}{1 - c^2 e^2 y^2},$$

où e est une constante. Pour la déterminer, soit x infiniment petit; on aura alors

$$x_m = mx,\quad x_\mu = \mu x,\quad x_{\mu+m} = (m+\mu)x,\quad \Delta x_m = \Delta x_\mu = 1;$$

donc

$$y = (m+\mu)x,\quad \Delta y = 1.$$

L'équation (41′) donnera donc

$$(m+\mu)x = (m+\mu)x\,\Delta e + e,$$

donc $e = 0$, $\Delta e = 1$ et par suite $x_{m+\mu} = y$, c'est-à-dire que

(42) $$x_{\mu+m} = \frac{x_\mu \Delta x_m + x_m \Delta x_\mu}{1 - c^2 x_m^2 x_\mu^2}.$$

On aura de la même manière

(43) $$x_{\mu-m} = \frac{x_\mu \Delta x_m - x_m \Delta x_\mu}{1 - c^2 x_m^2 x_\mu^2}.$$

La première de ces formules servira à trouver $x_{\mu+m}$, lorsqu'on connaît x_m et x_μ; on pourra donc former successivement les fonctions

$$x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ \ldots,$$

en remarquant que $x_1 = x$, $\Delta x_1 = \Delta x$.

Si l'on fait $m = 1$, on trouvera

(44) $$x_{\mu+1} = -x_{\mu-1} + \frac{2x_\mu \Delta x}{1 - c^2 x^2 x_\mu^2}.$$

En remarquant que

$$x_0 = 0,\quad x_1 = x,$$

cette formule fait voir que x_μ est une fonction rationnelle de x, si μ est un nombre impair, et que x_μ est de la forme $p\Delta x$, où p est rationnel, si μ est un nombre pair. Dans le premier cas $\frac{\Delta x_\mu}{\Delta x}$ est rationnel, et dans le second Δx_μ le sera. On voit également que x_μ s'évanouira en même temps que Δx, si μ est un nombre pair. Les quantités

$$x_{2\mu+1},\quad \frac{\Delta x_{2\mu+1}}{\Delta x},\quad \frac{x_{2\mu}}{\Delta x},\quad \Delta x_{2\mu}$$

sont donc des fonctions rationnelles de x.

Si l'on multiplie entre elles les deux formules (42, 43), il viendra

$$(44') \qquad x_{\mu+m} \cdot x_{\mu-m} = \frac{x_\mu^2 - x_m^2}{1 - c^2 x_\mu^2 x_m^2},$$

équation qui paraît être la relation la plus simple qu'on puisse établir entre les fonctions x_μ. En y faisant $m = \mu - 1$, on aura

$$(45) \qquad x_{2\mu-1} = \frac{1}{x} \cdot \frac{x_\mu^2 - x_{\mu-1}^2}{1 - c^2 x_\mu^2 x_{\mu-1}^2}.$$

De même si dans la formule (42) on fait $m = \mu$, on aura

$$(46) \qquad x_{2\mu} = \frac{2 x_\mu \, \Delta x_\mu}{1 - c^2 x_\mu^4}.$$

Ces deux formules paraissent être les plus commodes pour calculer successivement les fonctions $x_2, x_3, x_4, \ldots$

Pour trouver les expressions les plus simples de x_μ, supposons

$$(47) \qquad x_\mu = \frac{p_\mu}{q_\mu}, \quad \Delta x_\mu = \frac{r_\mu}{q_\mu^2},$$

où p_μ^2, q_μ sont des fonctions entières de x sans diviseur commun. En mettant ces valeurs dans l'équation (46), on aura

$$\frac{p_{2\mu}}{q_{2\mu}} = \frac{2 p_\mu q_\mu r_\mu}{q_\mu^4 - c^2 p_\mu^4}.$$

Or il est évident que la fraction du second membre est réduite à sa plus simple expression; donc on aura séparément

$$(48) \qquad p_{2\mu} = 2 p_\mu q_\mu r_\mu, \quad q_{2\mu} = q_\mu^4 - c^2 p_\mu^4.$$

En faisant les mêmes substitutions dans l'équation (45), on obtiendra

$$(49) \qquad \frac{x \cdot p_{2\mu-1}}{q_{2\mu-1}} = \frac{p_\mu^2 q_{\mu-1}^2 - q_\mu^2 p_{\mu-1}^2}{q_\mu^2 q_{\mu-1}^2 - c^2 p_\mu^2 p_{\mu-1}^2}.$$

Or je dis que la fraction du second membre est nécessairement réduite à sa plus simple expression. En effet si l'on avait pour une même valeur de x

$$p_\mu^2 q_{\mu-1}^2 - q_\mu^2 p_{\mu-1}^2 = 0, \quad q_\mu^2 q_{\mu-1}^2 - c^2 p_\mu^2 p_{\mu-1}^2 = 0,$$

on aurait encore

$$x_\mu^2 = x_{\mu-1}^2, \quad 1 - c^2 x_\mu^2 x_{\mu-1}^2 = 0.$$

Mais on a en général

$$x_{2\mu-1} = \frac{x_\mu \, \Delta x_{\mu-1} + x_{\mu-1} \, \Delta x_\mu}{1 - c^2 x_\mu^2 x_{\mu-1}^2} = \frac{x_\mu^2 - x_{\mu-1}^2}{x_\mu \, \Delta x_{\mu-1} - x_{\mu-1} \, \Delta x_\mu},$$

donc aussi

$$x_\mu \, \Delta x_{\mu-1} = x_{\mu-1} \, \Delta x_\mu = 0,$$

ou bien

$$x_\mu^2(1-x_{\mu-1}^2)(1-c^2x_{\mu-1}^2)=0=x_{\mu-1}^2(1-x_\mu^2)(1-c^2x_\mu^2),$$

ce qui est impossible, car il fallait

$$x_\mu^2=\pm\frac{1}{c}\cdot$$

Cela posé, l'équation (49) donnera

(50) $$p_{2\mu-1}=\frac{1}{x}(p_\mu^2q_{\mu-1}^2-q_\mu^2p_{\mu-1}^2),\quad q_{2\mu-1}=q_\mu^2q_{\mu-1}^2-c^2p_\mu^2p_{\mu-1}^2.$$

Si donc on détermine successivement les fonctions

$$p_2,\ q_2,\ p_3,\ q_3,\ p_4,\ q_4,\ \ldots$$

par les équations (48, 50), $\frac{p_\mu}{q_\mu}$ sera toujours réduit à sa plus simple expression.

On pourra faire $p_1=x$, $q_1=1$. D'après la forme des expressions (48, 50) il est clair que

1) $p_{2\mu-1}$ est une fonction entière et impaire de x du degré $(2\mu-1)^2$,
2) $p_{2\mu}=p'\Delta x$, où p' est une fonction entière et impaire du degré $(2\mu)^2-3$,
3) q_μ est une fonction entière et paire du degré μ^2-1 ou μ^2, selon que μ est impair ou pair.

Les fonctions $x_{2\mu-1}$ et $x_{2\mu}$ auront donc la forme suivante:

(51) $$x_{2\mu-1}=\frac{x(A_0+A_2x^2+A_4x^4+\cdots+A_{(2\mu-1)^2-1}x^{(2\mu-1)^2-1})}{1+A_2^1x^2+A_4^1x^4+\cdots+A_{(2\mu-1)^2-1}^1x^{(2\mu-1)^2-1}},$$

(52) $$x_{2\mu}=\frac{x\Delta x(B_0+B_2x^2+B_4x^4+\cdots+B_{4\mu^2-4}x^{(2\mu)^2-4})}{1+B_2^1x^2+B_4^1x^4+\cdots+B_{4\mu^2}^1x^{(2\mu)^2}}.$$

On aura par exemple

(53) $$x_2=\frac{2x\Delta x}{1-c^2x^4},\quad x_3=x\frac{3-4(1+c^2)x^2+6c^2x^4-c^4x^8}{1-6c^2x^4+4c^2(1+c^2)x^6-3c^4x^8}.$$

Il est facile de voir que les coefficiens A_0, A_2, ... A_2^1, A_4^1, ... B_0, B_2, ... B_2^1, B_4^1, ... seront des fonctions entières de c^2. On a toujours

$$A_0=2\mu-1,\ B_0=2\mu\ \text{ et }\ A_2^1=B_2^1=0.$$

La fonction $x_{2\mu}$ est, comme on le voit, irrationnelle; or on peut facilement trouver une fonction rationnelle y qui satisfasse à l'équation

$$\frac{dy}{\Delta y}=2\mu\frac{dx}{\Delta x}\cdot$$

Une telle fonction est la suivante

$$(54)\qquad y=\sqrt{\frac{1-x_{2\mu}^2}{1-c^2x_{2\mu}^2}}=\frac{\varDelta x_{2\mu}}{1-c^2x_{2\mu}^2},$$

car on a, en vertu de la relation (37),

$$\frac{dy}{\varDelta y}=\frac{dx_{2\mu}}{\varDelta x_{2\mu}},$$

et y est rationnel, puisque les fonctions $\varDelta x_{2\mu}$ et $x_{2\mu}^2$ le sont. On se convaincra aisément que cette fonction y aura la forme

$$(55)\qquad y=\frac{1+\alpha x^2+\cdots+\beta x^{(2\mu)^2}}{1+\alpha' x^2+\cdots+\beta' x^{(2\mu)^2}}.$$

Pour $\mu=1$, on aura

$$(56)\qquad y=\frac{1-2x^2+c^2x^4}{1-2c^2x^2+c^2x^4}.$$

Nous verrons dans la suite comment on pourra décomposer les fonctions x_μ et y en facteurs et en fractions partielles.

Nous montrerons de même que les équations précédentes sont toujours résolubles *algébriquement* par rapport à x, de sorte qu'on peut exprimer x en x_μ à l'aide de *radicaux.*

CHAPITRE II.

Sur la relation la plus générale possible entre un nombre quelconque de fonctions elliptiques.

Après avoir établi dans le chapitre précédent les propriétés fondamentales des fonctions elliptiques, nous allons maintenant en faire l'application au problème général que nous nous sommes proposé. Nous ferons voir qu'on pourra en ramener la solution à celle de quelques autres problèmes plus simples.

§ 1.

Sur la forme qu'on pourra donner à l'intégrale d'une différentielle quelconque algébrique, en supposant cette intégrale exprimable par des fonctions algébriques, logarithmiques et elliptiques.

Soient x_1, x_2, x_3, ... x_μ des variables en nombre quelconque, liées entre elles par des équations algébriques dont le nombre est moindre que

celui des variables. Soient $y_1, y_2, \ldots y_\mu$ des fonctions algébriques quelconques de ces variables et supposons que la différentielle

$$y_1 dx_1 + y_2 dx_2 + \cdots + y_\mu dx_\mu$$

soit complète et que son intégrale soit exprimable à l'aide de fonctions algébriques, logarithmiques et elliptiques, de sorte que l'on ait

$$(57)\qquad \begin{aligned}\int(y_1 dx_1 + y_2 dx_2 + \cdots + y_\mu dx_\mu) \\ = u + A_1 \log v_1 + A_2 \log v_2 + \cdots + A_\nu \log v_\nu \\ + \alpha_1 . \psi_1 t_1 + \alpha_2 . \psi_2 t_2 + \cdots + \alpha_n . \psi_n t_n,\end{aligned}$$

$A_1, A_2, \ldots A_\nu, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ étant des quantités constantes, $u, v_1, v_2, \ldots v_\nu, t_1, t_2, \ldots t_n$ des fonctions *algébriques* des variables $x_1, x_2, \ldots x_\mu$, et $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \ldots \psi_n$ des fonctions elliptiques quelconques des trois espèces avec des *modules et des paramètres quelconques*. Désignons respectivement par $c_1, c_2, \ldots c_n$ les modules de ces fonctions, et faisons pour abréger

$$(58)\qquad \pm\sqrt{(1-x^2)(1-c_m^2 x^2)} = \varDelta_m x,$$

de sorte qu'on ait en général

$$(59)\qquad \psi_m x = \int \frac{\theta' dx}{\varDelta_m x};$$

θ' étant une fonction rationnelle de x^2 de l'une des trois formes

$$1,\ x^2,\ \frac{1}{1-\frac{x^2}{a^2}},$$

selon que $\psi_m x$ est une fonction de la première, de la seconde ou de la troisième espèce. Nous pourrons même supposer que θ' soit une fonction rationnelle quelconque de x.

On pourra regarder un certain nombre des quantités $x_1, x_2, \ldots x_\mu$ comme des variables indépendantes. Soient celles-ci les m premières:

$$(60)\qquad x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots\ x_m;$$

alors toutes les quantités

$$(61)\qquad x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots x_\mu;\ t_1, t_2, \ldots t_n;\ u;\ v_1, v_2, \ldots v_\nu;\ y_1, y_2, \ldots y_\mu$$

seront des fonctions algébriques de $x_1, x_2, \ldots x_m$.

Cela posé, imaginons une fonction algébrique θ telle qu'on puisse exprimer toutes les fonctions

$$(62)\qquad u,\ v_1,\ v_2,\ \ldots\ v_\nu;\ t_1,\ t_2,\ \ldots\ t_n,\ \varDelta_1(t_1),\ \varDelta_2(t_2),\ \ldots\ \varDelta_n(t_n)$$

rationnellement en

(63) $$\theta,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots\ x_\mu,\ y_1,\ y_2,\ y_3,\ \ldots\ y_\mu.$$

Il existe une infinité de fonctions θ qui jouissent de cette propriété. Une telle fonction sera par exemple la somme de toutes les fonctions (62), multipliées chacune par un coefficient indéterminé et constant. C'est ce qui est facile à démontrer par la théorie des équations algébriques. La quantité θ, étant une fonction algébrique des variables $x_1, x_2, \ldots$, pourra donc satisfaire à une équation algébrique, dans laquelle tous les coefficiens sont des fonctions *rationnelles* de $x_1, x_2, \ldots$. Or au lieu de supposer ces coefficiens rationnels en $x_1, x_2, \ldots$, nous les supposerons rationnels en

(64) $$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots\ x_\mu,\ y_1,\ y_2,\ y_3,\ \ldots\ y_\mu;$$

car cette supposition permise simplifiera beaucoup le raisonnement. Soit donc

(65) $$V=0$$

l'équation en θ; désignons son degré par δ et supposons, ce qui est permis, qu'il soit impossible que la fonction θ puisse être racine d'une autre équation de la même forme, mais dont le degré soit moindre que δ.

Imaginons maintenant qu'on différentie l'équation (57) par rapport aux variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots x_m$. Il est facile de voir que la différentielle qu'on trouve sera de la forme

(66) $$p_1\,dx_1+p_2\,dx_2+\cdots+p_m\,dx_m=0,$$

où $p_1, p_2, \ldots p_m$ seront des fonctions *rationnelles* des quantités

$$x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_m,\ x_{m+1},\ \ldots\ x_\mu,\ y_1,\ y_2,\ \ldots\ y_\mu,\ u,\ v_1,\ v_2,\ v_3,\ \ldots\ v_\nu,$$
$$t_1,\ t_2,\ \ldots\ t_n,\ \varDelta_1(t_1),\ \varDelta_2(t_2),\ \ldots\ \varDelta_n(t_n).$$

Donc en introduisant la fonction θ, $p_1, p_2, \ldots p_m$ deviendront des fonctions rationnelles de

(67) $$\theta,\ x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_\mu,\ y_1,\ y_2,\ \ldots\ y_\mu.$$

Cela posé, l'équation (66) donnera séparément

(68) $$p_1=0,\ p_2=0,\ p_3=0,\ \ldots\ p_m=0,$$

et il est clair que si ces équations sont satisfaites, l'équation proposée (57) le sera également. Maintenant les équations (68) sont autant d'équations en θ de la même forme que $V=0$, ou pourront aisément être réduites à cette

forme; mais, d'après l'hypothèse, $V=0$ est une équation irréductible en θ, donc il suit d'un théorème connu, que toutes les équations (68) seront encore satisfaites, en mettant pour θ une quelconque des racines de l'équation $V=0$. Donc l'équation (57) aura lieu quelle que soit la valeur de θ, pourvu qu'elle satisfasse à l'équation $V=0$.

Désignons par

(69) $$\theta_1,\ \theta_2,\ \dots\ \theta_\delta$$

les racines de l'équation $V=0$, et par

(70) $$u',\ u'',\ \dots\ u^{(\delta)};\ v_m',\ v_m'',\ \dots\ v_m^{(\delta)};\ t_m',\ t_m'',\ \dots\ t_m^{(\delta)}$$

les valeurs correspondantes des fonctions u, v_m, t_m. Alors l'équation (57) donnera, en substituant dans le second membre d'abord les expressions des quantités u, v_1, v_2, ... t_1, t_2, ..., $\varDelta_1(t_1)$, $\varDelta_2(t_2)$, ... en fonction rationnelle de θ, x_1, x_2, ... x_μ, y_1, y_2, ... y_μ, et ensuite au lieu de θ successivement les δ valeurs θ_1, θ_2, ... θ_δ, l'équation (57) donnera, dis-je, δ équations semblables qui, ajoutées ensemble, conduiront à celle-ci:

(71) $$\begin{cases} \delta\int(y_1dx_1+y_2dx_2+\cdots+y_\mu dx_\mu)=u'+u''+\cdots+u^{(\delta)} \\ +A_1(\log v_1'+\log v_1''+\cdots+\log v_1^{(\delta)})+\cdots+A_\nu(\log v_\nu'+\log v_\nu''+\cdots+\log v_\nu^{(\delta)}) \\ +\alpha_1(\psi_1t_1'+\psi_1t_1''+\cdots+\psi_1t_1^{(\delta)})+\cdots+\alpha_n(\psi_nt_n'+\psi_nt_n''+\cdots+\psi_nt_n^{(\delta)}). \end{cases}$$

Le second membre de cette équation pourra être réduit à une forme beaucoup plus simple. Considérons d'abord la partie algébrique

(72) $$u'+u''+\cdots+u^{(\delta)}=U.$$

Cette fonction est exprimée *rationnellement* en

$$x_1,\ x_2,\ \dots\ x_\mu,\ y_1,\ y_2,\ \dots\ y_\mu,\ \theta_1,\ \theta_2,\ \dots\ \theta_\delta,$$

mais elle est en même temps symétrique par rapport à θ_1, θ_2, ... θ_δ, donc en vertu d'un théorème connu sur les fonctions symétriques et rationnelles, on pourra exprimer la fonction U *rationnellement* en fonction de

(73) $$x_1,\ x_2,\ \dots\ x_\mu,\ y_1,\ y_2,\ \dots\ y_\mu$$

et des coefficiens de l'équation $V=0$; mais ceux-ci sont eux-mêmes des fonctions rationnelles des quantités (73), donc la fonction U le sera également.

Soit maintenant

(74) $$\log V_m=\log v_m'+\log v_m''+\cdots+\log v_m^{(\delta)},$$

on aura

$$V_m = v_m' v_m'' \dots v_m^{(\delta)},$$

donc la fonction V_m est aussi une fonction rationnelle des quantités (73, 69) et symétrique par rapport à $\theta_1, \theta_2, \dots \theta_\delta$; donc on démontrera de la même manière que V_m pourra s'exprimer rationnellement par les quantités (73) seules.

Il reste à considérer la partie elliptique de l'équation (71): or d'après les formules du chapitre précédent, on pourra toujours faire

$$(75) \quad \begin{cases} \psi_m t_m' + \psi_m t_m'' + \dots + \psi_m t_m^{(\delta)} \\ = \psi_m T_m + p + B_1 \log q_1 + B_2 \log q_2 + \dots + B_\nu \log q_\nu \end{cases}$$

où toutes les quantités

$$(76) \qquad T_m, \ \Delta_m(T_m), \ p, \ q_1, \ q_2, \dots q_\nu$$

sont des fonctions rationnelles des fonctions

$$t_m', \ t_m'', \dots t_m^{(\delta)}, \ \Delta_m(t_m'), \ \Delta_m(t_m''), \dots \Delta_m(t_m^{(\delta)});$$

or celles-ci sont des fonctions rationnelles des quantités (69, 73), et il est clair qu'elles seront symétriques par rapport à $\theta_1, \theta_2, \dots \theta_\delta$, donc enfin on pourra exprimer les fonctions (76) rationnellement par les quantités x_1, $x_2, \dots x_\mu$; $y_1, y_2, \dots y_\mu$.

En vertu de ce que nous venons de voir, on pourra donc mettre le second membre de l'équation (71) sous la forme:

$$r + A' \log \varrho' + A'' \log \varrho'' + \dots + A^{(k)} \log \varrho^{(k)}$$
$$+ \alpha_1 . \psi_1 T_1 + \alpha_2 . \psi_2 T_2 + \dots + \alpha_n . \psi_n T_n.$$

Nous sommes ainsi parvenus à ce théorème général:

Théorème II. Si une intégrale quelconque de la forme

$$\int (y_1 dx_1 + y_2 dx_2 + \dots + y_\mu dx_\mu),$$

où $y_1, y_2, \dots y_\mu$ sont des fonctions *algébriques* de $x_1, x_2, \dots x_\mu$, ces derniers étant liés entre eux par un nombre quelconque d'équations *algébriques*, peut être exprimée par des fonctions algébriques, logarithmiques et elliptiques de sorte qu'on ait

$$\int (y_1 dx_1 + y_2 dx_2 + \dots + y_\mu dx_\mu) = u + A_1 \log v_1 + A_2 \log v_2 + \dots + A_\nu \log v_\nu$$
$$+ \alpha_1 . \psi_1 t_1 + \alpha_2 . \psi_2 t_2 + \dots + \alpha_n . \psi_n t_n,$$

où $A_1, A_2, \ldots \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ sont des constantes, $u, v_1, v_2, \ldots t_1, t_2, \ldots$ des fonctions *algébriques* de $x_1, x_2, \ldots$, et $\psi_1, \psi_2, \ldots$ des fonctions elliptiques quelconques, alors je dis qu'on pourra toujours exprimer la même intégrale de la manière suivante:

$$\delta\int(y_1dx_1+y_2dx_2+\cdots+y_\mu dx_\mu)=r+A'\log\varrho'+A''\log\varrho''+\cdots$$
$$+A^{(k)}\log\varrho^{(k)}+\alpha_1.\psi_1\theta_1+\alpha_2.\psi_2\theta_2+\cdots+\alpha_n.\psi_n\theta_n,$$

δ étant un nombre entier; $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ les mêmes que dans l'équation donnée; $A', A'', \ldots$ des constantes, et

$$\theta_1,\ \Delta_1(\theta_1),\ \theta_2,\ \Delta_2(\theta_2),\ \ldots\ \theta_n,\ \Delta_n(\theta_n),\ r,\ \varrho',\ \varrho'',\ \ldots\ \varrho^{(k)}$$

des fonctions *rationnelles* des quantités

$$x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_\mu;\ y_1,\ y_2,\ \ldots\ y_\mu.$$

Ce théorème est non seulement d'une grande importance pour la solution de notre problème général, mais il est encore le fondement de tout ce qui concerne l'application des fonctions algébriques, logarithmiques et elliptiques à la théorie de l'intégration des formules différentielles *algébriques*. J'en ai déduit un grand nombre de résultats nouveaux et généraux que je soumettrai au jugement des géomètres dans une autre occasion.

Comme corollaire de ce théorème on doit remarquer le suivant:

Théorème III. Si une intégrale de la forme

$$\int(y_1dx_1+y_2dx_2+\cdots+y_\mu dx_\mu)$$

peut être exprimée par une fonction algébrique et logarithmique de la forme

$$u+A_1\log v_1+A_2\log v_2+\cdots+A_\nu\log v_\nu,$$

on pourra toujours supposer que $u, v_1, v_2, \ldots v_\nu$ soient des fonctions *rationnelles* de $x_1, x_2, \ldots x_\mu, y_1, y_2, \ldots y_\mu$. Si donc on a l'intégrale $\int y\,dx$, où y est liée à x par une équation algébrique quelconque, on pourra supposer que u, v_1, v_2 etc. soient des fonctions rationnelles de y et x*).

*) J'ai fondé sur ce théorème une nouvelle théorie de l'intégration des formules différentielles algébriques, mais que les circonstances ne m'ont pas permis de publier jusqu'à présent. Cette théorie dépasse de beaucoup les résultats connus, elle a pour but d'opérer *toutes les réductions possibles* des intégrales des formules algébriques, à l'aide des fonctions algébriques et logarithmiques. On parviendra ainsi à réduire au plus petit nombre possible les intégrales nécessaires pour représenter sous forme finie toutes les intégrales qui appartiennent à une même classe.



§ 2.

Application du théorème du paragraphe précédent à la relation générale entre des fonctions algébriques, logarithmiques et elliptiques.

Du théorème général démontré dans le paragraphe précédent on peut déduire immédiatement plusieurs propositions importantes, relatives à la théorie des fonctions elliptiques.

Soit

$$(77)\quad \alpha_1\psi_1x_1+\alpha_2\psi_2x_2+\cdots+\alpha_\mu\psi_\mu x_\mu=u+A_1\log v_1+A_2\log v_2+\cdots+A_\nu\log v_\nu,$$

une relation quelconque entre les fonctions elliptiques

$$\psi_1x_1,\ \psi_2x_2,\ \ldots\ \psi_\mu x_\mu,$$

dont les modules sont respectivement $c_1, c_2, \ldots c_\mu$. Si pour abréger on fait $\pm\sqrt{(1-x^2)(1-c_m^2x^2)}=\varDelta_m x$, le premier membre sera la même chose que

$$\int\left(\frac{\alpha_1 r_1}{\varDelta_1 x_1}dx_1+\frac{\alpha_2 r_2}{\varDelta_2 x_2}dx_2+\cdots+\frac{\alpha_\mu r_\mu}{\varDelta_\mu x_\mu}dx_\mu\right),$$

où $r_1, r_2, \ldots r_\mu$ seront respectivement des fonctions rationnelles de $x_1, x_2, \ldots x_\mu$. Donc en vertu du théorème III on pourra énoncer le suivant:

Théorème IV. Si l'équation (77) a lieu en supposant que $u, v_1, v_2, \ldots v_\nu$ soient des fonctions *algébriques* des quantités $x_1, x_2, \ldots x_\mu$, on pourra toujours, sans diminuer la généralité, supposer que $u, v_1, v_2, \ldots v_\nu$ soient exprimées rationnellement en $x_1, x_2, \ldots x_\mu, \varDelta_1x_1, \varDelta_2x_2, \ldots \varDelta_\mu x_\mu$.

En écrivant l'équation générale (77) de cette manière:

$$(78)\quad \int\left(\frac{\alpha_1 r_1 dx_1}{\varDelta_1 x_1}+\frac{\alpha_2 r_2 dx_2}{\varDelta_2 x_2}+\cdots+\frac{\alpha_m r_m dx_m}{\varDelta_m x_m}\right)$$
$$=u+A_1\log v_1+A_2\log v_2+\cdots+A_\nu\log v_\nu-\alpha_{m+1}\psi_{m+1}x_{m+1}-\cdots-\alpha_\mu\psi_\mu x_\mu,$$

on aura, en vertu du théorème II, le suivant:

Théorème V. Si l'équation (77) a lieu, on en pourra toujours tirer une autre de la forme:

$$(79)\quad \delta\alpha_1\psi_1x_1+\delta\alpha_2\psi_2x_2+\cdots+\delta\alpha_m\psi_m x_m+\alpha_{m+1}\psi_{m+1}\theta_1+\cdots+\alpha_\mu\psi_\mu\theta_{\mu-m}$$
$$=r+A'\log\varrho'+A''\log\varrho''+\cdots+A^{(k)}\log\varrho^{(k)},$$

δ étant un nombre entier et les quantités

$$\theta_1,\ \varDelta_{m+1}\theta_1,\ \theta_2,\ \varDelta_{m+2}\theta_2,\ \dots\ \theta_{\mu-m},\ \varDelta_\mu\theta_{\mu-m},\ r,\ \varrho',\ \varrho'',\ \dots\ \varrho^{(k)}$$

des fonctions *rationnelles* de

$$x_1,\ x_2,\ \dots\ x_m,\ \varDelta_1 x_1,\ \varDelta_2 x_2,\ \dots\ \varDelta_m x_m.$$

On aura encore comme corollaire:

Théorème VI. Si une relation quelconque entre les fonctions elliptiques $\psi_1 x_1,\ \psi_2 x_2,\ \dots\ \psi_\mu x_\mu$ des trois espèces a la forme exprimée par l'équation (77), on en tirera une autre de la forme:

$$(80)\quad \begin{aligned}\delta\alpha_m.\psi_m x = &-\alpha_1.\psi_1\theta_1-\alpha_2.\psi_2\theta_2-\dots-\alpha_{m-1}.\psi_{m-1}\theta_{m-1}\\ &-\alpha_{m+1}.\psi_{m+1}\theta_{m+1}-\dots-\alpha_\mu.\psi_\mu\theta_\mu\\ &+r+A'\log\varrho'+A''\log\varrho''+\dots+A^{(k)}\log\varrho^{(k)},\end{aligned}$$

δ étant un nombre entier et toutes les quantités

$$\theta_1,\ \varDelta_1\theta_1,\ \theta_2,\ \varDelta_2\theta_2,\ \dots\ r,\ \varrho',\ \varrho'',\ \dots$$

des fonctions rationnelles de la variable x et du radical correspondant $\varDelta_m x$. Toutes ces fonctions pourront donc se mettre sous la forme:

$$p+q.\varDelta_m x,$$

où p et q sont des fonctions *rationnelles* de x seul.

Voilà le théorème qui nous conduira, comme nous le verrons plus bas, à la solution de notre problème.

Si l'on suppose que toutes les variables $x_1,\ x_2,\ \dots\ x_\mu$ soient égales entre elles et à x, et en outre que les fonctions $\psi_1,\ \psi_2,\ \dots\ \psi_\mu$ aient le même module, que nous désignerons par c, alors le premier membre de l'équation (77) sera la même chose que $\int\frac{r\,dx}{\varDelta x}$, où r est une fonction rationnelle de x; donc en vertu du théorème III on pourra énoncer le suivant:

Théorème VII. Si entre les fonctions $\varpi x,\ \varpi_0 x,\ \Pi_1 x,\ \Pi_2 x,\ \dots\ \Pi_\mu x$, où $\Pi_1,\ \Pi_2,\ \dots\ \Pi_\mu$ désignent des fonctions de la troisième espèce, avec des paramètres quelconques, mais avec le même module c que les deux fonctions de la première et de la seconde espèce ϖx et $\varpi_0 x$, on a une relation quelconque de la forme:

$$(81)\quad \left\{\begin{aligned}&\alpha\varpi x+\alpha_0\varpi_0 x+\alpha_1\Pi_1 x+\alpha_2\Pi_2 x+\dots+\alpha_\mu\Pi_\mu x\\ &\qquad=u+A_1\log v_1+A_2\log v_2+\dots+A_\nu\log v_\nu,\end{aligned}\right.$$

on pourra toujours supposer que les quantités

$$u, v_1, v_2, \ldots v_\nu$$

soient de la forme $p + q\Delta x$, où p et q sont des fonctions rationnelles de x seul.

Ce théorème est aussi d'une grande importance dans la théorie des fonctions elliptiques. Nous en développerons dans le chapitre IV les conséquences les plus importantes pour notre objet.

§ 3.

Réduction du problème général.

Reprenons la formule du théorème VI. En la différentiant, le résultat sera de la forme

$$P + Q\Delta_m x = 0,$$

où P et Q sont des fonctions rationnelles de x; donc on doit avoir séparément $P = 0$, $Q = 0$, et par suite $P - Q.\Delta_m x = 0$, donc la formule (80) aura encore lieu en changeant le signe du radical $\Delta_m x$. Or en faisant ce changement et en désignant par θ_1', θ_2', θ_3' etc. les valeurs correspondantes de $\theta_1, \theta_2, \ldots,$ on aura

$$-\delta\alpha_m \psi_m x = -\Sigma\alpha\psi\theta' + v',$$

où pour abréger nous avons mis le signe de sommation Σ, v' étant la partie algébrique et logarithmique. En retranchant cette équation de l'équation (80), on obtiendra

$$(82) \qquad 2\delta\alpha_m\psi_m x = \Sigma\alpha(\psi\theta' - \psi\theta) + v - v'.$$

Cela posé, désignons par c le module de la fonction ψ et par Δx la fonction $\pm\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}$; alors on aura, d'après ce qu'on a vu dans le chapitre I (35)

$$\psi\theta' - \psi\theta = \psi y - v'',$$

en faisant

$$y = \frac{\theta'\Delta\theta - \theta\Delta\theta'}{1 - c^2\theta^2\theta'^2},$$

v'' étant une expression algébrique et logarithmique.

Soient maintenant

$$\theta = p + q\Delta_m x, \quad \Delta\theta = r + \varrho\Delta_m x,$$

où p, q, r, ϱ sont des fonctions rationnelles de x. En changeant le signe du radical $\Delta_m x$, on aura les valeurs de θ' et $\Delta\theta'$, savoir

$$\theta' = p - q\,\Delta_m x,\quad \Delta\theta' = r - \varrho\,\Delta_m x.$$

En substituant ces valeurs dans l'expression de y, il est clair que cette fonction prendra la forme

(83) $$y = t\,\Delta_m x,$$

où t est rationnel en x. En vertu de la formule (34) on voit de même que Δy sera rationnel en x.

Si l'on fait maintenant

$$z = \frac{y\,\Delta e + e\,\Delta y}{1 - c^2 e^2 y^2},$$

où e est constant, on aura encore

$$\psi y = \psi z + v''',$$

donc

$$\psi\theta' - \psi\theta = \psi z + v_1.$$

Or je dis qu'on pourra faire en sorte que z soit une fonction rationnelle de x. En effet il suffit pour cela d'attribuer à la constante e une valeur qui annule Δe.

Soit par exemple $e = 1$, on aura

(84) $$z = \frac{\Delta y}{1 - c^2 y^2} \quad \text{d'où} \quad \Delta z = \frac{c^2 - 1}{1 - c^2 y^2}\,y,$$

mais, comme nous venons de le voir, y^2 et Δy sont des fonctions rationnelles de x, donc z le sera de même.

La formule (82) prendra donc la forme suivante:

(85) $$2\,\delta\alpha_m\,\psi_m x = \Sigma\,\alpha\,.\,\psi z + V,$$

où V est une fonction algébrique et logarithmique, qui en vertu du théorème II pourra se mettre sous la forme

$$u + A_1 \log v_1 + A_2 \log v_2 + \cdots,$$

toutes les quantités u, v_1, v_2, ... étant de la forme $p + q\,\Delta_m x$.

En développant le second membre de l'équation (85), on aura aussi la formule

(86) $$\left\{\begin{aligned} 2\,\delta\alpha_m\,.\,\psi_m x = {} & \alpha_1\,.\,\psi_1 z_1 + \alpha_2\,.\,\psi_2 z_2 + \cdots + \alpha_{m-1}\,.\,\psi_{m-1} z_{m-1} \\ & + \alpha_{m+1}\,.\,\psi_{m+1} z_{m+1} + \cdots + \alpha_\mu\,.\,\psi_\mu z_\mu + V, \end{aligned}\right.$$

où en vertu des deux équations (84, 83) toutes les quantités

$$z_1,\ \frac{\Delta_1 z_1}{\Delta_m x},\ z_2,\ \frac{\Delta_2 z_2}{\Delta_m x},\ z_3,\ \frac{\Delta_3 z_3}{\Delta_m x},\ \ldots\ z_\mu,\ \frac{\Delta_\mu z_\mu}{\Delta_m x}$$

sont des fonctions rationnelles de la variable x. Cette formule est donc une suite nécessaire de la formule générale (77). Il faut faire attention que δ est un nombre entier et que les coefficiens $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\mu$ sont précisément les mêmes dans les deux formules. C'est une remarque essentielle.

A l'aide de la formule (86) on pourra maintenant réduire la formule générale (77) à une autre plus simple. En effet, en éliminant la fonction $\psi_m x$ entre ces deux équations, on trouvera une équation de la même forme que la proposée, mais qui contiendra un nombre moindre de fonctions elliptiques. Faisons $m=\mu$ et mettons x_μ pour x dans la formule (86). On aura

$$2\delta\alpha_\mu . \psi_\mu x_\mu = \alpha_1 . \psi_1 z_1 + \alpha_2 . \psi_2 z_2 + \cdots + \alpha_{\mu-1} . \psi_{\mu-1} z_{\mu-1} + V.$$

En éliminant la fonction $\psi_\mu x_\mu$ entre les deux équations il viendra

$$(87) \qquad \alpha_1(2\delta\psi_1 x_1 - \psi_1 z_1) + \cdots + \alpha_{\mu-1}(2\delta\psi_{\mu-1} x_{\mu-1} - \psi_{\mu-1} z_{\mu-1}) = V'.$$

Mais 2δ étant un nombre entier, on pourra, en vertu de ce que nous avons vu dans le chapitre précédent, trouver des fonctions algébriques $x_1', x_2', \ldots x'_{\mu-1}$ telles que

$$2\delta\psi_1 x_1 - \psi_1 z_1 = \psi_1 x_1' + V_1,$$
$$2\delta\psi_2 x_2 - \psi_2 z_2 = \psi_2 x_2' + V_2$$
etc.

donc la formule (87) donnera celle-ci

$$(88) \qquad \begin{cases} \alpha_1 . \psi_1 x_1' + \alpha_2 . \psi_2 x_2' + \cdots + \alpha_{\mu-1} . \psi_{\mu-1} x'_{\mu-1} \\ \qquad = u' + A_1' \log v_1' + A_2' \log v_2' + \cdots + A_\nu' \log v_\nu'. \end{cases}$$

Cette équation est précisément de la même forme que l'équation proposée; seulement elle ne contient plus la fonction ψ_μ. On pourra la traiter de la même manière et en chasser une autre fonction, par exemple $\psi_{\mu-1}$. En continuant ainsi, on parviendra enfin à une équation qui ne contiendra que des fonctions algébriques et logarithmiques, et qui ne n'aura pas de difficulté.

On voit donc que le problème général pourra être réduit à celui-ci:

Satisfaire de la manière la plus générale à l'équation

$$(89) \qquad \begin{cases} \psi x = \beta_1 . \psi_1 y_1 + \beta_2 . \psi_2 y_2 + \cdots + \beta_n . \psi_n y_n \\ \qquad + u + A_1 \log v_1 + A_2 \log v_2 + \cdots + A_\nu \log v_\nu, \end{cases}$$

où $\psi, \psi_1, \psi_2, \ldots \psi_n$ désignent des fonctions elliptiques des trois espèces, en supposant que

$$y_1, y_2, \dots y_n$$

soient des fonctions rationnelles de x; et que $\Delta_1 y_1, \Delta_2 y_2, \dots \Delta_n y_n$ soient de la forme $p.\Delta x$, où p est rationnel en x, et où Δx désigne le radical qui figure dans la fonction ψx.

Soient

$$\Delta_1 y_1 = p_1 \Delta x,\quad \Delta_2 y_2 = p_2 \Delta x, \dots \Delta_n y_n = p_n \Delta x.$$

Supposons que ces équations soient satisfaites, et soit

$$\psi x = \int \frac{\theta x . dx}{\Delta x},\quad \psi_1 x = \int \frac{\theta_1 x . dx}{\Delta_1 x}, \dots \psi_n x = \int \frac{\theta_n x . dx}{\Delta_n x},$$

$\theta x, \theta_1 x, \dots \theta_n x$ étant toujours des fonctions rationnelles suivant la nature des fonctions $\psi, \psi_1, \dots \psi_n$, on aura

$$\psi_m y_m = \int \frac{\theta_m y_m}{p_m} \cdot \frac{dy_m}{dx} \cdot \frac{dx}{\Delta x};$$

or $\frac{\theta_m y_m}{p_m} \cdot \frac{dy_m}{dx}$ est une fonction rationnelle de x, donc l'intégrale du second membre pourra être réduite à la forme

$$\psi_m y_m = r + A \varpi x + A_0 \varpi_0 x + A' \Pi(x, a') + A'' \Pi(x, a'') + \cdots,$$

où r est une expression algébrique et logarithmique. En transformant toutes les fonctions $\psi x, \psi_1 y_1, \psi_2 y_2, \dots$ de cette manière, l'équation (89) prendra cette forme

$$(90)\quad \left\{ \begin{aligned} &\alpha \varpi x + \alpha_0 \varpi_0 x + \alpha_1 \Pi(x, a_1) + \alpha_2 \Pi(x, a_2) + \cdots + \alpha_\mu \Pi(x, a_\mu) \\ &\qquad = u + A_1 \log v_1 + A_2 \log v_2 + \cdots \end{aligned} \right.$$

En vertu de ce que nous venons de voir il est clair que la solution du problème (89) pourra être réduite à celle des problèmes suivans:

Problème A. Trouver tous les cas possibles où l'on peut satisfaire à l'équation

$$(91)\qquad (1 - y^2)(1 - c'^2 y^2) = p^2 (1 - x^2)(1 - c^2 x^2),$$

en supposant y et p fonctions rationnelles de l'indéterminée x, c et c' étant des constantes.

Problème B. L'équation (91) étant satisfaite, réduire les trois fonctions

$$\varpi(y, c'),\ \varpi_0(y, c'),\ \Pi(y, c', a)$$

à la forme

$$r + A \varpi x + A_0 \varpi_0 x + A' \Pi(x, a') + A'' \Pi(x, a'') + \cdots$$

où r est une expression algébrique et logarithmique.

Problème C. Trouver la relation la plus générale entre les fonctions qui ont le même module et la même variable, c'est-à-dire: trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'on puisse exprimer une fonction de la forme

$$\alpha\varpi x + \alpha_0\varpi_0 x + \alpha_1 \Pi(x, a_1) + \alpha_2 \Pi(x, a_2) + \cdots,$$

par des fonctions algébriques et des logarithmes.

La solution complète de ces trois problèmes sera l'objet principal de nos recherches ultérieures. Nous allons commencer par le dernier qui est le plus simple.

CHAPITRE III.

Détermination de la relation la plus générale possible entre un nombre quelconque de fonctions elliptiques de la même variable et du même module; ou solution du problème C.

Soit comme précédemment

$$\varDelta x = \pm\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)},$$

ϖx, $\varpi_0 x$ les fonctions des deux premières espèces et $\Pi\alpha_1$, $\Pi\alpha_2$, ... $\Pi\alpha_\mu$ des fonctions de la troisième espèce, ayant pour paramètres α_1, α_2, ... α_μ, de sorte que

$$\varpi x = \int \frac{dx}{\varDelta x}, \quad \varpi_0 x = \int \frac{x^2\,dx}{\varDelta x}, \quad \Pi\alpha_m = \int \frac{dx}{\left(1-\frac{x^2}{\alpha_m^2}\right)\varDelta x}.$$

Cela posé, il s'agit de satisfaire de la manière la plus générale à l'équation

$$(92)\quad \begin{cases} \beta\varpi x + \beta_0\varpi_0 x + \beta_1\Pi\alpha_1 + \beta_2\Pi\alpha_2 + \cdots + \beta_n\Pi\alpha_n \\ \qquad = u + A_1\log v_1 + A_2\log v_2 + \cdots + A_\nu \log v_\nu. \end{cases}$$

En vertu du théorème VI on peut supposer que u, v_1, v_2, ... v_ν soient de la forme $p + q\varDelta x$, où p et q sont rationnels en x.

Nous supposons, ce qui est permis, qu'il soit impossible de trouver une relation semblable, qui ne contienne pas toutes les fonctions $\Pi\alpha_1$, $\Pi\alpha_2$, ... $\Pi\alpha_n$. Nous supposons encore qu'aucun des paramètres α_1, α_2, ... α_n ne soit égal à ± 1 ou à $\pm\frac{1}{c}$; car dans ce cas on pourrait, comme on sait, réduire la fonction correspondante de la troisième espèce aux fonctions ϖx et $\varpi_0 x$.

Cela posé, désignons le premier membre de l'équation (92) par ψx et le second par $u + \Sigma A \log v$. On aura

$$\psi x = u + \Sigma A \log v. \tag{93}$$

Il est clair que cette équation aura encore lieu si le radical $\varDelta x$ change de signe. Donc en désignant par u' et v' les valeurs correspondantes de u et v, on aura

$$-\psi x = u' + \Sigma A \log v'.$$

Cela donne

$$2\psi x = u - u' + \Sigma A \log \frac{v}{v'}.$$

Mettons ici $-x$ au lieu de $+x$, on pourra supposer que $\varDelta x$ reste invariable; la fonction ψx changera de signe, et par conséquent on aura, en désignant par u'', u''', v'', v''' les valeurs correspondantes de u, u', v, v':

$$-2\psi x = u'' - u''' + \Sigma A \log \frac{v''}{v'''}.$$

De là on tire

$$\psi x = \tfrac{1}{4}(u - u' - u'' + u''') + \tfrac{1}{4}\Sigma A \log \frac{v v'''}{v' v''}.$$

Soit

$$v = p + qx + (p' + q'x)\varDelta x,$$

p, q, p', q' étant des fonctions paires, on aura

$$v' = p + qx - (p' + q'x)\varDelta x,$$
$$v'' = p - qx + (p' - q'x)\varDelta x,$$
$$v''' = p - qx - (p' - q'x)\varDelta x,$$

donc

$$v v''' = p^2 - q^2x^2 - (p'^2 - q'^2x^2)(\varDelta x)^2 + 2x(pq' - qp')\varDelta x,$$
$$v' v'' = p^2 - q^2x^2 - (p'^2 - q'^2x^2)(\varDelta x)^2 - 2x(pq' - qp')\varDelta x,$$

par conséquent on aura

$$\frac{v v'''}{v' v''} = \frac{fx + \varphi x \,.\, \varDelta x}{fx - \varphi x \,.\, \varDelta x},$$

fx et φx étant des fonctions entières, dont l'une est *paire* et l'autre *impaire*. Nous les supposerons, ce qui est permis, sans diviseur commun.

La partie algébrique $\frac{1}{4}(u - u' + u''' - u'')$ est évidemment de la forme $r\varDelta x$, où r est une fonction impaire de x. En écrivant A au lieu de $\frac{1}{4}A$, l'expression de ψx prendra la forme suivante:

(94) $$\psi x = r.\Delta x + \Sigma A \log \frac{fx + \varphi x.\Delta x}{fx - \varphi x.\Delta x}.$$

Quant aux coefficiens $A_1, A_2, \ldots A_\nu$, nous pourrons supposer qu'il soit impossible d'avoir entre eux une relation de cette forme

(95) $$m_1 A_1 + m_2 A_2 + \cdots + m_\nu A_\nu = 0,$$

où $m_1, m_2, \ldots m_\nu$ sont des nombres entiers. En effet, si cette équation avait lieu, on aurait

$$\Sigma A \log v = \frac{1}{m_\nu}\left\{A_1 \log \frac{v_1^{m_\nu}}{v_\nu^{m_1}} + A_2 \log \frac{v_2^{m_\nu}}{v_\nu^{m_2}} + \cdots + A_{\nu-1} \log \frac{v_{\nu-1}^{m_\nu}}{v_\nu^{m_{\nu-1}}}\right\},$$

c'est-à-dire:

$$\Sigma A \log v = A_1' \log v_1' + A_2' \log v_2' + \cdots + A'_{\nu-1} \log v'_{\nu-1},$$

équation dont le second membre contient un nombre moindre de logarithmes que le premier. On pourra répéter cette réduction jusqu'à ce qu'une équation telle que (95) soit impossible. Cela posé, il faut prendre la différentielle des deux membres et comparer entre elles les fonctions algébriques qui en résultent.

Considérons d'abord la partie logarithmique du second membre de la formule (94). Soit pour abréger

(96) $$\varrho = \log \frac{fx + \varphi x.\Delta x}{fx - \varphi x.\Delta x},$$

on aura, en différentiant, un résultat de la forme

(97) $$d\varrho = \frac{v.dx}{[(fx)^2 - (\varphi x)^2(\Delta x)^2]\Delta x}.$$

où v est une fonction paire et entière de x, savoir

(98) $$v = 2(fx.\varphi' x - \varphi x.f' x)(\Delta x)^2 - 2fx.\varphi x.[(1+c^2)x - 2c^2x^3].$$

En faisant

(99) $$\theta x = (fx)^2 - (\varphi x)^2(\Delta x)^2,$$

on pourra aussi mettre v sous cette forme:

(100) $$v\varphi x = 2f'x.\theta x - fx.\theta' x,$$

équation facile à vérifier.

Cela posé, décomposons la fonction entière θx en facteurs de la forme $(x^2 - a^2)^m$, et faisons en conséquence:

(101) $$(fx)^2 - (\varphi x)^2(\Delta x)^2 = (x^2 - a_1^2)^{m_1}(x^2 - a_2^2)^{m_2} \ldots (x^2 - a_\mu^2)^{m_\mu} = \theta x.$$

Maintenant l'équation (100) fait voir que si θx a le facteur $(x^2-a^2)^m$, v aura nécessairement le facteur $(x^2-a^2)^{m-1}$; donc la fonction fractionnaire $\frac{v}{\theta x}$ pourra être décomposée de la manière suivante:

(102) $$\frac{v}{\theta x}=t+\frac{\beta_1'}{a_1^2-x^2}+\frac{\beta_2'}{a_2^2-x^2}+\cdots+\frac{\beta_\mu'}{a_\mu^2-x^2},$$

où t est la partie entière, β_1', β_2', ... β_μ' des constantes. D'abord je dis que t est une constante. En effet l'expression (98) de v fait voir que le degré de cette fonction ne pourra jamais surpasser celui de θx. Pour trouver les coefficiens β_1', β_2', ..., appelons β' l'un quelconque d'entre eux, correspondant au facteur $(x^2-a^2)^m$ de θx. On aura

$$\beta'=\frac{v(a^2-x^2)}{\theta x} \text{ pour } x=a;$$

mais si l'on fait

$$\theta x=R(a^2-x^2)^m,$$

on aura en vertu de l'équation (100)

$$\frac{v(a^2-x^2)}{\theta x}=\frac{2f'x}{\varphi x}(a^2-x^2)-\frac{fx}{\varphi x}\frac{dR}{R.dx}(a^2-x^2)+2mx\frac{fx}{\varphi x},$$

donc en faisant $x=a$

$$\beta'=2ma\frac{fa}{\varphi a}.$$

Or on a $(fa)^2-(\varphi a)^2(\Delta a)^2=0$, donc

$$fa+\varphi a.\Delta a=0,$$

et par suite

$$\beta'=-2ma\Delta a,$$

On a donc

(103) $$\frac{v}{\theta x}=k-\frac{2m_1a_1\Delta a_1}{a_1^2-x^2}-\frac{2m_2a_2\Delta a_2}{a_2^2-x^2}-\cdots-\frac{2m_\mu a_\mu\Delta a_\mu}{a_\mu^2-x^2}.$$

En multipliant par $\frac{dx}{\Delta x}$ on aura la valeur de $d\varrho$. La formule (94) donnera donc, en différentiant,

$$\begin{aligned}\beta+\beta_0x^2+\frac{\alpha_1^2\beta_1}{\alpha_1^2-x^2}+\frac{\alpha_2^2\beta_2}{\alpha_2^2-x^2}+\cdots+\frac{\alpha_n^2\beta_n}{\alpha_n^2-x^2}&=\frac{dr}{dx}(\Delta x)^2-r[(1+c^2)x-2c^2x^3]\\&+A_1\left(k_1-\frac{2m_1a_1\Delta a_1}{a_1^2-x^2}-\frac{2m_2a_2\Delta a_2}{a_2^2-x^2}-\cdots\right)\\&+A_2\left(k_2-\frac{2m_1'a_1'\Delta a_1'}{a_1'^2-x^2}-\frac{2m_2'a_2'\Delta a_2'}{a_2'^2-x^2}-\cdots\right)\\&+\text{etc.}\end{aligned}$$

En substituant pour r une fonction rationnelle quelconque de x, on voit sans peine qu'il sera impossible de satisfaire à cette équation, à moins que r ne soit égal à zéro. En se rappelant que nous avons supposé qu'il soit impossible de trouver une relation entre un nombre moindre des fonctions $\Pi\alpha_1$, $\Pi\alpha_2$, ... $\Pi\alpha_n$, et en ayant égard à l'impossibilité d'une équation de la forme (95), on se convaincra aisément que tous les coefficiens A_1, A_2, ... A_ν doivent être nuls excepté un seul. Soit donc

$$A_2 = A_3 = \cdots = A_\nu = 0 \quad \text{et} \quad A_1 = 1,$$

on aura

$$\beta + \beta_0 x^2 + \frac{\alpha_1^2\beta_1}{\alpha_1^2 - x^2} + \frac{\alpha_2^2\beta_2}{\alpha_2^2 - x^2} + \cdots + \frac{\alpha_n^2\beta_n}{\alpha_n^2 - x^2}$$
$$= k_1 - \frac{2m_1 a_1 \varDelta a_1}{a_1^2 - x^2} - \frac{2m_2 a_2 \varDelta a_2}{a_2^2 - x^2} - \cdots - \frac{2m_\mu a_\mu \varDelta a_\mu}{a_\mu^2 - x^2},$$

donc

$$\beta = k_1, \quad \beta_0 = 0, \quad \alpha_1 = a_1, \quad \alpha_2 = a_2, \ldots$$
$$\beta_1 = -\frac{2m_1 \varDelta a_1}{a_1}, \quad \beta_2 = -\frac{2m_2 \varDelta a_2}{a_2}, \ldots$$

Cela posé, la formule générale (94) prendra la forme

$$(104) \qquad \beta.\varpi x - \frac{2m_1 \varDelta a_1}{a_1}\Pi\alpha_1 - \cdots - \frac{2m_n \varDelta a_n}{a_n}\Pi\alpha_n = \log\frac{fx + \varphi x.\varDelta x}{fx - \varphi x.\varDelta x} + C,$$

où les paramètres α_1, α_2, ... α_n doivent satisfaire à l'équation

$$(105) \quad (fx)^2 - (\varphi x)^2(1-x^2)(1-c^2x^2) = (x^2-\alpha_1^2)^{m_1}(x^2-\alpha_2^2)^{m_2}\ldots(x^2-\alpha_n^2)^{m_n},$$

l'une des fonctions fx, φx étant paire et l'autre impaire.

Telle est donc la relation la plus générale entre des fonctions rapportées au même module et à la même variable. Il est remarquable que la fonction de la seconde espèce n'entre point dans cette relation. Quant à la quantité constante β qui multiplie la fonction de la première espèce ϖx, elle pourra dans certaines circonstances se réduire à zéro.

L'équation (105) qui donne les relations nécessaires entre les paramètres α_1, α_2, ... α_n est précisément de la même forme que celle que nous avons considéré dans le chapitre I. En regardant α_1, α_2, ... α_n comme des variables, elle donnera en vertu du théorème I,

$$(106) \quad \begin{cases} m_1\Pi'\alpha_1 + m_2\Pi'\alpha_2 + \cdots + m_n\Pi'\alpha_n = C - \dfrac{a}{2\varDelta a}\log\dfrac{fa + \varphi a.\varDelta a}{fa - \varphi a.\varDelta a}, \\ m_1\varpi\alpha_1 + m_2\varpi\alpha_2 + \cdots + m_n\varpi\alpha_n = C, \end{cases}$$

$$\text{où } \Pi'\alpha = \int \frac{d\alpha}{\left(1-\frac{\alpha^2}{a^2}\right)\Delta\alpha}.$$

Les paramètres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ satisfont donc à l'équation différentielle

(107) $$\frac{m_1 d\alpha_1}{\Delta\alpha_1} + \frac{m_2 d\alpha_2}{\Delta\alpha_2} + \cdots + \frac{m_n d\alpha_n}{\Delta\alpha_n} = 0.$$

Pour avoir toutes les fonctions de la troisième espèce qui soient réductibles indéfiniment à la première espèce, il faut faire $n=1$. En posant $\alpha_1=\alpha$, $m_1=m$, on a

(108) $$\Pi\alpha = \frac{\beta\alpha}{2m\Delta\alpha}\varpi x - \frac{\alpha}{2m\Delta\alpha}\log\frac{fx+\varphi x.\Delta x}{fx-\varphi x.\Delta x}.$$

Pour déterminer le paramètre α, on aura dans ce cas l'équation

(109) $$(fx)^2-(\varphi x)^2(1-x^2)(1-c^2x^2)=(x^2-\alpha^2)^m,$$

ce qui fait dépendre α d'une équation qui est généralement du degré m^2. Le cas le plus simple est celui où $m=2$. On aura dans ce cas

$$\varphi x = \frac{1}{c}\sqrt{-1},\quad fx = ax,$$

donc

$$(x^2-\alpha^2)^2 = x^4 - \left(\frac{1+c^2}{c^2}-a^2\right)x^2 + \frac{1}{c^2} = \left(x^2 \pm \frac{1}{c}\right)^2;$$

donc α pourra avoir les deux valeurs $\frac{1}{\sqrt{c}}$, $\frac{1}{\sqrt{-c}}$. Les valeurs correspondantes de a sont $1-\frac{1}{c}$, $1+\frac{1}{c}$. On aura ainsi

$$\Pi\left(\frac{1}{\sqrt{c}}\right) = \int\frac{dx}{(1-cx^2)\Delta x} = k\varpi x + \tfrac{1}{4}\frac{\sqrt{-1}}{c-1}\log\frac{(c-1)x+\sqrt{-1}.\Delta x}{(c-1)x-\sqrt{-1}.\Delta x},$$

où l'on pourra changer le signe de c.

Si $m=3$, on aura dans le cas où fx est impair,

$$fx = x^3 + ax,\quad \varphi x = b,$$

donc

$$(x^3+ax)^2 - b^2(1-x^2)(1-c^2x^2) = (x^2-\alpha^2)^3.$$

De là on tire

$$\alpha^3 = b,\quad \alpha^3 + a\alpha + b\Delta\alpha = 0,\quad 2a - c^2b^2 = -3\alpha^2,\quad a^2 + (1+c^2)b^2 = 3\alpha^4,$$

donc en éliminant a et b on trouvera

$$a = \tfrac{1}{2}(c^2\alpha^6 - 3\alpha^2),$$

$$\varDelta\alpha = \tfrac{1}{2}(1-c^2\alpha^4).$$

Si donc α est une racine de cette équation, on aura

$$\Pi\alpha = \int \frac{dx}{\left(1-\frac{x^2}{\alpha^2}\right)\varDelta x} = k\varpi x - \tfrac{1}{3}\frac{\alpha}{1-c^2\alpha^4}\log\frac{x^3+\frac{1}{2}(c^2\alpha^6-3\alpha^2)x+\alpha^3.\varDelta x}{x^3+\frac{1}{2}(c^2\alpha^6-3\alpha^2)x-\alpha^3.\varDelta x}.$$

Généralement la quantité α sera, pour un m quelconque, racine de l'une des deux équations

(110) $$x_m = 0,\quad x_m = \tfrac{1}{0},$$

où x_m est la fonction de x que nous avons considéré dans le paragraphe 4 du chapitre I, et qui est telle qu'on ait

$$\frac{dx_m}{\varDelta x_m} = m\frac{dx}{\varDelta x},$$

et en même temps

$$x_m = 0 \text{ pour } x = 0.$$

On pourra encore remarquer que si l'on désigne par α une racine de $x_m=0$, $\frac{1}{c\alpha}$ sera racine de l'équation $x_m=\frac{1}{0}$. Pour prouver que α satisfait à l'une des équations (110), il suffit de remarquer qu'on a (39):

(111) $$p^2 - q^2(\varDelta x)^2 = (x^2-\alpha^2)^m(x^2-\alpha_m^2),$$

où α_m désigne la même fonction de α, que x_m de x. En multipliant les deux équations (109, 111) membre à membre, il viendra

(111') $$[pfx \pm q\varphi x(\varDelta x)^2]^2 - (p\varphi x \pm qfx)^2(\varDelta x)^2 = (x^2-\alpha^2)^{2m}(x^2-\alpha_m^2).$$

Or on tire des mêmes équations

$$p^2(fx)^2 - q^2(\varphi x)^2(\varDelta x)^4 = (x^2-\alpha^2)^m.R,$$

R étant une fonction entière. De là il suit que l'une des deux fonctions

$$pfx + q\varphi x(\varDelta x)^2,\quad pfx - q\varphi x(\varDelta x)^2$$

sera divisible par $(x^2-\alpha^2)^m$; donc en divisant l'équation (111') par $(x^2-\alpha^2)^{2m}$, on aura un résultat de la forme

$$r^2 - \varrho^2(\varDelta x)^2 = x^2 - \alpha_m^2,$$

où l'une des fonctions r et ϱ sera paire et l'autre impaire. On doit donc avoir d'abord $\varrho=0$, et ensuite $r^2=x^2-\alpha_m^2$, d'où $\alpha_m=0$, ou $\alpha_m=\frac{1}{0}$. Réciproquement, si l'une de ces équations a lieu, il est clair par la forme de

l'équation (111) qu'on pourra satisfaire à l'équation (109). Il est à remarquer que dans le cas que nous considérons, β ne pourra jamais être zéro. Donc il n'existe pas de fonction de la troisième espèce, exprimable par des fonctions algébriques et logarithmiques.

Le cas particulier le plus remarquable de la formule générale (104) est celui où $n=3$ et $m_1=m_2=m_3=1$. Dans ce cas, en faisant $\alpha_3=\alpha$, $\Delta\alpha_3=-\Delta\alpha$, on aura

$$(112)\qquad \frac{\Delta\alpha_1}{\alpha_1}\Pi\alpha_1+\frac{\Delta\alpha_2}{\alpha_2}\Pi\alpha_2=\frac{\Delta\alpha}{\alpha}\Pi\alpha+\beta.\varpi x-\tfrac{1}{2}\log\frac{fx+\varphi x.\Delta x}{fx-\varphi x.\Delta x},$$

où

$$(113)\qquad \begin{cases} fx=x^3+ax,\quad \varphi x=b, \\ \text{de sorte que} \\ (x^3+ax)^2-b^2(1-x^2)(1-c^2x^2)=(x^2-\alpha^2)(x^2-\alpha_1^2)(x^2-\alpha_2^2), \end{cases}$$

d'où l'on tire, comme dans le paragraphe 3 du chapitre I,

$$(114)\qquad \begin{cases} \alpha=\dfrac{\alpha_1\Delta\alpha_2+\alpha_2\Delta\alpha_1}{1-c^2\alpha_1^2\alpha_2^2}, \\ b=\alpha\alpha_1\alpha_2;\quad a=\tfrac{1}{2}(c^2\alpha^2\alpha_1^2\alpha_2^2-\alpha^2-\alpha_1^2-\alpha_2^2), \\ \dfrac{\Delta\alpha}{\alpha}=\dfrac{\alpha^2+a}{\alpha\alpha_1\alpha_2};\quad \beta=-c^2\alpha\alpha_1\alpha_2. \end{cases}$$

Les deux paramètres α_1, α_2 sont donc arbitraires.

Comme cas particulier on doit remarquer celui où α_2 est infini. On aura dans ce cas

$$\alpha=\pm\frac{1}{c\alpha_1}.$$

On pourra donc réduire l'une à l'autre deux fonctions, dont les paramètres sont respectivement α, $\dfrac{1}{c\alpha}$. La formule correspondante pour effectuer cette réduction est:

$$(115)\qquad \Pi\alpha+\Pi\left(\frac{1}{c\alpha}\right)=\varpi x+\tfrac{1}{2}\frac{\alpha}{\Delta\alpha}\log\frac{x\Delta\alpha+\alpha\Delta x}{x\Delta\alpha-\alpha\Delta x}.$$

Pour trouver toutes les fonctions réductibles l'une à l'autre, il suffit de faire dans la formule (104), $n=2$. Cela donne

$$(116)\qquad m_1\frac{\Delta\alpha_1}{\alpha_1}\Pi\alpha_1+m_2\frac{\Delta\alpha_2}{\alpha_2}\Pi\alpha_2=\beta.\varpi x-\tfrac{1}{2}\log\frac{fx+\varphi x.\Delta x}{fx-\varphi x.\Delta x},$$

où les paramètres α_1 et α_2 sont liés entre eux par l'équation

$$(117) \qquad (fx)^2 - (\varphi x)^2 (1 - x^2)(1 - c^2 x^2) = (x^2 - \alpha_1^2)^{m_1} (x^2 - \alpha_2^2)^{m_2}$$

ce qui donnera une seule équation entre α_1 et α_2.

CHAPITRE IV.

De l'équation $(1 - y^2)(1 - c'^2 y^2) = r^2 (1 - x^2)(1 - c^2 x^2)$.

Considérons maintenant le problème (A), savoir de satisfaire de la manière la plus générale à l'équation

$$(118) \qquad (1 - y^2)(1 - c'^2 y^2) = r^2 (1 - x^2)(1 - c^2 x^2),$$

y et r étant des fonctions rationnelles de x. La méthode qui s'offre d'abord pour résoudre ce problème est celle des coefficiens indéterminés, mais cette méthode ne paraît guère applicable si le degré de la fonction y est un peu élevé; du moins son application serait très pénible. Je vais en indiquer une autre qui conduit assez simplement à la solution de ce problème, qui est, ce me semble, le plus important dans la théorie des fonctions elliptiques.

§ 1.

Réduction du problème à celui de satisfaire à l'équation:

$$\frac{dy}{\Delta(y, c')} = \varepsilon \frac{dx}{\Delta(x, c)}.$$

Nous allons voir d'abord que si l'équation (118) a lieu, on doit avoir nécessairement

$$r = \frac{1}{\varepsilon} \frac{dy}{dx},$$

où ε est constant.

Il est facile de voir que les deux facteurs $1 - y^2$, $1 - c'^2 y^2$ ne peuvent s'évanouir en même temps, car cela donnerait $c'^2 = 1$, mais ce cas est exclu. On doit donc avoir séparément

$$(119) \qquad 1 - y^2 = r_1^2 \varrho, \quad 1 - c'^2 y^2 = r_2^2 \varrho',$$

r_1 et r_2 étant des fonctions rationnelles dont le produit est égal à r. On aura également

$$\varrho \varrho' = (1 - x^2)(1 - c^2 x^2).$$

Or, en différentiant les deux équations (119), on en tirera

$$(120) \qquad \begin{cases} -2y\,dy = r_1 (r_1\,d\varrho + 2\varrho\,dr_1), \\ -2c'^2 y\,dy = r_2 (r_2\,d\varrho' + 2\varrho'\,dr_2), \end{cases}$$

Mais il est clair que y ne pourra avoir aucun facteur commun, ni avec r_1 ni avec r_2, donc il faut que le numérateur de la fraction rationnelle $\frac{dy}{dx}$ soit divisible par r_1 et par r_2; mais ces deux fonctions ne pourront s'évanouir en même temps, donc on doit avoir

(121) $$\frac{dy}{dx} = r_1 r_2 v = rv,$$

v étant une fonction rationnelle de x, qui ne devient pas infinie en attribuant à x une valeur qui donne $r=0$. Soit $y=\frac{p}{q}$, où p et q sont deux fonctions entières de x sans diviseur commun, on aura évidemment

(122) $$\left\{\begin{aligned} & r = \frac{\theta}{q^2}, \\ & \text{donc} \\ & q^2 \frac{dy}{dx} = \theta v = \frac{q\,dp - p\,dq}{dx}. \end{aligned}\right.$$

Cela fait voir que v est une fonction entière. Or je dis que v se réduira à une constante. Désignons par m et n les degrés des fonctions p et q, et par μ et ν ceux de θ et v. Cela posé, il y a trois cas à considérer:

1) *Si* $m > n$. Dans ce cas l'équation

(123) $$(q^2 - p^2)(q^2 - c'^2 p^2) = \theta^2 (1 - x^2)(1 - c^2 x^2)$$

fait voir qu'on doit avoir

$$4m = 2\mu + 4;$$

mais comme on a

$$\theta v = \frac{q\,dp - p\,dq}{dx},$$

il s'ensuit que

$$\mu + \nu = m + n - 1,$$

donc

$$\nu < 2m - \mu - 1,$$

ou, puisque $2m - \mu = 2$,

$$\nu < 1,$$

donc

$$\nu = 0,$$

et par conséquent v constant.

2) *Si* $n > m$. On aura de la même manière

$$4n = 2\mu + 4, \quad 2n - \mu = 2,$$

$$\nu < 2n - \mu - 1, \quad \nu < 1, \quad \nu = 0,$$

donc aussi dans ce cas v sera égal à une constante.

3) *Si* $n = m$. Dans ce cas il peut arriver que le degré de l'une des fonctions

$$q - p, \quad q + p, \quad q - c'p, \quad q + c'p$$

soit moindre que $n = m$. Soit donc par exemple

$$q - p = \varphi,$$

où le degré de φ, que nous désignerons par $m - k$, ne pourra surpasser m. On aura en vertu de l'équation (123)

$$4m - k = 2\mu + 4,$$

d'où

$$2m - \mu = 2 + \tfrac{1}{2}k;$$

maintenant si l'on substitue la valeur de $q = p + \varphi$, on aura

$$\theta v = \frac{p\,dq - q\,dp}{dx} = \frac{p\,d\varphi - \varphi\,dp}{dx},$$

donc

$$\mu + \nu = m + m - k - 1 = 2m - k - 1,$$

si $k > 0$, et

$$\mu + \nu = m + m - k - 2 = 2m - k - 2,$$

si $k = 0$. Dans le premier cas on a

$$\nu = 2m - \mu - k - 1 = 1 - \tfrac{1}{2}k = 0,$$

et dans le second

$$\nu = 2m - \mu - 2 = 0.$$

Le degré de la fonction entière v est donc dans tous les cas égal à zéro, et par conséquent v se réduit à une constante. En la désignant par ε, on aura

(124) $$\varepsilon r = \frac{dy}{dx}.$$

Cela posé, l'équation

$$(1 - y^2)(1 - c'^2 y^2) = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \varepsilon^{-2} (1 - x^2)(1 - c^2 x^2)$$

donnera celle-ci:

(125) $$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-c'^2y^2)}} = \frac{\varepsilon . dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}};$$

le problème est ainsi ramené à celui de satisfaire de la manière la plus générale à cette équation en supposant y rationnel en x. En intégrant, on aura

(126) $$\varpi(y, c') = \varepsilon . \varpi(x, c) + C.$$

En comparant ce résultat à ce que nous avons démontré dans le chapitre II, on aura ce théorème:

Théorème VIII. „Si l'on a une relation quelconque entre un nombre quelconque de fonctions elliptiques, et qu'on désigne par c le module de l'une d'elles prise à volonté, parmi les autres fonctions on en trouvera au moins une, de module c', et telle qu'on ait entre *les fonctions de la première espèce*, correspondantes respectivement aux modules c' et c, cette relation très simple

$$\varpi(y, c') = \varepsilon . \varpi(x, c) + C,$$

où y est une fonction rationnelle de x et ε une quantité constante."

Ce théorème est de la plus grande importance dans la théorie des fonctions elliptiques.

Il s'agit maintenant de trouver toutes les valeurs de y et des modules c' et c propres à satisfaire à l'équation (125). Si la fonction y contient des puissances de x supérieures à la première, elle jouira d'une certaine propriété, qui conduira à son expression générale, en supposant connue la solution complète dans le cas où y ne contient x qu'à la première puissance. C'est pourquoi nous donnerons d'abord la solution pour ce cas.

§ 2.

Solution du problème dans le cas où $y = \frac{\alpha + \beta x}{\alpha' + \beta' x}$.

En substituant cette valeur de y dans l'équation

$$\varepsilon^2(1-y^2)(1-c'^2y^2) = (1-x^2)(1-c^2x^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2,$$

rien n'est plus facile, que de trouver toutes les solutions possibles. Je vais seulement les transcrire:

I. $c' = \pm c,\quad y = \pm x,\quad y = \pm \frac{1}{cx},\quad \varepsilon = \pm 1,$

II. $c' = \pm \frac{1}{c}, \quad y = \pm cx, \quad y = \pm \frac{1}{x}, \quad \varepsilon = \pm c,$

III. $c' = \pm \left(\frac{1-\sqrt{c}}{1+\sqrt{c}}\right)^2, \quad y = \pm \frac{1+\sqrt{c}}{1-\sqrt{c}} \cdot \frac{1 \pm x\sqrt{c}}{1 \mp x\sqrt{c}}, \quad \varepsilon = \pm \frac{1}{2}\sqrt{-1}\,(1+\sqrt{c})^2,$

IV. $c' = \pm \left(\frac{1+\sqrt{c}}{1-\sqrt{c}}\right)^2, \quad y = \pm \frac{1-\sqrt{c}}{1+\sqrt{c}} \cdot \frac{1 \pm x\sqrt{c}}{1 \mp x\sqrt{c}}, \quad \varepsilon = \pm \frac{1}{2}\sqrt{-1}\,(1-\sqrt{c})^2,$

V. $c' = \pm \left(\frac{1-\sqrt{-c}}{1+\sqrt{-c}}\right)^2, \quad y = \pm \frac{1+\sqrt{-c}}{1-\sqrt{-c}} \cdot \frac{1 \pm x\sqrt{-c}}{1 \mp x\sqrt{-c}}, \quad \varepsilon = \pm \frac{1}{2}\sqrt{-1}\,(1+\sqrt{-c})^2,$

VI. $c' = \pm \left(\frac{1+\sqrt{-c}}{1-\sqrt{-c}}\right)^2, \quad y = \pm \frac{1-\sqrt{-c}}{1+\sqrt{-c}} \cdot \frac{1 \pm x\sqrt{-c}}{1 \mp x\sqrt{-c}}, \quad \varepsilon = \pm \frac{1}{2}\sqrt{-1}\,(1-\sqrt{-c})^2,$

On voit que le module c' a six valeurs différentes. La fonction y en aura douze, car à chaque valeur de c' répondent deux valeurs différentes de y. Ces formules nous seront utiles pour la solution du problème général.

§ 3.

Propriété générale de la fonction rationnelle y, qui satisfait à une équation de la forme:

$$\frac{dy}{\Delta' y} = \varepsilon \frac{dx}{\Delta x}.$$

Soit pour abréger

$$\sqrt{(1-y^2)(1-c'^2y^2)} = \Delta' y \quad \text{et} \quad \sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)} = \Delta x,$$

l'équation (125), à laquelle il s'agit de satisfaire, prendra la forme

$$(127) \qquad \frac{dy}{\Delta' y} = \varepsilon \frac{dx}{\Delta x},$$

où y est supposé fonction *rationnelle* de x. Soit

$$(128) \qquad y = \psi x$$

la fonction cherchée. Si, en réduisant ψx à sa plus simple expression, la variable x y entre élevée jusqu'à la μ^{me} puissance inclusivement, nous dirons pour abréger que ψx est une fonction rationnelle de x du degré μ. Sa forme générale sera donc

$$(129) \qquad \psi x = \frac{A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots + A_\mu x^\mu}{B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + \cdots + B_\mu x^\mu},$$

le numérateur n'ayant pas de diviseur commun avec le dénominateur, et les deux coefficiens A_μ et B_μ n'étant pas nuls à la fois.

Cela posé, si l'on considère x comme fonction de y, l'équation $y = \psi x$ donnera pour x, μ valeurs, qui seront nécessairement inégales, en supposant y arbitraire. Il est évident que toutes ces valeurs de x satisferont également à l'équation différentielle

$$\frac{dy}{\varDelta' y} = \varepsilon \frac{dx}{\varDelta x}.$$

En désignant donc par x et x' deux d'entre elles, on aura en même temps

$$\frac{dy}{\varDelta' y} = \varepsilon \frac{dx'}{\varDelta x'}.$$

Donc, en égalant ces deux valeurs de $\frac{dy}{\varDelta' y}$, on aura

$$\frac{dx'}{\varDelta x'} = \frac{dx}{\varDelta x}.$$

Une telle relation aura donc toujours lieu entre deux racines quelconques de l'équation

$$y = \psi x.$$

Il est facile d'en tirer une équation algébrique entre x' et x. En effet l'intégrale complète de cette équation est en vertu de l'équation (36)

(130) $$x' = \frac{x \varDelta e + e \varDelta x}{1 - c^2 e^2 x^2},$$

e étant une constante. Maintenant x et x' étant tous deux racines de l'équation $y = \psi x$, on aura

$$y = \psi x, \quad y = \psi x',$$

donc

(131) $$\psi x' = \psi x,$$

et puisque y est variable, cette équation doit nécessairement avoir lieu pour une valeur quelconque de x. On aura donc immédiatement ce théorème:

Théorème IX. „Pour qu'une fonction rationnelle y de x, du degré μ, puisse satisfaire à une équation différentielle de la forme

$$\frac{dy}{\varDelta' y} = \varepsilon \frac{dx}{\varDelta x},$$

il faut que cette fonction y reste invariable, en mettant pour x, μ valeurs différentes de la forme

$$\frac{x \varDelta e + e \varDelta x}{1 - c^2 e^2 x^2},$$

e étant constant."

Ce théorème nous conduira, comme on va voir, de la manière la plus simple à l'expression générale de y. Il s'agit seulement de déterminer les valeurs convenables de la constante e; car celles-ci étant trouvées, rien n'est plus facile que de déterminer ensuite toutes les autres conditions nécessaires. Occupons-nous d'abord de la recherche de cette constante.

§ 4.

Détermination de toutes les racines de l'équation $y = \psi x$.

Faisons pour abréger

(132) $$\theta x = \frac{x\,\Delta e + e\,\Delta x}{1 - c^2 e^2 x^2},$$

nous aurons d'après ce que nous venons de voir (131),

(133) $$\psi(\theta x) = \psi x,$$

où le signe du radical Δx est évidemment arbitraire. Je remarque maintenant que cette équation, ayant lieu pour une valeur quelconque de x, subsistera encore en mettant θx pour x. On aura donc

$$\psi[\theta(\theta x)] = \psi(\theta x) = \psi x.$$

En mettant de nouveau θx au lieu de x et ainsi de suite, on aura

$$y = \psi x = \psi(\theta x) = \psi(\theta^2 x) = \psi(\theta^3 x) = \cdots = \psi(\theta^n x) = \text{etc.},$$

où l'on a fait pour abréger

$$\theta^2 x = \theta\theta x,\ \ \theta^3 x = \theta\theta^2 x, \ \ldots \text{ etc. } \theta^n x = \theta\theta^{n-1} x.$$

De là il suit que toutes les quantités de la série

(134) $$x,\ \theta x,\ \theta^2 x, \ \ldots\ \theta^n x, \ \ldots$$

seront des racines de l'équation $y = \psi x$. Maintenant cette équation n'ayant qu'un nombre limité de racines, savoir μ, il faut nécessairement que plusieurs des quantités de la série (134) soient égales entre elles. Il s'agit de savoir si cela serait possible. Pour cela il faut d'abord avoir l'expression générale de $\theta^n x$ en fonction de x et e. Regardons pour le moment e comme variable indépendante. Alors on aura en vertu de l'équation (132),

$$\theta^n x = \frac{\theta^{n-1} x \,.\, \Delta e + e\,\Delta(\theta^{n-1} x)}{1 - c^2 e^2 (\theta^{n-1} x)^2},$$

$$\frac{d(\theta^n x)}{\Delta(\theta^n x)} = \frac{d(\theta^{n-1} x)}{\Delta(\theta^{n-1} x)} + \frac{de}{\Delta e}.$$

En mettant dans cette équation successivement $n-1$, $n-2$, ... 2, 1 au lieu de n, et en supposant, ce qui est permis, que les radicaux $\Delta(\theta^n x)$, $\Delta(\theta^{n-1}x)$ ... $\Delta(\theta x)$, Δx ont les mêmes signes dans deux équations consécutives, on aura sur le champ

$$\frac{d(\theta^n x)}{\Delta(\theta^n x)} = \frac{dx}{\Delta x} + n\frac{de}{\Delta e}.$$

Cela posé, déterminons d'après les règles du paragraphe 4 du chapitre I une fonction rationnelle e_n de e, telle que

$$\frac{de_n}{\Delta e_n} = n\frac{de}{\Delta e},$$

on aura

$$\frac{d(\theta^n x)}{\Delta(\theta^n x)} = \frac{dx}{\Delta x} + \frac{de_n}{\Delta e_n}.$$

Mais si l'on fait

$$x' = \frac{x\Delta e_n + e_n\Delta x}{1 - c^2 e_n^2 x^2},$$

on a

$$\frac{dx'}{\Delta x'} = \frac{dx}{\Delta x} + \frac{de_n}{\Delta e_n};$$

donc

$$\frac{d(\theta^n x)}{\Delta(\theta^n x)} = \frac{dx'}{\Delta x'}.$$

Cette dernière équation donne la suivante:

$$\theta^n x = \frac{x'\Delta e' + e'\Delta x'}{1 - c^2 e'^2 x'^2},$$

où e' est une constante.

Pour déterminer cette constante, faisons $e=0$; on aura alors $e_n=0$ et $\Delta e_n = 1$. Donc la valeur de x' deviendra: $x'=x$, et par suite celle de $\theta^n x$ sera

$$\theta^n x = \frac{x\Delta e' + e'\Delta x}{1 - c^2 e'^2 x^2}.$$

Mais ayant $\theta x = x$, on aura encore $\theta^n x = x$, donc

$$x = \frac{x\Delta e' + e'\Delta x}{1 - c^2 e'^2 x^2}.$$

Cette équation devant avoir lieu pour une valeur quelconque de x, ne pourra subsister à moins qu'on n'ait séparément $e'=0$, $\Delta e'=1$; donc on aura

$$\theta^n x = x',$$

c'est-à-dire

(135) $$\theta^n x = \frac{x\,\Delta e_n + e_n\,\Delta x}{1 - c^2 e_n^2 x^2}.$$

Telle sera l'expression de $\theta^n x$ pour une valeur quelconque du nombre entier n. Comme on le voit, elle a la forme que doit avoir une racine quelconque de l'équation $y = \psi x$.

Cela posé, soient $\theta^m x$ et $\theta^{m+n} x$ deux quantités de la série (134), égales entre elles; il en existera toujours d'après la remarque faite plus haut. On aura donc

$$\theta^{m+n} x = \theta^m x,$$

mais $\theta^{m+n} x$ est évidemment la même chose que $\theta^n(\theta^m x)$, donc en mettant x pour $\theta^m x$, il viendra

(136) $$\theta^n x = x.$$

Une telle équation doit donc toujours avoir lieu, quel que soit x. Si elle a lieu effectivement, il est clair que la série (134) ne contiendra que n termes différens, car, passé $\theta^{n-1} x$, les termes se reproduiront dans le même ordre, puisqu'on a $\theta^{n+1} x = \theta x$, $\theta^{n+2} x = \theta^2 x$ etc. Si l'on suppose, ce qui est permis, que n, dans l'équation $\theta^n x = x$, a la plus petite valeur possible pour la valeur donnée de e, il est clair également que les n quantités

(137) $$x,\ \theta x,\ \theta^2 x,\ \ldots\ \theta^{n-1} x$$

seront nécessairement différentes entre elles. Car si l'on avait par exemple

$$\theta^m x = \theta^{m+\mu} x,$$

il en résulterait $\theta^\mu x = x$, ce qui est contre l'hypothèse, attendu que μ est moindre que n.

Il s'agit donc de satisfaire à l'équation

$$\theta^n x = x.$$

En y substituant l'expression de $\theta^n x$, donnée par la formule (135), il viendra

$$x = \frac{x\,\Delta e_n + e_n\,\Delta x}{1 - c^2 e_n^2 x^2}.$$

Or il est impossible de satisfaire à cette équation pour une valeur quelconque de x, à moins qu'on n'ait séparément les deux équations:

(138) $$e_n = 0,\quad \Delta e_n = 1;$$

et réciproquement, si ces équations sont satisfaites, l'équation $\theta^n x = x$ le sera également. Or je dis qu'il sera toujours possible de satisfaire à ces deux équations à la fois.

D'abord si n est impair, les deux quantités e_n et $\frac{\Delta e_n}{\Delta e}$ seront des fonctions rationnelles de e, comme nous l'avons vu chapitre I § 4. Si donc on désigne par e une racine quelconque de l'équation

(139) $$e_n = 0,$$

il suffit, pour satisfaire à l'équation $\Delta e_n = 1$, de déterminer le radical Δe de telle sorte que

(140) $$\Delta e = \frac{\Delta e}{\Delta e_n},$$

après avoir mis le second membre de cette expression sous la forme d'une fonction rationnelle en e. C'est ce qu'on voit en remarquant que si $e_n = 0$, la quantité $\Delta e_n = \pm\sqrt{(1 - e_n^2)(1 - c^2 e_n^2)}$ ne pourra avoir que l'une des deux valeurs $+1$, -1.

Si au contraire n est un nombre pair, on a vu que Δe_n sera une fonction *rationnelle* de e, de même que $\frac{\Delta e_n}{1 - c^2 e_n^2}$. En désignant cette dernière par ε_n, on doit avoir, en vertu des équations (138),

(141) $$\varepsilon_n = 1.$$

Or je dis que si e est une racine quelconque de cette équation, on aura à la fois $e_n = 0$, $\Delta e_n = 1$. En effet ayant

$$\varepsilon_n = \frac{\Delta e_n}{1 - c^2 e_n^2} = \frac{\sqrt{1 - e_n^2}}{\sqrt{1 - c^2 e_n^2}} = 1.$$

on en tire en carrant,

$$1 - e_n^2 = 1 - c^2 e_n^2,$$

et cela donne

$$e_n = 0,$$

car c^2 est différent de l'unité. Or ayant $e_n = 0$ et $\varepsilon_n = 1$, on aura évidemment $\Delta e_n = 1$; donc etc.

On pourra donc satisfaire à la fois aux deux équations

$$e_n = 0, \quad \Delta e_n = 1,$$

et l'on aura toujours n^2 valeurs différentes et convenables de e, car en vertu des formules (51, 55) les équations $e_n = 0$, $\varepsilon_n = 1$ seront du degré n^2 en e.

Il s'agit maintenant de choisir les valeurs de e qui rendent toutes les n quantités x, θx, ... $\theta^{n-1} x$ différentes entre elles, car cela est une seconde condition à laquelle doit satisfaire e.

Or pour cela il suffit de rejeter toutes les valeurs de e qui pourraient donner $\theta^\mu x = x$, où μ est moindre que n. On pourra toujours supposer μ facteur de n. En effet soit k le plus grand commun diviseur de μ et n, on pourra trouver deux nombres entiers μ' et n' tels que

$$\mu'\mu = n'n + k.$$

Or l'équation $\theta^\mu x = x$ donne

$$\theta^{\mu'\mu} x = x,$$

donc

$$\theta^{n'n+k} x = x = \theta^k \theta^{n'n} x;$$

mais en vertu de $\theta^n x = x$, on a encore

$$\theta^{n'n} x = x,$$

donc enfin

$$\theta^k x = x;$$

donc, si $\theta^\mu x = x$, on aura encore $\theta^k x = x$, où k est diviseur de n. Donc il suffit de rejeter toutes les valeurs de e qui pourraient satisfaire en même temps à ces deux équations

$$e_\mu = 0, \quad \varDelta e_\mu = 1,$$

où μ est un facteur de n; et il faut nécessairement les rejeter toutes, car si l'on a $\theta^\mu x = x$, on a nécessairement $\theta^n x = x$.

Ainsi on déterminera aisément une équation en e, dont toutes les racines donneront des valeurs convenables de cette constante. Si n est un nombre premier impair, on a $\mu = 1$; donc la seule racine qu'il faut rejeter de celles de l'équation $e_n = 0$, est celle-ci

$$e = 0.$$

On aura donc $n^2 - 1$ valeurs convenables de e. Car l'équation $e_n = 0$ est du degré n^2.

Il y a une remarque essentielle à faire sur les quantités

$$x, \ \theta x, \ \theta^2 x, \ \ldots \ \theta^{n-1} x,$$

c'est qu'on aura toujours en même temps

$$(142) \qquad \theta^m x = \frac{x \varDelta e_m + e_m \varDelta x}{1 - c^2 x^2 e_m^2}, \quad \theta^{n-m} x = \frac{x \varDelta e_m - e_m \varDelta x}{1 - c^2 x^2 e_m^2}.$$

En effet, on a (43)

$$e_{n-m} = \frac{e_n \varDelta e_m - e_m \varDelta e_n}{1 - c^2 e_n^2 e_m^2};$$

mais $e_n = 0$, $\varDelta e_n = 1$, donc

$$e_{n-m} = -e_m.$$

On aura également (42)

$$e_n = \frac{e_m \Delta e_{n-m} + e_{n-m} \Delta e_m}{1 - c^2 e_m^2 e_{n-m}^2} = 0,$$

donc à cause de $e_{n-m} = -e_m$, on aura

$$\Delta e_{n-m} = \Delta e_m.$$

En substituant ces valeurs de e_{n-m}, Δe_{n-m} dans l'équation

$$\theta^{n-m} x = \frac{x \Delta e_{n-m} + e_{n-m} \Delta x}{1 - c^2 e_{n-m}^2 x^2},$$

on aura précisément la seconde des équations (142).

Si l'on multiplie entre elles les valeurs de $\theta^m x$ et $\theta^{n-m} x$, le produit sera rationnel, et l'on trouvera

$$(143) \qquad \theta^m x . \theta^{n-m} x = \frac{x^2 - e_m^2}{1 - c^2 e_m^2 x^2}.$$

On aura de même

$$(144) \qquad \theta^m x + \theta^{n-m} x = \frac{2x \Delta e_m}{1 - c^2 e_m^2 x^2}.$$

Ces formules nous seront utiles dans la suite.

D'après ce qui précède, les n quantités

$$x, \ \theta x, \ \theta^2 x, \ \ldots \ \theta^{n-1} x$$

sont différentes entre elles, et racines de l'équation $y = \psi x$. Le degré μ de cette équation est donc égal à n, s'il ne surpasse pas ce nombre. Nous verrons plus bas qu'il suffira de considérer le cas où $\mu = n$. On pourra même supposer n premier.

§ 5.

Détermination de toutes les valeurs de y qui pourront répondre aux mêmes valeurs des racines, lorsqu'on en connait une seule.

Pour simplifier la solution du problème général, voyons d'abord si plusieurs valeurs différentes de la fonction y et du module c' pourront répondre aux mêmes racines de l'équation $y = \psi x$. Rien n'est plus facile que de déterminer toutes les valeurs de y et c'. En effet, soit $\psi z = \frac{p}{q}$, où p et q sont des fonctions entières de z sans diviseur commun. En désignant par

$$x, x', x'' \ldots x^{(\mu-1)}$$

toutes les racines de l'équation

$$y = \psi x,$$

on aura

$$p - qy = (a - by)(z - x)(z - x')(z - x'') \ldots (z - x^{(\mu-1)}),$$

où a et b sont des constantes. Soit maintenant y' une autre valeur de y qui répond aux mêmes valeurs de $x, x', x'' \ldots$, on aura, en désignant par p' et q' les valeurs correspondantes des fonctions p et q,

$$p' - q'y' = (a' - b'y')(z - x)(z - x')(z - x'') \ldots (z - x^{(\mu-1)}),$$

donc

$$\frac{p - qy}{p' - q'y'} = \frac{a - by}{a' - b'y'}.$$

En attribuant à z une valeur constante, il est clair que cette équation donnera pour y' une expression de la forme

(145) $$y' = \frac{\alpha + \beta y}{\alpha' + \beta' y},$$

où α, β, α', β' sont des constantes. En désignant maintenant par c'' le module qui répond à y', on aura en même temps

$$\frac{dy'}{\sqrt{(1 - y'^2)(1 - c''^2 y'^2)}} = \varepsilon' \frac{dx}{\Delta x}, \quad \frac{dy}{\Delta' y} = \varepsilon \frac{dx}{\Delta x},$$

donc

(146) $$\frac{dy'}{\sqrt{(1 - y'^2)(1 - c''^2 y'^2)}} = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \cdot \frac{dy}{\sqrt{(1 - y^2)(1 - c'^2 y^2)}}.$$

En substituant l'expression de y' en y, on aura les équations nécessaires pour déterminer y', c'', ε'. Ce problème est précisément le même que celui du paragraphe 2. On voit donc qu'une seule solution de l'équation

$$\frac{dy}{\Delta y} = \varepsilon \frac{dx}{\Delta x}$$

en donnera sur le champ cinq autres, qui seront en général différentes entre elles. La fonction y aura toujours deux valeurs correspondantes au même module c', savoir y et $\frac{1}{c'y}$.

§ 6.

Solution complète du problème dans le cas où $\mu = n$.

Supposons maintenant que l'équation $y = \psi x$ n'ait d'autres racines que celles-ci:

$$x,\ \theta x,\ \theta^2 x,\ \ldots\ \theta^{n-1} x,$$

ce qui arrive toujours lorsque μ est un nombre premier, comme nous le verrons plus bas. On aura alors, si p et q signifient la même chose qu'au paragraphe précédent,

$$(147)\qquad p - qy = (a - by)(z - x)(z - \theta x)(z - \theta^2 x)\ldots(z - \theta^{n-1} x).$$

En attribuant à z une valeur particulière, on aura une expression de y dans laquelle tout est déterminé, excepté trois quantités constantes. Nous allons voir qu'on pourra toujours les déterminer de sorte que l'équation différentielle proposée soit satisfaite. Pour cela considérons deux cas selon que n est un nombre impair ou non.

Cas I. *Si n est un nombre impair.* Faisons dans ce cas $n = 2\mu + 1$. Alors l'équation (147) donne, en attribuant à z la valeur particulière zéro,

$$a' - b'y = -(a - by)\, x . \theta x . \theta^2 x \ldots \theta^{2\mu} x,$$

d'où

$$(148)\qquad y = \frac{a' + a . x . \theta x . \theta^2 x \ldots \theta^{2\mu} x}{b' + b . x . \theta x . \theta^2 x \ldots \theta^{2\mu} x}.$$

En remarquant maintenant qu'en vertu de l'équation (143)

$$\theta^m x . \theta^{2\mu+1-m} x = \frac{x^2 - e_m^2}{1 - c^2 e_m^2 x^2},$$

il est clair que l'expression précédente de y sera une fonction rationnelle de x du degré $2\mu + 1$; donc, puisque cette fonction reste invariable, en mettant pour x les $2\mu + 1$ valeurs

$$x,\ \theta x,\ \theta^2 x\ \ldots\ \theta^{2\mu} x,$$

ce qui est évident à cause de $\theta^{2\mu+1} x = x$, on conclura que l'équation (147) a lieu en mettant pour y cette fonction et pour p et q les valeurs correspondantes en z. Cette équation pourra s'écrire comme il suit:

$$(149)\qquad p - qy = (a - by)(z - x)(z - \theta x)(z - \theta^{2\mu} x)(z - \theta^2 x)(z - \theta^{2\mu-1} x)\ldots$$
$$\ldots(z - \theta^{\mu} x)(z - \theta^{\mu+1} x).$$

Cela posé, faisons

$$x = 1, \ -1, \ \frac{1}{c} \ -\frac{1}{c}.$$

et désignons les valeurs correspondantes de y par

$$\alpha, \ \beta, \ \gamma, \ \delta.$$

Comme on a pour ces valeurs de x, $\Delta x = 0$, il s'ensuit en vertu des deux équations (142) du paragraphe 4, que

$$\theta^m x = \theta^{2\mu+1-m} x = \frac{x \Delta e_m}{1 - c^2 x^2 e_m^2},$$

d'où l'on voit que les facteurs du second membre de l'équation (149) seront égaux deux à deux, en faisant abstraction du premier facteur $z - x$. On a donc

$$(150) \quad \begin{cases} p - q\alpha = (a - b\alpha)(1 - z) \,.\, \varrho^2, \\ p - q\beta = (a - b\beta)(1 + z) \,.\, \varrho'^2, \\ p - q\gamma = (a - b\gamma)(1 - cz) . \varrho''^2, \\ p - q\delta = (a - b\delta)(1 + cz) . \varrho'''^2, \end{cases}$$

où ϱ, ϱ', ϱ'', ϱ''' seront des fonctions entières de z du degré μ. Mais puisqu'on doit avoir

$$(151) \qquad (q^2 - p^2)(q^2 - c'^2 p^2) = r^2 (1 - z^2)(1 - c^2 z^2),$$

les équations précédentes font voir que les quatre constantes α, β, γ, δ doivent être les mêmes que celles-ci:

$$+1, \ -1, \ +\frac{1}{c'}, \ -\frac{1}{c'},$$

et si cette condition a lieu, les quatre équations (150) en donneront évidemment une de la forme (151), et par suite on aura

$$(152) \qquad \frac{dy}{\Delta' y} = \varepsilon \frac{dx}{\Delta x},$$

en vertu de ce qu'on a vu dans le paragraphe 1 de ce chapitre.

Comme il suffit de connaître une seule valeur de y, nous pourrons faire par exemple

$$(153) \qquad \alpha = 1, \ \beta = -1, \ \gamma = \frac{1}{c'}, \ \delta = -\frac{1}{c'}.$$

Cela posé, il nous reste à satisfaire à ces équations. Or si l'on fait pour un moment

(154) $$\varphi x = x.\theta x.\theta^2 x \ldots \theta^{2\mu} x = \frac{x(x^2-e^2)(x^2-e_2^2)\ldots(x^2-e_\mu^2)}{(1-c^2e^2x^2)(1-c^2e_2^2x^2)\ldots(1-c^2e_\mu^2x^2)},$$

l'expression de y deviendra

(155) $$y = \frac{a' + a.\varphi x}{b' + b.\varphi x},$$

d'où l'on déduira, en remarquant que $\varphi(-x) = -\varphi x$, et faisant $x = 1$, -1, $\frac{1}{c}$, $-\frac{1}{c}$,

$$\alpha = \frac{a' + a\varphi(1)}{b' + b\varphi(1)},\quad \beta = \frac{a' - a\varphi(1)}{b' - b\varphi(1)},\quad \gamma = \frac{a' + a\varphi\left(\frac{1}{c}\right)}{b' + b\varphi\left(\frac{1}{c}\right)},\quad \delta = \frac{a' - a\varphi\left(\frac{1}{c}\right)}{b' - b\varphi\left(\frac{1}{c}\right)},$$

donc en vertu des équations (153), on aura

$$a' - b' + (a-b)\varphi(1) = 0,\quad a' + b' - (a+b)\varphi(1) = 0,$$

$$a' - \frac{b'}{c'} + \left(a - \frac{b}{c'}\right)\varphi\left(\frac{1}{c}\right) = 0,\quad a' + \frac{b'}{c'} - \left(a + \frac{b}{c'}\right)\varphi\left(\frac{1}{c}\right) = 0.$$

Il est impossible de satisfaire à ces équations à moins que l'une des quantités a', b' ne soit zéro. Faisons donc $a' = 0$, on aura en même temps $b = 0$. Donc deux des équations précédentes donneront

$$\frac{b'}{a} = \varphi(1) = c'.\varphi\left(\frac{1}{c}\right),$$

d'où l'on tire la valeur de c', savoir

$$c' = \frac{\varphi(1)}{\varphi\left(\frac{1}{c}\right)}.$$

La valeur de y deviendra

$$y = \frac{a}{b'}\varphi x = \frac{\varphi x}{\varphi(1)}.$$

Quant aux valeurs de $\varphi(1)$ et de $\varphi\left(\frac{1}{c}\right)$, on aura en vertu de l'expression de φx,

$$\varphi(1) = \frac{1-e^2}{1-c^2e^2}\,\frac{1-e_2^2}{1-c^2e_2^2}\cdots\frac{1-e_\mu^2}{1-c^2e_\mu^2},$$

$$\varphi\left(\frac{1}{c}\right) = \frac{1}{c^{2\mu+1}}\,\frac{1-c^2e^2}{1-e^2}\,\frac{1-c^2e_2^2}{1-e_2^2}\cdots\frac{1-c^2e_\mu^2}{1-e_\mu^2},$$

donc

$$\varphi\left(\frac{1}{c}\right) = \frac{1}{c^{2\mu+1}\varphi(1)},$$

et

$$c' = c^{2\mu+1}[\varphi(1)]^2,\quad \varphi(1) = \frac{\sqrt{c'}}{c^{\mu+\frac{1}{2}}}.$$

Pour avoir enfin la valeur du coefficient ε, il suffit de faire $x=0$, après avoir différentié l'expression de y. On aura

$$\frac{dy}{dx} = \pm e^2 e_2^2 e_3^2 \dots e_\mu^2 \frac{1}{\varphi(1)},$$

mais comme on a

$$\frac{dy}{dx} = \varepsilon \frac{\Delta' y}{\Delta x},$$

il en résulte, en faisant $x=0$,

$$\frac{dy}{dx} = \pm \varepsilon,$$

donc on pourra faire

$$\varepsilon = e^2 e_2^2 e_3^2 \dots e_\mu^2 \frac{c^{\mu+\frac{1}{2}}}{\sqrt{c'}}.$$

D'après ce qui précède on pourra maintenant énoncer le théorème suivant:

Théorème X. „Soit e une racine quelconque de l'équation $e_{2\mu+1}=0$, mais qui ne puisse être racine d'une autre équation de la même forme $e_{2m+1}=0$, où $2m+1$ est diviseur de $2\mu+1$. Cela posé, si l'on détermine la fonction y, le module c', et le coefficient ε, d'après les formules

(156)
$$\left\{\begin{aligned} y &= \frac{c^{\mu+\frac{1}{2}}}{\sqrt{c'}} \frac{x(e^2-x^2)(e_2^2-x^2)(e_3^2-x^2)\dots(e_\mu^2-x^2)}{(1-c^2e^2x^2)(1-c^2e_2^2x^2)(1-c^2e_3^2x^2)\dots(1-c^2e_\mu^2x^2)}, \\ c' &= c^{2\mu+1}\left(\frac{(1-e^2)(1-e_2^2)(1-e_3^2)\dots(1-e_\mu^2)}{(1-c^2e^2)(1-c^2e_2^2)(1-c^2e_3^2)\dots(1-c^2e_\mu^2)}\right)^2, \\ \varepsilon &= \frac{c^{\mu+\frac{1}{2}}}{\sqrt{c'}} e^2 e_2^2 e_3^2 \dots e_\mu^2, \end{aligned}\right.$$

on aura toujours

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-c'^2y^2)}} = \pm \varepsilon \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}},$$

en déterminant convenablement le signe du second membre.“

Connaissant ainsi un système de valeurs de y, c', ε, on en aura cinq autres, d'après ce qu'on a vu dans le paragraphe précédent, à l'aide des formules du paragraphe 2. A chaque valeur de e répondent donc six systèmes de valeurs de y, c', ε. On aura même douze valeurs de y, car à chaque valeur de c' répondent deux valeurs différentes de cette fonction. Nous reviendrons plus bas à la question du nombre total des solutions qui répondent à la même valeur de μ.

Pour donner un exemple des formules ci-dessus, soit $\mu=1$. Puisque

dans ce cas $2\mu+1=3$ est un nombre premier, on pourra, en vertu de ce qu'on a vu plus haut, prendre pour e une racine quelconque de l'équation $e_3=0$, excepté la racine zéro. Cette équation est, en vertu de la formule (53), qui donne l'expression de x_3, du huitième degré, savoir:

$$0=3-4(1+c^2)e^2+6c^2e^4-c^4e^8.$$

La quantité e étant une racine quelconque de cette équation, on aura

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-c'^2y^2)}}=\pm\varepsilon\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}},$$

$$c'=c^3\left(\frac{1-e^2}{1-c^2e^2}\right)^2,\quad \varepsilon=c\sqrt{\frac{c}{c'}}\,e^2,\quad y=\frac{c\sqrt{c}}{\sqrt{c'}}\,\frac{x(e^2-x^2)}{1-c^2e^2x^2}.$$

Puisque e^2 est déterminé en c par une équation du quatrième degré, le module c' pourra l'être également. Cette équation est

$$(c'-c)^2=4\sqrt{cc'}\,(1-\sqrt{cc'}\,)^2.$$

L'expression générale de y, donnée plus haut (156), est sous forme de produit. Rien n'est plus facile que de décomposer cette fraction en fractions partielles. En effet, puisque les racines de l'équation

$$0=\frac{c^{\mu+\frac{1}{2}}}{\sqrt{c'}}z(z^2-e^2)(z^2-e_2^2)\ldots(z^2-e_\mu^2)+y(1-c^2e^2z^2)\ldots(1-c^2e_\mu^2z^2)$$

sont les $2\mu+1$ quantités suivantes

$$x,\ \theta x,\ \theta^2x\ \ldots\ \theta^{2\mu}x,$$

la somme de ces quantités sera égale au coefficient de $z^{2\mu}$, divisé par celui de $z^{2\mu+1}$ et pris avec le signe $-$, donc

$$x+\theta x+\theta^2x+\cdots+\theta^{2\mu}x=\frac{(-1)^{\mu+1}c^{2\mu}e^2e_2^2\ldots e_\mu^2}{c^{\mu+\frac{1}{2}}\cdot c'^{-\frac{1}{2}}}\,y;$$

donc, en vertu de l'équation

$$\theta^mx+\theta^{2\mu+1-m}x=\frac{2\Delta e_m\cdot x}{1-c^2e_m^2x^2},$$

on aura l'expression suivante de y:

$$(157)\quad y=\left(x+\frac{2\Delta e\cdot x}{1-c^2e^2x^2}+\frac{2\Delta e_2\cdot x}{1-c^2e_2^2x^2}+\cdots+\frac{2\Delta e_\mu\cdot x}{1-c^2e_\mu^2x^2}\right)\frac{\sqrt{c}}{c^\mu\sqrt{c'}}\,\frac{(-1)^{\mu+1}}{e^2e_2^2\ldots e_\mu^2}.$$

Cas II. *Si n est un nombre pair.* Faisons $n=2\mu$. Puisqu'on a

$$\theta^mx=\frac{x\Delta e_m+e_m\Delta x}{1-c^2e_m^2x^2},\quad \theta^{2\mu-m}x=\frac{x\Delta e_m-e_m\Delta x}{1-c^2e_m^2x^2},$$

on aura, en faisant $m = \mu$,

$$\theta^\mu x = \frac{x \Delta e_\mu + e_\mu \Delta x}{1 - c^2 e_\mu^2 x^2} = \frac{x \Delta e_\mu - e_\mu \Delta x}{1 - c^2 e_\mu^2 x^2}.$$

Cette égalité ne peut subsister, à moins que e_μ n'ait une des deux valeurs zéro où l'infini. Cela donne lieu à considérer séparément ces deux cas:

A. Si $e_\mu = \frac{1}{0}$, on aura

$$\theta^\mu x = \pm \frac{1}{cx}.$$

En substituant $\theta^m x$ au lieu de x, on aura

$$\theta^{\mu+m} x = \pm \frac{1}{c\theta^m x}.$$

Les racines de l'équation $y = \psi x$ deviendront donc

$$x, \; \pm \frac{1}{cx}, \; \theta x, \; \theta^2 x, \ldots \theta^{\mu-1} x, \; \theta^{\mu+1} x, \; \theta^{\mu+2} x, \ldots \theta^{2\mu-1} x,$$

par conséquent on aura

(158) $$p - qy = (a - by)(z - x)\left(z \mp \frac{1}{cx}\right)(z - \theta x)(z - \theta^{2\mu-1} x) \ldots$$
$$\ldots (z - \theta^{\mu-1} x)(z - \theta^{\mu+1} x).$$

En désignant par a' et b' les coefficiens de $z^{2\mu-1}$ dans les deux fonctions entières p et q, on aura

$$a' - b'y = -(a - by)\left(x \pm \frac{1}{cx} + \theta x + \theta^{2\mu-1} x + \cdots + \theta^{\mu-1} x + \theta^{\mu+1} x\right)$$
$$= (by - a)\left(x \pm \frac{1}{cx} + \frac{2\Delta e \,.\, x}{1 - c^2 e^2 x^2} + \frac{2\Delta e_2 . x}{1 - c^2 e_2^2 x^2} + \cdots + \frac{2\Delta e_{\mu-1} x}{1 - c^2 e_{\mu-1}^2 x^2}\right).$$

L'expression qu'on en tire pour y sera évidemment une fonction rationnelle de x du degré 2μ, et puisqu'elle reste invariable en mettant pour x les 2μ quantités*)

$$x, \; \theta x, \; \theta^2 x, \ldots \theta^{2\mu-1} x,$$

l'équation (158) aura lieu en mettant pour y cette valeur et pour p et q les valeurs correspondantes en z.

Nous allons voir qu'on aura une valeur convenable de y en faisant

$$a = b' = 0.$$

*) On a

$$y = \frac{a' + a(x + \theta x + \theta^2 x + \cdots + \theta^{2\mu-1} x)}{b' + b(x + \theta x + \theta^2 x + \cdots + \theta^{2\mu-1} x)} \quad \text{et} \quad \theta^{2\mu} x = x.$$

Cela donne

$$y = \frac{a'}{b}\,\frac{1}{x \pm \frac{1}{cx} + \frac{2\varDelta e\,.\,x}{1 - c^2 e^2 x^2} + \cdots + \frac{2\varDelta e_{\mu-1} x}{1 - c^2 e_{\mu-1}^2 x^2}},$$

expression qui est évidemment de la forme

(159) $$y = A\,\frac{x(1 - c^2 e^2 x^2)(1 - c^2 e_2^2 x^2) \ldots (1 - c^2 e_{\mu-1}^2 x^2)}{1 + a_1 x^2 + a_2 x^4 + \cdots + a_\mu x^{2\mu}} = A\,.\,\varphi x.$$

Pour déterminer la valeur de A, remarquons que si l'on fait $x = 1$, y doit avoir une des valeurs: ± 1, $\pm \frac{1}{c'}$. Soit par exemple $y = 1$, pour $x = 1$, on aura

(160) $$A = \frac{1}{\varphi(1)}.$$

Cela posé, faisons dans l'équation (158) $x = 1$. En remarquant que $a = 0$, on aura

$$q - p = (1 - z)(1 \mp cz)\varrho^2,$$

ϱ étant une fonction entière de z, car pour $x = 1$ on aura

$$\theta^m x = \theta^{2\mu - m} x = \frac{\varDelta e_m}{1 - c^2 e_m^2}.$$

En changeant le signe de z dans l'équation précédente, on aura, en remarquant que q est une fonction paire et p une fonction impaire,

$$q + p = (1 + z)(1 \pm cz)\varrho'^2.$$

Cela donne

$$q^2 - p^2 = (1 - z^2)(1 - c^2 z^2)(\varrho\varrho')^2.$$

Maintenant, puisqu'on doit avoir

(161) $$(q^2 - p^2)(q^2 - c'^2 p^2) = (1 - z^2)(1 - c^2 z^2) r^2,$$

cela fait voir que la fonction $q^2 - c'^2 p^2$ doit être un carré parfait. Or on pourra toujours déterminer c' de manière que cette condition soit remplie. Faisons dans l'équation (158)

$$x = \frac{1}{\sqrt{\pm c}},$$

on aura

$$\theta^{\mu+m} x = \theta^m(\theta^\mu x) = \theta^m\left(\pm \frac{1}{cx}\right) = \theta^m\left(\frac{1}{\sqrt{\pm c}}\right),$$

donc

$$\theta^{\mu+m} x = \theta^m x.$$

Si donc on désigne par α la valeur de y qui répond à $x=\frac{1}{\sqrt{\pm c}}$, les racines de l'équation $\alpha=\psi x$, c'est-à-dire de

$$p-\alpha q=0,$$

seront égales entre elles deux à deux; donc $p-\alpha q$ sera un carré parfait. En changeant le signe de z, on aura $p+\alpha q$, qui par conséquent sera également un carré; donc en multipliant, on aura

$$p^2-\alpha^2 q^2=t^2,$$

où t est une fonction entière de z. En faisant donc

$$c'=\frac{1}{\alpha},$$

l'équation (161) aura lieu, et par suite on aura

$$\frac{dv}{\Delta' v}=\varepsilon\frac{dz}{\Delta z}, \text{ où } \frac{p}{q}=v,$$

c'est-à-dire, en changeant z en x

$$\frac{dy}{\Delta' y}=\varepsilon\frac{dx}{\Delta x}.$$

Pour déterminer le coefficient ε on aura d'abord, en vertu de la dernière équation,

$$\varepsilon=\frac{dy}{dx}, \text{ pour } x=0.$$

Mais l'expression de y donnera

$$\frac{dy}{dx}=A=\frac{1}{\varphi(1)},$$

donc

$$\varepsilon=\frac{1}{\varphi(1)}.$$

Le numérateur de la fraction qui exprime la valeur de y est décomposé en facteurs; savoir si l'on fait $y=\frac{p'}{q'}$, on a

$$p'=\frac{1}{\varphi(1)}x(1-c^2e^2x^2)(1-c^2e_2^2x^2)\dots(1-c^2e_{\mu-1}^2x^2).$$

On pourra facilement décomposer de la même manière le dénominateur q', comme on va le voir.

En divisant les membres de la formule (147) par y, il viendra à cause de $a=0$:

$$\frac{p}{y} - q = -b(z-x)(z-\theta x)(z-\theta^2 x)\ldots(z-\theta^{2\mu-1}x).$$

Cela posé, soit δ une valeur de x, qui rende y infini, c'est-à-dire une des racines de l'équation $q'=0$. On aura

$$q = b(z-\delta)(z-\theta\delta)(z-\theta^2\delta)\ldots(z-\theta^{2\mu-1}\delta).$$

Il suffit donc de connaître une valeur de δ. Or une telle valeur est $\frac{1}{\sqrt{\mp c}}$. En effet, puisqu'on doit avoir $y=\frac{1}{0}$, et remarquant que

$$y = \frac{a'}{b}\,\frac{1}{x+\theta x+\theta^2 x+\cdots+\theta^{2\mu-1}x},$$

on aura

$$r = x+\theta x+\theta^2 x+\cdots+\theta^{2\mu-1}x = 0.$$

Soit pour une valeur quelconque de x

$$p_m = \theta^m x+\theta^{2\mu-m}x+\theta^{\mu+m}x+\theta^{3\mu-m}x,$$

on aura évidemment, en remarquant que $\theta^{2\mu}x = x$,

$$p_0+p_1+p_2+\cdots+p_{2\mu-1} = 4r.$$

Or je dis que si l'on fait

$$x = \frac{1}{\sqrt{\mp c}},$$

on aura

$$p_m = 0,$$

pour une valeur quelconque de m. En effet on a d'abord

$$\theta^m x+\theta^{2\mu-m}x = \frac{2x\,.\,\Delta e_m}{1-c^2e_m^2x^2},$$

donc en mettant $\theta^\mu x$ au lieu de x, et remarquant que $\theta^\mu x = \pm\frac{1}{cx}$,

$$\theta^{m+\mu}x+\theta^{3\mu-m}x = \frac{\pm 2\,\Delta e_m}{cx(1-e_m^2x^{-2})}.$$

En faisant maintenant

$$x = \frac{1}{\sqrt{\pm c}},$$

on aura

$$\theta^m x+\theta^{2\mu-m}x = \frac{2\,\Delta e_m}{\sqrt{(\mp c)}\,(1\pm ce_m^2)} = -(\theta^{m+\mu}x+\theta^{3\mu-m}x),$$

et par suite

$$p_m = 0.$$

On pourra donc faire

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\mp c}}.$$

En remarquant que $q' = 1$ pour $x = 0$, on aura, en mettant dans l'expression de q, x au lieu de z,

$$q' = \left(1 - \frac{x}{\delta}\right)\left(1 - \frac{x}{\theta\delta}\right)\left(1 - \frac{x}{\theta^2\delta}\right) \cdots \left(1 - \frac{x}{\theta^{2\mu-1}\delta}\right).$$

D'après ce qui précède on pourra énoncer ce théorème:

Théorème XI. „Soit e une racine quelconque de l'équation $e_\mu = \frac{1}{0}$, mais qui ne satisfait pas en même temps à deux équations de la forme $e_m = 0$, $\Delta e_m = 1$, où m est facteur de 2μ. Cela posé, si l'on détermine les trois quantités y, c', ε par les formules

$$(162)\quad \begin{cases} \pm \dfrac{\varepsilon}{c} \cdot \dfrac{1}{y} = x \pm \dfrac{1}{cx} + \dfrac{2\Delta e \cdot x}{1 - c^2 e^2 x^2} + \dfrac{2\Delta e_2 \cdot x}{1 - c^2 e_2^2 x^2} + \cdots + \dfrac{2\Delta e_{\mu-1} \cdot x}{1 - c^2 e_{\mu-1}^2 x^2}, \\ \pm \varepsilon = c\left(1 \pm \dfrac{1}{c} + \dfrac{2\Delta e}{1 - c^2 e^2} + \dfrac{2\Delta e_2}{1 - c^2 e_2^2} + \cdots + \dfrac{2\Delta e_{\mu-1}}{1 - c^2 e_{\mu-1}^2}\right), \\ \text{on aura toujours} \\ \dfrac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-c'^2y^2)}} = \dfrac{\varepsilon \cdot dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}}.\text{“} \end{cases}$$

Le cas le plus simple de cette formule est celui où $\mu = 1$. On aura alors

$$(163)\quad \begin{cases} \varepsilon = \pm c\left(1 \pm \dfrac{1}{c}\right) = 1 \pm c. \\ y = (1 \pm c)\dfrac{x}{1 \pm cx^2}, \quad c' = \dfrac{2\sqrt{\pm c}}{1 \pm c}, \\ \dfrac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-c'^2y^2)}} = (1 \pm c)\dfrac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}}. \end{cases}$$

Après avoir déterminé par le théorème précédent un système de valeurs pour y, c', ε, on aura cinq autres solutions à l'aide des formules du deuxième paragraphe de ce chapitre.

B. Si $e_\mu = 0$, le radical Δe_μ ne pourra avoir que l'une des deux valeurs $+1$ ou -1; mais il faut ici prendre $\Delta e_\mu = -1$, car si l'on avait en même temps $e_\mu = 0$, $\Delta e_\mu = 1$, il en résulterait $\theta^\mu x = x$, ce qui n'est pas. Mais comme on a



$$\theta^{\mu} x = \frac{x \Delta e_{\mu} + e_{\mu} \Delta x}{1 - c^2 e_{\mu}^2 x^2},$$

cela donne

$$\theta^{\mu} x = -x,$$

et en mettant $\theta^m x$ au lieu de x,

$$\theta^{\mu+m} x = -\theta^m x.$$

Les racines de l'équation $y = \psi x$ seront dans ce cas égales deux à deux, mais de signe contraire, et par conséquent ψx sera une fonction paire de x. En faisant

$$\psi z = \frac{p}{q},$$

on aura

(164) $p - qy = (a - by)(z^2 - x^2)[z^2 - (\theta x)^2][z^2 - (\theta^2 x)^2] \ldots [z^2 - (\theta^{\mu-1} x)^2].$

Si l'on fait $z = 0$, et qu'on désigne les valeurs correspondantes de p et q par a' et b', on aura

$$a' - b'y = \pm (a - by)(x . \theta x . \theta^2 x \ldots \theta^{\mu-1} x)^2,$$

ce qui donne pour y une expression rationnelle du degré 2μ. Comme dans les deux premiers cas, on démontrera aisément qu'il sera toujours possible de déterminer les constantes a, b, a', b' de telle sorte que l'équation

$$\frac{dy}{\Delta' y} = \varepsilon \frac{dx}{\Delta x}$$

soit satisfaite, en attribuant au module c' et au coefficient ε des valeurs convenables. Je vais considérer seulement le cas le plus simple, où $\mu = 1$. On aura alors

$$a' - b'y = (-a + by) x^2,$$

et par suite

$$y = \frac{a' + a x^2}{b' + b x^2}.$$

En mettant cette valeur dans l'équation

$$\frac{dy}{\Delta' y} = \varepsilon \frac{dx}{\Delta x},$$

on trouvera facilement une solution, savoir

(165) $$y = \frac{1 + cx^2}{1 - cx^2}, \quad c' = \frac{1 - c}{1 + c}, \quad \varepsilon = (1 + c)\sqrt{-1}.$$

Connaissant ainsi une solution, on en déduira les cinq autres par les formules du deuxième paragraphe, de sorte que l'équation

$$\frac{dy}{\Delta' y} = \varepsilon \frac{dx}{\Delta x}$$

pourra être satisfaite des six manières suivantes:

(166) $$c' = \frac{1 \pm c}{1 \mp c}, \quad \frac{1 \pm \sqrt{1-c^2}}{1 \mp \sqrt{1-c^2}}, \quad \frac{c \pm \sqrt{c^2-1}}{c \mp \sqrt{c^2-1}}.$$

§ 7.

Réduction du problème général au cas où le degré de la fonction rationnelle y est un nombre premier.

Soit maintenant $y = \psi x$ une fonction rationnelle quelconque qui satisfait à l'équation différentielle

$$\frac{dy}{\Delta' y} = \varepsilon \frac{dx}{\Delta x}.$$

Comme on l'a vu dans le paragraphe 3, l'équation

$$y = \psi x$$

aura toujours n racines de la forme

(167) $$x, \ \theta x, \ \theta^2 x, \ \ldots \ \theta^{n-1} x, \quad \text{où} \quad \theta^n x = x.$$

Cela posé, désignons par x' une nouvelle racine, différente de celles-ci, de sorte que

$$\psi x' = \psi x = y.$$

On a

$$\psi(\theta^m x) = \psi x,$$

donc aussi

$$\psi(\theta^m x') = \psi x' = y.$$

Il suit de là que les n quantités

(168) $$x', \ \theta x', \ \theta^2 x', \ \ldots \ \theta^{n-1} x',$$

qui sont différentes entre elles, seront racines de l'équation dont il s'agit. Or toutes ces n racines sont différentes des racines (167). En effet, si l'on avait $\theta^m x' = \theta^\mu x$, il en résulterait

$$\theta^{n-m} \theta^m x' = \theta^{n-m+\mu} x,$$

c'est-à-dire

$$x' = \theta^{n-m+\mu} x,$$

ce qui est contre l'hypothèse. Le degré μ de l'équation $y = \psi x$ est donc

égal à $2n$, ou plus grand que ce nombre. Dans le dernier cas, si l'on désigne par x'' une racine différente des $2n$ racines précédentes, on aura en même temps celles-ci:

$$x'',\ \theta x'',\ \theta^2 x'' \ldots \theta^{n-1} x'',$$

qui seront différentes entre elles et des racines (167, 168). Donc μ sera égal à $3n$ ou plus grand que ce nombre. En continuant jusqu'à ce qu'on ait épuisé toutes les racines, on voit que μ doit être un multiple de n, et si l'on fait en conséquence

$$\mu = m.n,$$

les μ racines se distribueront en m groupes de n termes chacun, savoir

$$(169)\quad \left\{\begin{array}{l} x,\ \theta x,\ \theta^2 x \ldots \theta^{n-1} x, \\ x',\ \theta x',\ \theta^2 x' \ldots \theta^{n-1} x', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x^{(m-1)},\ \theta x^{(m-1)},\ \theta^2 x^{(m-1)} \ldots \theta^{n-1} x^{(m-1)}. \end{array}\right.$$

Cela posé, soit

$$\psi z = \frac{p}{q},$$

p et q étant des fonctions entières de z, sans diviseur commun. On aura

$$(170)\quad \begin{aligned} p - qy = (a - by)(z - x)(z - \theta x)(z - \theta^2 x) \ldots (z - \theta^{n-1} x) \\ \times (z - x')(z - \theta x')(z - \theta^2 x') \ldots (z - \theta^{n-1} x') \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \times (z - x^{(m-1)})(z - \theta x^{(m-1)})(z - \theta^2 x^{(m-1)}) \cdots (z - \theta^{n-1} x^{(m-1)}), \end{aligned}$$

et d'après ce qui a été exposé dans le paragraphe précédent, on pourra trouver une fonction rationnelle, $y_1 = \psi_1 x$, telle que les racines de l'équation

$$y_1 = \psi_1 x$$

soient les n quantités

$$x,\ \theta x,\ \theta^2 x,\ \ldots \theta^{n-1} x,$$

et que y_1 satisfasse à une équation différentielle de la forme

$$(171)\quad \frac{dy_1}{\sqrt{(1 - y_1^2)(1 - c_1^2 y_1^2)}} = \varepsilon_1 \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - c^2 x^2)}}.$$

Faisons

$$\psi_1 z = \frac{p'}{q'},$$

p' et q' étant des fonctions entières du degré n; on aura

(172) $$p' - q'y_1 = (a' - b'y_1)(z - x)(z - \theta x) \ldots (z - \theta^{n-1}x),$$

a' et b' étant des constantes.

En mettant au lieu de x successivement les m valeurs

$$x, x', x'', \ldots x^{(m-1)}$$

et puis multipliant entre elles les équations qui en résultent, on obtiendra, en ayant égard à l'équation (170),

(173) $$\frac{p - qy}{a - by} = \frac{p' - q'y_1}{a' - b'y_1} \cdot \frac{p' - q'y_2}{a' - b'y_2} \ldots \frac{p' - q'y_m}{a' - b'y_m},$$

où

$$y_2, y_3, \ldots y_m$$

sont les valeurs de la fonction y_1, qui répondent aux valeurs

$$x', x'', \ldots x^{(m-1)}$$

de x.

Cela posé, attribuons à x deux valeurs particulières α, β, telles que

$$\psi\alpha = 0, \quad \psi\beta = \tfrac{1}{0};$$

en désignant par

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_m$$

les valeurs de $y_1, y_2, \ldots y_m$, respectivement correspondantes aux valeurs α et β de x, l'équation (173) donnera

(174) $$\begin{cases} p = A'(p' - \alpha_1 q')(p' - \alpha_2 q') \ldots (p' - \alpha_m q'), \\ q = A''(p' - \beta_1 q')(p' - \beta_2 q') \ldots (p' - \beta_m q'), \end{cases}$$

où A' et A'' sont deux constantes. En divisant p par q, on voit que $\frac{p}{q} = \psi z$ sera fonction rationnelle de $\frac{p'}{q'} = \psi_1 z$. En mettant x au lieu de z, on aura

$$\frac{p}{q} = y, \quad \frac{p'}{q'} = y_1,$$

donc

(175) $$y = A \frac{(y_1 - \alpha_1)(y_1 - \alpha_2)(y_1 - \alpha_3) \ldots (y_1 - \alpha_m)}{(y_1 - \beta_1)(y_1 - \beta_2)(y_1 - \beta_3) \ldots (y_1 - \beta_m)},$$

$A = \frac{A'}{A''}$ étant constant.

On voit donc que y pourra être exprimé par une fonction rationnelle de y_1 du degré m.

En combinant maintenant l'équation (171) avec celle-ci:

$$\frac{dy}{\Delta' y} = \varepsilon \frac{dx}{\Delta x},$$

qui doit avoir lieu, on aura

$$(176) \qquad \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-c'^2y^2)}} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} \frac{dy_1}{\sqrt{(1-y_1^2)(1-c_1^2y_1^2)}};$$

donc la fonction y, rationnelle en y_1 et du degré m, doit satisfaire à cette équation. Réciproquement, si cette équation a lieu, l'équation

$$\frac{dy}{\Delta' y} = \varepsilon \frac{dx}{\Delta x}$$

subsistera également, car la fonction y_1 est déterminée en x de manière à satisfaire à la formule (171). Ainsi le problème général est réduit à satisfaire de la manière la plus générale à l'équation (176). Or ce problème est précisément le même que celui que nous traitons; seulement le degré de la fonction y en y_1 sera m, tandis que y, comme fonction de x, est du degré $m.n$, qui est plus grand que m. On pourra donc appliquer à l'équation (176) le même procédé qu'à l'équation $\frac{dy}{\Delta' y} = \varepsilon \frac{dx}{\Delta x}$, et il est évident qu'on parviendra ainsi à l'expression générale de y, car les degrés des fonctions successives vont toujours en décroissant.

Supposons maintenant que le degré μ de la fonction y en x soit un nombre premier. Puisque $\mu = m.n$, on a nécessairement $m = 1$, $\mu = n$. Par suite

$$y = A \frac{y_1 - \alpha_1}{y_1 - \beta_1}.$$

On connaît l'expression de y_1 en x par les formules du paragraphe précédent. En substituant l'expression de y en y_1 dans l'équation (176), on déterminera à l'aide des formules du paragraphe 2 toutes les solutions possibles.

En vertu de ce qui précède on pourra donc énoncer le théorème suivant:

Théorème XII. Soit y une fonction rationnelle de x d'un degré quelconque μ, qui satisfait à l'équation différentielle

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-c'^2y^2)}} = \varepsilon \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}},$$

on pourra toujours décomposer μ en deux facteurs n et m, dont l'un n est un nombre premier, tels qu'on ait

$$\frac{dy_1}{\sqrt{(1-y_1^2)(1-c_1^2y_1^2)}}=\varepsilon_1\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}}$$

et

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-c'^2y^2)}}=\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}\frac{dy_1}{\sqrt{(1-y_1^2)(1-c_1^2y_1^2)}},$$

y étant une fonction rationnelle de y_1 du degré m, et y_1 une fonction rationnelle de x du degré n.

Si donc on désigne par $n, n_1, n_2, \ldots n_\nu$ des nombres premiers dont le produit est μ, et qu'on fasse pour abréger

$$\Delta(x,c)=\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)},$$

on pourra faire

$$\frac{dy}{\Delta(y,c')}=\varepsilon_\nu\frac{dy_\nu}{\Delta(y_\nu,c_\nu)}=\varepsilon_{\nu-1}\frac{dy_{\nu-1}}{\Delta(y_{\nu-1},c_{\nu-1})}=\cdots=\varepsilon_1\frac{dy_1}{\Delta(y_1,c_1)}=\varepsilon\frac{dx}{\Delta x},$$

y_1 étant une fonction rationnelle de x du degré n,
y_2 - - - - - - - y_1 - - n_1,
y_3 - - - - - - - y_2 - - n_2.
. . . .
y_ν - - - - - - - $y_{\nu-1}$ - - $n_{\nu-1}$,
y - - - - - - - y_ν - - n_ν.

En vertu de ce théorème la solution du problème général est ramenée au cas où le degré de la fonction y est un nombre premier. On aura toutes les solutions qui répondent à ce cas par les formules du paragraphe précédent, et ainsi le problème que nous nous sommes proposé au commencement de ce chapitre pourra être regardé comme résolu.

§ 8.

Sur la forme de la fonction y.

Désignons par $x, x'\ x'' \ldots x^{(\mu-1)}$ les racines de l'équation

$$y=\psi x.$$

Si l'on fait $\psi z=\frac{p}{q}$, p et q étant des fonctions entières de z, on aura

(177) $$p-qy=(a-by)(z-x)(z-x')(z-x'')\ldots(z-x^{(\mu-1)}),$$

a et b étant des constantes. Cela posé, soit α une racine de l'équation $y=0$, on aura en faisant $x=\alpha$,

(178) $$p=a(z-\alpha)(z-\alpha')(z-\alpha'')\ldots(z-\alpha^{(\mu-1)}).$$

Soit de même β une racine de l'équation $y=\frac{1}{0}$. Cela donnera, en faisant $x=\beta$ après avoir divisé les deux membres de l'équation (177) par y,

(179) $$q=b(z-\beta)(z-\beta')(z-\beta'')\ldots(z-\beta^{(\mu-1)}).$$

Ces valeurs de p et q donneront, en mettant x au lieu de z,

(180) $$y=A\frac{(x-\alpha)(x-\alpha')\ldots(x-\alpha^{(\mu-1)})}{(x-\beta)(x-\beta')\ldots(x-\beta^{(\mu-1)})},$$

où A est un coefficient constant, qu'on détermine en remarquant que si l'on fait $x=1$, y doit avoir une des valeurs ± 1, $\pm\frac{1}{c'}$.

Mais il y a deux cas à considérer séparément: savoir, il pourra arriver que l'une des deux quantités a et b soit égale à zéro, et dans ce cas l'une des racines des équations $y=0$, $y=\frac{1}{0}$ sera nulle ou infinie.

Cas premier, si $b=0$. On aura

(181) $$p-qy=a(z-x)(z-x')\ldots(z-x^{(\mu-1)}),$$

et p sera du degré μ, et q seulement du degré $\mu-1$. En égalant le coefficient de $z^{\mu-1}$ dans les deux membres, on aura

(182) $$a'-b'y=-a(x+x'+x''+\cdots+x^{(\mu-1)}),$$

a' et b' étant des constantes. Maintenant si

$$x'=\frac{x\Delta e+e\Delta x}{1-c^2e^2x^2}$$

est une racine de $y=\psi x$, la quantité

$$\frac{x\Delta e-e\Delta x}{1-c^2e^2x^2}$$

le sera également; donc si ces deux quantités sont différentes entre elles pour toutes les valeurs de e, μ sera un nombre impair, et en faisant $\mu=2n+1$, on aura

(183) $$a'-b'y=-a\left(x+\frac{2x\Delta e_1}{1-c^2e_1^2x^2}+\frac{2x\Delta e_2}{1-c^2e_2^2x^2}+\cdots+\frac{2x\Delta e_n}{1-c^2e_n^2x^2}\right).$$

Maintenant si l'on fait $x=\pm 1$, $\pm\frac{1}{c}$, on doit avoir $y=\pm 1$, $y=\pm\frac{1}{c'}$,

d'où il est facile de conclure que a' sera égal à zéro. Donc y sera une fonction impaire de x, et de la forme

$$(184)\qquad y = Ax\left(1 + \frac{2\Delta e_1}{1-c^2e_1^2x^2} + \cdots + \frac{2\Delta e_n}{1-c^2e_n^2x^2}\right).$$

Cela fait voir que

$$q = (1-c^2e_1^2z^2)\ldots(1-c^2e_n^2z^2).$$

Pour avoir p, il suffit de faire dans l'équation (181) $x=0$, ce qui donne

$$p = az(z^2-e_1^2)\ldots(z^2-e_n^2),$$

donc on aura

$$(185)\qquad y = a\frac{x(e_1^2-x^2)(e_2^2-x^2)\ldots(e_n^2-x^2)}{(1-c^2e_1^2x^2)(1-c^2e_2^2x^2)\ldots(1-c^2e_n^2x^2)}.$$

Telle est donc la forme de la fonction y dans le cas où le degré de son numérateur est impair et plus grand que celui du dénominateur.

Si pour quelque valeur de e les deux quantités

$$\frac{x\Delta e + e\Delta x}{1-c^2e^2x^2},\quad \frac{x\Delta e - e\Delta x}{1-c^2e^2x^2}$$

étaient égales, on aurait

$$e=0,\quad \text{ou}\quad e=\tfrac{1}{0}.$$

Soit d'abord $e=\frac{1}{0}$, on aura $x' = \pm\frac{1}{cx}$, et par suite le second membre de l'équation (182) serait une fonction impaire de x, dont le degré serait un nombre pair. On trouve que cela donne $a'=0$; donc en faisant $\mu=2n$,

$$(186)\qquad y = A\left(x \pm \frac{1}{cx} + \frac{2x\Delta e_1}{1-c^2e_1^2x^2} + \cdots + \frac{2x\Delta e_{n-1}}{1-c^2e_{n-1}^2x^2}\right),$$

et par suite y sera exprimé en produit de facteurs comme il suit:

$$(187)\qquad y = \frac{a(1-\delta_1^2x^2)(1-\delta_2^2x^2)\ldots(1-\delta_n^2x^2)}{x(1-c^2e_1^2x^2)(1-c^2e_2^2x^2)\ldots(1-c^2e_{n-1}^2x^2)},$$

Si au contraire $e=0$, on aura en même temps

$$x' = -x.$$

Donc dans ce cas y sera une fonction paire de x. Mais alors le degré du numérateur doit être le même que celui du dénominateur, comme il est facile de s'en convaincre; par conséquent l'expression (187) appartient à y toutes les fois que le degré du numérateur est un nombre pair et en même temps plus grand que celui du dénominateur.

Cas second, si $a=0$. On aura alors

$$p-qy=by(z-x)(z-x')\dots(z-x^{(\mu-1)}).$$

En raisonnant comme ci-dessus on trouvera aisément que dans le cas où μ est un nombre impair, y sera une fonction impaire de x de la forme

$$(188)\qquad y=a\frac{(1-c^2e_1^2x^2)(1-c^2e_2^2x^2)\dots(1-c^2e_n^2x^2)}{x(e_1^2-x^2)(e_2^2-x^2)\dots(e_n^2-x^2)}.$$

Si μ est pair, y sera une fonction impaire de x de la forme

$$(189)\qquad y=a\frac{x(1-c^2e_1^2x^2)\dots(1-c^2e_{n-1}^2x^2)}{(1-\delta_1^2x^2)\dots(1-\delta_n^2x^2)}.$$

§ 9.

De la fonction $x_{2\mu+1}$.

Nous avons vu (chapitre I paragraphe 4) que l'équation différentielle

$$\frac{dy}{\Delta y}=(2\mu+1)\frac{dx}{\Delta x}$$

peut être satisfaite, en mettant pour y une fonction impaire de x du degré $(2\mu+1)^2$ qui s'évanouit avec x. En la désignant comme nous l'avons fait à l'endroit cité par $x_{2\mu+1}$, et faisant pour abréger $(2\mu+1)^2-1=2n$, cette fonction, en vertu de ce que nous venons de voir dans le paragraphe précédent, doit avoir la forme suivante:

$$(190)\qquad x_{2\mu+1}=a\frac{x(e_1^2-x^2)(e_2^2-x^2)\dots(e_n^2-x^2)}{(1-c^2e_1^2x^2)(1-c^2e_2^2x^2)\dots(1-c^2e_n^2x^2)},$$

et on aura en même temps

$$(191)\qquad x_{2\mu+1}=A\left(x+\frac{2\Delta e_1\,.\,x}{1-c^2e_1^2x^2}+\frac{2\Delta e_2\,.\,x}{1-c^2e_2^2x^2}+\dots+\frac{2\Delta e_n\,.\,x}{1-c^2e_n^2x^2}\right).$$

Pour déterminer les coefficiens a et A, faisons $x=\frac{1}{0}$. On trouvera alors

$$Ac^{2n}e_1^2e_2^2\dots e_n^2=a.$$

Si l'on fait x infiniment petit, la première formule donne

$$x_{2\mu+1}=ae_1^2e_2^2\dots e_n^2x,$$

mais l'équation différentielle donne dans ce cas

$$x_{2\mu+1}=(2\mu+1)x,$$

par suite

$$ae_1^2 e_2^2 \dots e_n^2 = 2\mu + 1.$$

De même si l'on fait x infiniment grand, la seconde expression de $x_{2\mu+1}$ donne $x_{2\mu+1} = Ax$, mais dans le même cas l'équation différentielle donne

$$\frac{dx_{2\mu+1}}{cx_{2\mu+1}^2} = \frac{dx}{cAx^2} = (2\mu+1)\frac{dx}{cx^2},$$

donc

(192) $$A = \frac{1}{2\mu+1}.$$

Connaissant A, on aura ensuite

(193) $$e_1^2 e_2^2 \dots e_n^2 = \frac{2\mu+1}{c^n}, \quad a = c^n = c^{2\mu^2+2\mu}.$$

Les quantités $e_1, e_2, \dots e_n$ ont entre elles des relations remarquables que nous allons développer. Considérons l'équation

$$x_{2\mu+1} = y.$$

Les racines de cette équation sont les $(2\mu+1)^2$ quantités

$$x, \frac{x\Delta e_1 \pm e_1 \Delta x}{1 - c^2 e_1^2 x^2}, \frac{x\Delta e_2 \pm e_2 \Delta x}{1 - c^2 e_2^2 x^2}, \dots \frac{x\Delta e_n \pm e_n \Delta x}{1 - c^2 e_n^2 x^2}.$$

Soit $\theta x = \frac{x\Delta e + e\Delta x}{1 - c^2 e^2 x^2}$ l'une quelconque de ces racines, les $2\mu+1$ quantités

$$x, \theta x, \theta^2 x \dots \theta^{2\mu} x$$

seront encore des racines et différentes entre elles, si l'on prend pour e une quantité qui n'est pas racine d'une équation

$$x_{2m+1} = 0,$$

où $2m+1$ est facteur de $2\mu+1$. Soit de même

$$\theta_1 x = \frac{x\Delta e' + e'\Delta x}{1 - c^2 e'^2 x^2}$$

une autre racine, on aura encore les racines suivantes:

$$\theta_1 x, \theta_1^2 x, \dots \theta_1^{2\mu} x,$$

qui seront différentes entre elles.

Cela posé, faisons

$$x_{2\mu+1} = \psi x;$$

on aura en général

$$\psi(\theta^m x) = \psi(\theta_1^k x),$$

quels que soient les nombres entiers m et k. En mettant $\theta^m x$ pour x, on aura

$$\psi(\theta_1^k \theta^m x) = \psi(\theta^{2m} x) = x_{2\mu+1};$$

donc toute quantité de la forme

$$\theta_1^k \theta^m x$$

sera racine de l'équation $y = \psi x$. Je dis maintenant que si l'on attribue à k et m toutes les valeurs entières moindres que $2\mu + 1$, les valeurs qui en résultent pour la fonction $\theta_1^k \theta^m x$, seront toutes différentes entre elles. En effet, si l'on avait

$$\theta_1^k \theta^m x = \theta_1^{k'} \theta^{m'} x,$$

il en résulterait, en mettant $\theta^{2\mu+1-m'} x$ pour x et remarquant que $\theta^{2\mu+1} x = x$,

$$\theta_1^k \theta^{n'} x = \theta_1^{k'} x,$$

en posant $n' = m + 2\mu + 1 - m'$.

Cela donne

$$\theta_1^{2\mu+1-k} \theta_1^k \theta^{n'} x = \theta_1^{k''} x,$$

en posant $k'' = 2\mu + 1 - k + k'$, c'est-à-dire

$$\theta^{n'} x = \theta_1^{k''} x,$$

et par suite

$$\theta^{n'\mu'} x = \theta_1^{k''\mu'} x.$$

Maintenant, puisque $2\mu + 1$ est un nombre premier, on pourra faire

$$k''\mu' = (2\mu + 1)\beta + 1,$$

donc

$$\theta_1^{(2\mu+1)\beta} \theta_1 x = \theta_1 x = \theta^{n'\mu'} x,$$

c'est-à-dire que $\theta_1 x$ serait une des quantités

$$x, \ \theta x, \ \ldots \ \theta^{2\mu} x,$$

ce qui est contre l'hypothèse.

L'expression $\theta_1^k \theta^m x$ a donc $(2\mu + 1)^2$ valeurs différentes et par conséquent ces valeurs seront les racines de l'équation

$$x_{2\mu+1} = y.$$

Soit maintenant

$$x' = \theta_1^k x, \ x'' = \theta_1^k \theta^m x, \ x''' = \theta^m x.$$

On aura, en regardant e et e' comme variables,

$$\frac{dx'}{\Delta x'} = \frac{dx}{\Delta x} + k \frac{de'}{\Delta e'},$$

$$\frac{dx'''}{\varDelta x'''}=\frac{dx}{\varDelta x}+m\frac{de}{\varDelta e}.$$

En mettant dans la première formule x''' au lieu de x, x' se changera en x'', donc

$$\frac{dx''}{\varDelta x''}=\frac{dx'''}{\varDelta x'''}+k\frac{de'}{\varDelta e'},$$

donc

$$\frac{dx''}{\varDelta x''}=\frac{dx}{\varDelta x}+k\frac{de'}{\varDelta e'}+m\frac{de}{\varDelta e},$$

et si l'on fait

$$k\frac{de'}{\varDelta e'}=\frac{de_k'}{\varDelta e_k'},\quad m\frac{de}{\varDelta e}=\frac{de_m}{\varDelta e_m}:$$

$$\frac{dx''}{\varDelta x''}=\frac{dx}{\varDelta x}+\frac{de_k'}{\varDelta e_k'}+\frac{de_m}{\varDelta e_m}.$$

Si donc on fait

(194) $$e_{m,k}=\frac{e_m\varDelta e_k'+e_k'\varDelta e_m}{1-c^2e_m^2e_k'^2},$$

on aura

$$\frac{dx''}{\varDelta x''}=\frac{dx}{\varDelta x}+\frac{de_{m,k}}{\varDelta e_{m,k}},$$

d'où, en supposant que e_m et e_k' s'évanouissent avec e et e',

(195) $$x''=\frac{x\varDelta e_{m,k}+e_{m,k}\varDelta x}{1-c^2e_{m,k}^2x^2}=\theta_1^k\theta^m x.$$

Toutes les racines de l'équation $y=x_{2\mu+1}$ pourront donc être représentées par cette même formule.

Donc pour connaître toutes les racines, il suffit d'avoir la valeur des deux quantités e et e', qui sont deux racines de l'équation

$$x_{2\mu+1}=0.$$

Toutes les racines de cette équation

$$x_{2\mu+1}=0,$$

lesquelles, par ce qui précède, sont les $(2\mu+1)^2$ quantités

$$0,\ \pm e_1,\ \pm e_2,\ \ldots \pm e_n,$$

sont donc exprimées par la formule

$$e_{m,k},$$

en donnant à m et k toutes les valeurs moindres que $2\mu+1$. Il est facile de voir qu'on pourra exprimer $e_{m,k}$ en fonction rationnelle des deux quanti-

tés e, e'; donc on voit que toutes les racines de l'équation $x_{2\mu+1}=0$, pourront s'exprimer rationnellement par deux d'entre elles et par le module c.

Si l'on veut exprimer $x_{2\mu+1}$ à l'aide des fonctions $\theta_1 x$ et θx, on pourra le faire d'une manière fort simple. En effet, en remarquant que le dernier terme d'une équation est le produit de toutes ses racines, on aura sur le champ

(196) $$\begin{aligned} x_{2\mu+1} = c^{2\mu^2+2\mu} . x \,.\, \theta x \,.\, \theta^2 x \ldots \theta^{2\mu} x \\ \times \theta_1 x . \theta_1 \theta x . \theta_1 \theta^2 x \ldots \theta_1 \theta^{2\mu} x \\ \times \theta_1^2 x . \theta_1^2 \theta x . \theta_1^2 \theta^2 x \ldots \theta_1^2 \theta^{2\mu} x \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \times \theta_1^{2\mu} x . \theta_1^{2\mu} \theta x . \theta_1^{2\mu} \theta^2 x \ldots \theta_1^{2\mu} \theta^{2\mu} x. \end{aligned}$$

On a aussi

(197) $$x_{2\mu+1} = \frac{1}{2\mu+1} \sum_0^{2\mu}{}_m \sum_0^{2\mu}{}_n (\theta_1^m \theta^n x).$$

§ 10.

De l'équation $x_{2\mu+1}=0$.

D'après ce qui précède les racines de l'équation $x_{2\mu+1}=0$ sont exprimées par $e_{m,k}$ en donnant à m et k toutes les valeurs moindres que $2\mu+1$. Une de ces valeurs est zéro, savoir $e_{0,0}$.

En divisant le numérateur de la fraction $x_{2\mu+1}$ par x, on aura, en égalant le quotient à zéro, une équation

(198) $$P=0,$$

du degré $4\mu^2+4\mu$. Je dis que cette équation peut être résolue à l'aide d'équations du degré $2\mu+2$ et du degré 2μ.

Soit p une fonction quelconque symétrique et rationnelle des quantités $e_1, e_2, \ldots e_{2\mu}$. En mettant pour $e_2, e_3, \ldots e_{2\mu}$ leurs expressions en fonction rationnelle de e_1, p deviendra de même une fonction rationnelle de cette racine. Faisons

(199) $$p=\varphi e_1,$$

on aura évidemment

(200) $$\varphi e_1 = \varphi e_2 = \varphi e_3 = \cdots = \varphi e_{2\mu},$$

équations qui auront lieu quelle que soit la racine e. Cela posé, mettons $e_{m,1}$ au lieu de e, il est clair que

$$e_2,\ e_3,\ \ldots\ e_{2\mu}$$

se changeront respectivement en

$$e_{2m,2},\ e_{3m,3},\ \ldots\ e_{2\mu m,2\mu}.$$

Donc on aura

$$(201)\qquad \varphi e_{m,1} = \varphi e_{2m,2} = \cdots = \varphi e_{2\mu m,2\mu}.$$

Formons l'équation

$$(202)\quad \begin{cases} (p-\varphi e_1)(p-\varphi e_{0,1})(p-\varphi e_{1,1})(p-\varphi e_{2,1})\ldots(p-\varphi e_{2\mu,1}) \\ = p^{2\mu+2} - q_{2\mu+1}\cdot p^{2\mu+1} + q_{2\mu}\cdot p^{2\mu} - \cdots - q_1\cdot p + q_0 = 0, \end{cases}$$

$q_0,\ q_1,\ \ldots\ q_{2\mu+1}$ seront des fonctions symétriques et rationnelles de φe_1, $\varphi e_{0,1},\ \ldots\ \varphi e_{2\mu,1}$. Or on pourra les exprimer rationnellement en c. En effet, il suffit d'avoir la valeur de

$$(203)\qquad (\varphi e_1)^k + (\varphi e_{0,1})^k + \cdots + (\varphi e_{2\mu,1})^k = \varrho_k.$$

En vertu des équations (200, 201) cette quantité pourra s'écrire comme il suit:

$$\begin{aligned} 2\mu\varrho_k = {} & (\varphi e_1)^k + (\varphi e_2)^k + (\varphi e_3)^k + \cdots + (\varphi e_{2\mu})^k \\ & + (\varphi e_{0,1})^k + (\varphi e_{0,2})^k + (\varphi e_{0,3})^k + \cdots + (\varphi e_{0,2\mu})^k \\ & + (\varphi e_{1,1})^k + (\varphi e_{2,2})^k + (\varphi e_{3,3})^k + \cdots + (\varphi e_{2\mu,2\mu})^k \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + (\varphi e_{2\mu,1})^k + (\varphi e_{4\mu,2})^k + (\varphi e_{6\mu,3})^k + \cdots + (\varphi e_{4\mu\mu,2\mu})^k. \end{aligned}$$

Or le second membre de cette équation est une fonction rationnelle et symétrique des racines de l'équation $P=0$; donc on pourra exprimer ϱ_k rationnellement par les coefficiens de cette équation, c'est-à-dire par c.

On voit donc que les coefficiens de l'équation (202), $q_0,\ q_1,\ q_2,\ \ldots$ seront des fonctions rationnelles de c. Donc une fonction symétrique quelconque des racines

$$e_1,\ e_2,\ e_3,\ \ldots\ e_{2\mu}$$

pourra se déterminer par le module c, à l'aide d'une équation du degré $2\mu+2$. Cela posé, faisons

$$(204)\qquad (e-e_1)(e-e_2)\ldots(e-e_{2\mu}) = e^{2\mu} + p_{\mu-1}\cdot e^{2\mu-2} + p_{\mu-2}\cdot e^{2\mu-4} + \cdots + p_1\cdot e^2 + p_0 = 0.$$

Les coefficiens $p_0,\ p_1,\ p_2,\ \ldots\ p_{\mu-1}$ seront des fonctions rationnelles et symétriques de $e_1,\ e_2,\ \ldots\ e_{2\mu}$; donc, comme nous venons de le voir, on pourra

les déterminer à l'aide d'équations du degré $2\mu+2$. Ainsi, pour avoir les racines de l'équation $P=0$, il suffira de résoudre des équations du dégré 2μ et $2\mu+2$.

Ce qui précède est susceptible d'une application importante. Le module c', exprimé par la formule (156), est, comme on le voit, une fonction rationnelle et symétrique de $e, e_2, e_3, \ldots e_{2\mu}$. Donc, en vertu de la propriété démontrée précédemment, on pourra déterminer le module c' en c à l'aide d'une équation du degré $2\mu+2$. Cette équation ne paraît guère résoluble algébriquement, excepté lorsque $2\mu+1=3$. Dans ce cas elle sera du quatrième degré.

En appliquant le théorème XII à l'équation

$$\frac{dx_{2\mu+1}}{\Delta x_{2\mu+1}}=(2\mu+1)\frac{dx}{\Delta x},$$

on aura, en remarquant que le degré de la fonction $x_{2\mu+1}$ est $(2\mu+1)^2$, et $2\mu+1$ un nombre premier,

$$\frac{dx_{2\mu+1}}{\Delta x_{2\mu+1}}=\frac{2\mu+1}{\varepsilon}\frac{dy}{\Delta' y}=(2\mu+1)\frac{dx}{\Delta x},$$

y étant une fonction de x du degré $2\mu+1$, et $x_{2\mu+1}$ une fonction de y du même degré. On aura

$$y=\frac{c^{\mu+\frac{1}{2}}}{\sqrt{c'}}\cdot\frac{x(e^2-x^2)(e_2^2-x^2)\ldots(e_\mu^2-x^2)}{(1-c^2e^2x^2)(1-c^2e_2^2x^2)\ldots(1-c^2e_\mu^2x^2)}$$

et

$$x_{2\mu+1}=\frac{c'^{\mu+\frac{1}{2}}}{\sqrt{c}}\cdot\frac{y(e'^2-y^2)(e'^2_2-y^2)\ldots(e'^2_\mu-y^2)}{(1-c'^2e'^2y^2)(1-c'^2e'^2_2y^2)\ldots(1-c'^2e'^2_\mu y^2)},$$

$$c'=c^{2\mu+1}\left(\frac{1-e^2}{1-c^2e^2}\cdot\frac{1-e_2^2}{1-c^2e_2^2}\cdots\frac{1-e_\mu^2}{1-c^2e_\mu^2}\right)^2,$$

$$c=c'^{2\mu+1}\left(\frac{1-e'^2}{1-c'^2e'^2}\cdot\frac{1-e'^2_2}{1-c'^2e'^2_2}\cdots\frac{1-e'^2_\mu}{1-c'^2e'^2_\mu}\right)^2,$$

$$\varepsilon=\frac{c^{\mu+\frac{1}{2}}}{\sqrt{c'}}e^2e_2^2\ldots e_\mu^2.$$

e' est déterminé de la même manière en c' que e l'est en c. Donc si l'on change c en c', e se changera en e'. De là il suit que l'équation entre les modules c' et c doit rester la même si l'on change simultanément c en c' et c' en c.

Puisque c' dépend d'une équation du degré $2\mu+2$, on pourra donner à la fonction y, $2\mu+2$ valeurs différentes.

§ 11.

Des transformations différentes qui répondent à un même degré de la fonction y.

Soit

$$y = \frac{A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots + A_\mu x^\mu}{B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + \cdots + B_\mu x^\mu}$$

et

(205) $$\frac{dy}{\Delta(y,c')} = \varepsilon \frac{dx}{\Delta(x,c)}.$$

Supposons μ premier et d'abord $\mu = 1$. Dans ce cas le module c', en vertu des formules du paragraphe 2, aura six valeurs différentes, et la fonction y en aura douze.

Si $\mu = 2$, on aura toutes les solutions possibles en combinant les deux formules (163, 165) avec les six formules du paragraphe 2, ce qui donne 18 valeurs différentes du module c'.

Si l'on fait

$$c_1 = \frac{1-c}{1+c}, \quad c_2 = \frac{2\sqrt{c}}{1+c}, \quad c_3 = \frac{2\sqrt{-c}}{1-c},$$

ces 18 valeurs s'obtiendront en mettant dans les six fonctions

$$\pm c, \quad \pm \frac{1}{c}, \quad \pm\left(\frac{1-\sqrt{c}}{1+\sqrt{c}}\right)^2, \quad \pm\left(\frac{1+\sqrt{c}}{1-\sqrt{c}}\right)^2, \quad \pm\left(\frac{1-\sqrt{-c}}{1+\sqrt{-c}}\right)^2, \quad \pm\left(\frac{1+\sqrt{-c}}{1-\sqrt{-c}}\right)^2,$$

les trois quantités c_1, c_2, c_3 au lieu de c.

Si μ est un nombre premier impair $2n+1$, on aura d'abord $2n+2$ valeurs du module c' qui répondent à la forme suivante de y:

$$y = \frac{c^{n+\frac{1}{2}}}{\sqrt{c'}} \frac{x(e^2-x^2)(e_2^2-x^2)\ldots(e_n^2-x^2)}{(1-c^2e^2x^2)(1-c^2e_2^2x^2)\ldots(1-c^2e_n^2x^2)}.$$

Or de chaque valeur de y de cette forme on déduit, en vertu des six formules du paragraphe 2, cinq autres valeurs de la forme:

$$c'y, \quad \frac{1+\sqrt{c'}}{1-\sqrt{c'}}\cdot\frac{1\pm y\sqrt{c'}}{1\mp y\sqrt{c'}}, \quad \frac{1-\sqrt{c'}}{1+\sqrt{c'}}\cdot\frac{1\pm y\sqrt{c'}}{1\mp y\sqrt{c'}}, \quad \frac{1-\sqrt{-c'}}{1+\sqrt{-c'}}\cdot\frac{1\pm y\sqrt{-c'}}{1\mp y\sqrt{-c'}},$$

$$\frac{1+\sqrt{-c'}}{1-\sqrt{-c'}}\cdot\frac{1\pm y\sqrt{-c'}}{1\mp y\sqrt{-c'}},$$

auxquelles répondent respectivement les modules:

$$\frac{1}{c'}, \quad \left(\frac{1-\sqrt{c'}}{1+\sqrt{c'}}\right)^2, \quad \left(\frac{1+\sqrt{c'}}{1-\sqrt{c'}}\right)^2, \quad \left(\frac{1+\sqrt{-c'}}{1-\sqrt{-c'}}\right)^2, \quad \left(\frac{1-\sqrt{-c'}}{1+\sqrt{-c'}}\right)^2.$$

On aura donc en tout $6(2n+2)=6(\mu+1)$ valeurs différentes pour le module c'. On en aura un nombre double pour la fonction y.

§ 12.

Résolution de l'équation $y=\psi x$.

L'équation algébrique $y=\psi x$, où ψx est une fonction *rationnelle* quelconque de x, satisfaisant à une équation différentielle de la forme (205), jouira de la propriété remarquable d'être résoluble par rapport à x à l'aide de radicaux. C'est ce qu'il est facile de démontrer à l'aide de la forme des racines de cette équation. D'abord si le degré μ est un nombre composé $=n.n_1.n_2\ldots n_\nu$, on pourra faire comme nous venons de le voir dans le § 7:

$$y=\psi_\nu y_\nu, \quad y_\nu=\psi_{\nu-1}y_{\nu-1}, \quad \ldots \quad y_2=\psi_1 y_1, \quad y_1=\psi x,$$

$\psi_\nu, \psi_{\nu-1}, \ldots \psi_1, \psi$ désignant des fonctions rationnelles respectivement des degrés $n_\nu, n_{\nu-1}, \ldots n_1, n$, ces derniers nombres étant premiers. On aura donc la valeur de x en y à l'aide de la résolution de $\nu+1$ équations des degrés $n, n_1, \ldots n_\nu$ respectivement. Il suffit donc de résoudre l'équation $y=\psi x$ dans le cas où le degré μ est un nombre premier. Si $\mu=2$, on aura l'expression de x par les règles connues. Soit donc μ impair $=2\mu+1$. Alors les racines de l'équation $y=\psi x$ seront les $2\mu+1$ quantités

$$x, \quad \theta x, \quad \theta^2 x \ldots \theta^{2\mu} x.$$

Cela posé, soit δ une racine imaginaire de l'équation

$$\delta^{2\mu+1}=1,$$

et faisons

$$v=x+\delta.\theta x+\delta^2.\theta^2 x+\cdots+\delta^{2\mu}.\theta^{2\mu}x,$$
$$v'=x+\delta.\theta^{2\mu}x+\delta^2.\theta^{2\mu-1}x+\cdots+\delta^{2\mu}.\theta x.$$

En substituant pour les quantités $\theta^m x$ leurs valeurs

$$\theta^m x=\frac{x\Delta e_m+e_m\Delta x}{1-c^2e_m^2x^2},$$

et remarquant que

$$\theta^{2\mu+1-m}x=\frac{x\Delta e_m-e_m\Delta x}{1-c^2e_m^2x^2},$$

il est clair qu'on aura

$$v = p + q\Delta x, \quad v' = p - q\Delta x,$$

p et q étant des fonctions rationnelles de x. Cela fait voir que vv' et $v^{2\mu+1} + v'^{2\mu+1}$ sont des fonctions rationnelles de x; or je dis qu'on pourra exprimer ces quantités en fonction rationnelle de y. En effet, en vertu de la forme de v et v', il est clair que si l'on fait

$$vv' = \varphi x, \quad v^{2\mu+1} + v'^{2\mu+1} = fx,$$

les deux fonctions φx et fx ne changeront pas de valeur si l'on met pour x les $2\mu+1$ quantités

$$x, \ \theta x, \ \dots \ \theta^{2\mu} x.$$

Donc on aura

$$\varphi x = \frac{1}{2\mu+1}(\varphi x + \varphi\theta x + \dots + \varphi\theta^{2\mu} x) = vv',$$

$$fx = \frac{1}{2\mu+1}(fx + f\theta x + \dots + f\theta^{2\mu} x) = v^{2\mu+1} + v'^{2\mu+1}.$$

Ces expressions des quantités vv', $v^{2\mu+1} + v'^{2\mu+1}$ sont des fonctions *rationnelles et symétriques* des racines de l'équation $y = \psi x$; donc on pourra les exprimer rationnellement par les coefficiens de cette équation, c'est-à-dire en y.

Faisons donc

$$vv' = s$$

$$v^{2\mu+1} + v'^{2\mu+1} = t,$$

s et t seront des fonctions rationnelles de y. On en tire

$$v = \sqrt[2\mu+1]{\frac{t}{2} + \sqrt{\frac{t^2}{4} - s^{2\mu+1}}}.$$

On connaît donc la fonction v. Cela posé, si l'on désigne par $v_0, v_1, v_2, \dots v_{2\mu}$ les valeurs de v qui répondent respectivement aux racines $1, \delta, \delta^2, \delta^3, \dots \delta^{2\mu}$ de l'équation $\delta^{2\mu+1} = 1$, on aura sur le champ

$$x = \frac{1}{2\mu+1}(v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_{2\mu}),$$

$$\theta^m x = \frac{1}{2\mu+1}(v_0 + \delta^{-m} v_1 + \delta^{-2m} v_2 + \dots + \delta^{-2m\mu} v_{2\mu}),$$

ce qui est l'expression générale des racines.

On aura ainsi une classe très étendue d'équations algébriques de tous les degrés qui seront résolubles algébriquement. Nous n'entrerons pas ici dans des détails sur ce sujet, mais nous renvoyons nos lecteurs à la seconde partie de ce mémoire, où nous en donnerons des développemens étendus à cause des belles propriétés des fonctions elliptiques qu'on en peut déduire.

Comme cas particulier on pourra remarquer l'équation

$$x_\mu = y,$$

où x_μ désigne la fonction rationnelle de x du degré μ^2, qui satisfera à l'équation

$$\frac{dx_\mu}{\Delta x_\mu} = \mu \frac{dx}{\Delta x}.$$

On en pourra donc toujours tirer la valeur de x en y à l'aide de radicaux. Si μ est un nombre impair, on pourra donner aux racines cette forme très simple:

$$x = \frac{1}{\mu}\left[ay + (p_1 + q_1 \Delta y)^{\frac{1}{\mu}} + (p_2 + q_2 \Delta y)^{\frac{1}{\mu}} + \cdots + (p_{\mu^2-1} + q_{\mu^2-1} \Delta y)^{\frac{1}{\mu}}\right],$$

où $p_1, p_2, p_3 \ldots$ sont des fonctions *entières impaires* de y du degré μ, et $q_1, q_2, q_3 \ldots$ des fonctions paires de y du degré $\mu - 3$. p_m et q_m seront déterminés par l'équation

$$p_m^2 - q_m^2 (1 - y^2)(1 - c^2 y^2) = (y^2 - e_m^2)^\mu,$$

où e_m est une constante, savoir une racine de l'équation $x_\mu = 0$.

CHAPITRE V.

Théorie générale de la transformation des fonctions elliptiques par rapport au module.

A l'aide des théorèmes que nous avons établis dans les chapitres précédens, nous pourrons maintenant donner la solution de ce problème:

„*Étant proposée une fonction elliptique d'un module quelconque, exprimer cette fonction de la manière la plus générale en d'autres fonctions.*"

§ 1.

Condition générale pour la transformation.

Soit proposée une intégrale de la forme

$$\int \frac{r\,dx}{\Delta x},$$

on demande s'il est possible d'exprimer cette intégrale par des fonctions algébriques, logarithmiques et des fonctions elliptiques, dont les modules sont $c_1, c_2, \ldots c_m$, en sorte qu'on ait:

$$\int \frac{r\,dx}{\Delta x} = A_1 . \psi_1 x_1 + A_2 . \psi_2 x_2 + \cdots + A_m . \psi_m x_m + V,$$

où $A_1, A_2, \ldots A_m$ sont des constantes, $x_1, x_2, \ldots x_m$ des fonctions algébriques de x, et V une fonction algébrique et logarithmique; $\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_m$ désignent des fonctions elliptiques ayant respectivement $c_1, c_2, \ldots c_m$ pour modules.

Cela posé, cette équation donnera en vertu de la formule (86):

$$\int \frac{r\,dx}{\Delta x} = k_1 . \psi_1 y_1 + k_2 . \psi_2 y_2 + \cdots + k_m . \psi_m y_m + V',$$

les quantités

$$y_1, y_2, y_3, \ldots y_m$$

de même que

$$\frac{\Delta_1 y_1}{\Delta x}, \frac{\Delta_2 y_2}{\Delta x}, \frac{\Delta_3 y_3}{\Delta x}, \ldots \frac{\Delta_m y_m}{\Delta x}$$

étant des fonctions rationnelles de x.

Si l'on suppose, ce qui est permis, qu'il soit impossible d'exprimer

$$\int \frac{r\,dx}{\Delta x}$$

par un nombre moindre des fonctions $\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_m$, il est clair qu'aucune des quantités $y_1, y_2, \ldots y_m$ ne pourra être constante.

On doit donc avoir séparément, en vertu du théorème démontré dans le premier paragraphe du chapitre précédent,

$$\frac{dy_1}{\Delta_1 y_1} = \varepsilon_1 \frac{dx}{\Delta x}, \quad \frac{dy_2}{\Delta_2 y_2} = \varepsilon_2 \frac{dx}{\Delta x}, \ldots \frac{dy_m}{\Delta_m y_m} = \varepsilon_m \frac{dx}{\Delta x},$$

où $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_m$ sont des constantes. Cela donne en intégrant,

$$\varpi(y_1, c_1) = \varepsilon_1 \varpi x, \quad \varpi(y_2, c_2) = \varepsilon_2 \varpi x, \ldots \varpi(y_m, c_m) = \varepsilon_m \varpi x$$

sauf une constante qu'il faut ajouter à chacune de ces équations. On pourra donc énoncer ce théorème:

Théorème XIII. Une relation quelconque entre des fonctions elliptiques, ayant $c, c_1, c_2, \ldots c_m$ pour modules, ne pourra subsister à moins qu'on n'ait entre les fonctions correspondantes de la première espèce, cette relation

$$\varpi(x, c) = \frac{1}{\varepsilon_1}\varpi(y_1, c_1) = \frac{1}{\varepsilon_2}\varpi(y_2, c_2) = \cdots = \frac{1}{\varepsilon_m}\varpi(y_m, c_m), \tag{206}$$

où $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_m$ sont des constantes et $y_1, y_2, \ldots y_m$ des fonctions rationnelles de la variable x.

On pourra donc encore satisfaire aux équations suivantes:

$$\left\{\begin{array}{l} \varpi(x_1, c) = \varepsilon' \varpi(x, c_1), \\ \varpi(x_2, c) = \varepsilon'' \varpi(x, c_2), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varpi(x_m, c) = \varepsilon^{(m)} \varpi(x, c_m), \end{array}\right. \tag{207}$$

$x_1, x_2, \ldots x_m$ étant des fonctions rationnelles de x; ou bien, si l'on désigne par c et c' les modules de deux quelconques des fonctions entre lesquelles on a une relation, on pourra toujours satisfaire à l'équation

$$\varpi(x', c') = \varepsilon\,\varpi(x, c), \tag{208}$$

en supposant x' fonction rationnelle de x, ou x fonction rationnelle de x'. Cette équation donne

$$\frac{dx'}{\varDelta(x', c')} = \varepsilon \frac{dx}{\varDelta(x, c)}. \tag{209}$$

Soit maintenant x' fonction rationnelle de x; si r' désigne une fonction rationnelle quelconque de x', on pourra transformer r' en une fonction pareille de x. En la désignant par r, on aura donc $r' = r$. Donc en multipliant l'équation différentielle ci-dessus par r', on aura, en intégrant

$$\int \frac{r'dx'}{\varDelta(x', c')} = \varepsilon \int \frac{rdx}{\varDelta(x, c)}. \tag{210}$$

Quelle que soit la fonction rationnelle r, on pourra toujours, comme on sait, exprimer

$$\int \frac{rdx}{\varDelta(x, c)}$$

par des fonctions elliptiques des trois espèces avec le module c. On aura donc ce théorème:

Théorème XIV. Si une fonction elliptique quelconque φx, ayant c' pour module, peut être exprimée par d'autres fonctions dont les modules sont $c_1, c_2, \ldots c_m$, on pourra toujours exprimer la même fonction φx par des fonctions elliptiques d'un même module c, c étant l'un quelconque des modules $c_1, c_2, \ldots c_m$, et cela de la manière suivante:

(211) $$\varphi y = \int \frac{r\,dx}{\Delta(x, c)},$$

où y et r sont des fonctions rationnelles de x.

La continuation d'après un manuscrit inédit.

En vertu de ce théorème tout ce qui concerne la transformation des fonctions elliptiques par rapport au module se réduit à exprimer l'intégrale $\int \frac{r\,dx}{\Delta(x, c)}$ par des fonctions elliptiques.

§ 2.

Transformation des fonctions de la première et de la seconde espèce.

Supposons d'abord que φx soit une fonction de la première espèce, de sorte qu'on ait

$$\varphi x = \int \frac{dx}{\Delta(x, c')}.$$

Dans ce cas la fonction r se réduit à une constante, et on aura par suite

(212) $$\varpi(y, c') = \varepsilon \,.\, \varpi(x, c),$$

où y est rationnel en x. Cette équation est la même que celle-ci:

$$\frac{dy}{\Delta(y, c')} = \varepsilon \frac{dx}{\Delta(x, c)}.$$

Nous en avons donné la solution dans le chapitre précédent. Passons aux fonctions de la seconde espèce:

$$\varphi x = \int \frac{x^2 dx}{\Delta(x, c')} = \varpi_0(x, c').$$

On aura alors

(213) $$\varpi_0(y, c') = \varepsilon \int \frac{y^2 dx}{\Delta(x, c)}.$$

Comme y est une fonction rationnelle de x, l'intégrale du second membre paraît contenir des fonctions de la troisième espèce, mais nous verrons qu'on peut toujours la réduire à une expression de la forme:

$$A . \varpi(x, c) + B . \varpi_0(x, c) + v,$$

où v est une fonction algébrique de x. Il y a un moyen bien simple de prouver cela, savoir en différentiant l'équation

$$\varpi(y, c') = \varepsilon . \varpi(x, c)$$

par rapport au module c. Cette équation revient à celle-ci:

$$\int dy (1 - y^2)^{-\frac{1}{2}} (1 - c'^2 y^2)^{-\frac{1}{2}} = \varepsilon \int dx (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} (1 - c^2 x^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

En la différentiant par rapport à c et remarquant que les trois quantités y, c', ε contiennent cette quantité, on aura

$$c' \frac{dc'}{dc} \int \frac{y^2 dy}{(1 - c'^2 y^2) \Delta(y, c')} + \frac{dy}{dc} \cdot \frac{1}{\Delta(y, c')} = \frac{d\varepsilon}{dc} \int \frac{dx}{\Delta(x, c)} + c\varepsilon \int \frac{x^2 dx}{(1 - c^2 x^2) \Delta(x, c)};$$

mais on a

$$\int \frac{x^2 dx}{(1 - c^2 x^2) \Delta(x, c)} = \frac{1}{c^2 - 1} \cdot \frac{x(1 - x^2)}{\Delta(x, c)} + \frac{1}{1 - c^2} \int \frac{(1 - x^2) dx}{\Delta(x, c)},$$

$$\int \frac{y^2 dy}{(1 - c'^2 y^2) \Delta(y, c')} = \frac{1}{c'^2 - 1} \cdot \frac{y(1 - y^2)}{\Delta(y, c')} + \frac{1}{1 - c'^2} \int \frac{(1 - y^2) dy}{\Delta(y, c')}.$$

En substituant on aura

$$\frac{c'}{1 - c'^2} \cdot \frac{dc'}{dc} \left\{ \varpi(y, c') - \varpi_0(y, c') - \frac{y(1 - y^2)}{\Delta(y, c')} \right\} + \frac{dy}{dc} \cdot \frac{1}{\Delta(y, c')}$$
$$= \frac{d\varepsilon}{dc} \varpi(x, c) + \frac{c\varepsilon}{1 - c^2} \left\{ \varpi(x, c) - \varpi_0(x, c) - \frac{x(1 - x^2)}{\Delta(x, c)} \right\},$$

et de là en mettant pour $\varpi(y, c')$ sa valeur $\varepsilon \varpi(x, c)$,

(214) $$\varpi_0(y, c') = A \varpi(x, c) + B \varpi_0(x, c) + p,$$

où l'on a fait pour abréger



$$(215)\quad \begin{cases} A = \varepsilon \left\{ 1 - \dfrac{c\,dc(1-c'^2)}{c'\,dc'(1-c^2)} \right\} - \dfrac{d\varepsilon(1-c'^2)}{c'\,dc'}, \\ B = \dfrac{\varepsilon c(1-c'^2)\,dc}{c'(1-c^2)\,dc'}, \\ p = \dfrac{(1-c'^2)\,dc}{c'\,dc'} \cdot \dfrac{dy}{dc} \cdot \dfrac{1}{\varDelta(y,c')} + B \dfrac{x(1-x^2)}{\varDelta(x,c)} - \dfrac{y(1-y^2)}{\varDelta(y,c')}. \end{cases}$$

Or on pourra parvenir plus directement à l'expression de $\varpi_0(y,c')$, savoir en décomposant la fonction rationnelle y^2 en fractions partielles.

Soit $x-a$ un facteur du dénominateur de y, on aura

$$(216)\qquad y^2 = \frac{A}{(x-a)^2} + \frac{B}{x-a} + S,$$

où A et B sont des constantes. En faisant $y = \frac{1}{\varphi x}$, on trouve d'après les règles connues

$$(217)\qquad A = \frac{1}{(\varphi' a)^2}; \quad B = -\frac{\varphi'' a}{(\varphi' a)^3}.$$

Or si l'on met dans l'équation

$$\frac{dy}{\varDelta(y,c')} = \varepsilon \frac{dx}{\varDelta(x,c)}$$

$\frac{1}{\varphi x}$ au lieu de y, il viendra

$$(218)\qquad (1-x^2)(1-c^2x^2)(\varphi' x)^2 = \varepsilon^2[(\varphi x)^2 - 1][(\varphi x)^2 - c'^2]$$
$$= \varepsilon^2(\varphi x)^4 - \varepsilon^2(1+c'^2)(\varphi x)^2 + \varepsilon^2 c'^2.$$

En y faisant $x = a$ on a $\varphi x = 0$, donc

$$(1-a^2)(1-c^2a^2)(\varphi' a)^2 = \varepsilon^2 c'^2.$$

De même si l'on différentie l'équation (218) par rapport à x et qu'on fasse ensuite $x = a$, on aura

$$2(1-a^2)(1-c^2a^2)\varphi' a . \varphi'' a - [2(1+c^2)a - 4c^2a^3](\varphi' a)^2 = 0;$$

on a donc

$$(219)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{(\varphi' a)^2} = \dfrac{(1-a^2)(1-c^2a^2)}{\varepsilon^2 c'^2} = A, \\ -\dfrac{\varphi'' a}{(\varphi' a)^3} = \dfrac{-(1+c^2)a + 2c^2a^3}{\varepsilon^2 c'^2} = B. \end{cases}$$

En vertu de ces valeurs de A et de B il est facile d'avoir l'expression de $\int y^2 \frac{dy}{\varDelta(y,c')}$. En effet, en multipliant l'expression de y^2 par $\frac{dy}{\varDelta(y,c')} = \varepsilon \frac{dx}{\varDelta(x,c)}$,

il viendra

$$(220)\quad \int \frac{y^2 dy}{\Delta(y,c')} = \frac{1}{\varepsilon c'^2} \int \left\{ \frac{(1-a^2)(1-c^2a^2)}{(x-a)^2} + \frac{2c^2a^3-(1+c^2)a}{x-a} \right\} \frac{dx}{\Delta(x,c)} + \varepsilon \int \frac{S\,dx}{\Delta(x,c)}.$$

Or si l'on différentie la fonction

$$\frac{\Delta(x,c)}{x-a} = r,$$

on trouvera

$$dr = -\left\{ \frac{(1-a^2)(1-c^2a^2)}{(x-a)^2} + \frac{2c^2a^3-(1+c^2)a}{x-a} + c^2a^2 - c^2x^2 \right\} \frac{dx}{\Delta(x,c)},$$

donc la première des intégrales du second membre de l'équation (220) est la même chose que

$$\int (c^2x^2 - c^2a^2) \frac{dx}{\Delta(x,c)} - \frac{\Delta(x,c)}{x-a} = \frac{\Delta(x,c)}{a-x} - c^2a^2\varpi(x,c) + c^2\varpi_0(x,c).$$

Donc l'expression de $\int \frac{y^2dy}{\Delta(y,c')}$ deviendra

$$\int \frac{y^2 dy}{\Delta(y,c')} = \frac{1}{\varepsilon c'^2} \left\{ \frac{\Delta(x,c)}{a-x} - c^2a^2\varpi(x,c) + c^2\varpi_0(x,c) \right\} + \varepsilon \int \frac{S\,dx}{\Delta(x,c)}.$$

En désignant donc par $a_1, a_2, \ldots a_\mu$ toutes les racines de l'équation $\frac{1}{y} = 0$, on aura

$$(221)\quad \varepsilon c'^2 \varpi_0(y,c'^2) = \mu c^2 \varpi_0(x,c) - [c^2(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_\mu^2) - \varepsilon^2 c'^2 k^2]\varpi(x,c) + \Delta(x,c) \left\{ \frac{1}{a_1 - x} + \frac{1}{a_2 - x} + \cdots + \frac{1}{a_\mu - x} \right\},$$

où k est une quantité constante, savoir la valeur de y pour $x = \frac{1}{0}$.

Cette formule répond à une fonction rationnelle y du degré μ, savoir

$$y = k \frac{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\ldots(x-\alpha_\mu)}{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\ldots(x-a_\mu)};$$

mais il y a deux cas qu'il faut considérer séparément: il pourra arriver que l'une des quantités a_μ et α_μ sera infinie. Soit d'abord $\alpha_\mu = \frac{1}{0}$. Alors on aura $k = 0$. Dans ce cas la fonction y sera une fonction impaire de x, dont le numérateur sera d'un degré moindre que celui du dénominateur. Si μ est pair, on aura en mettant 2μ pour μ,

$$y = \varepsilon \frac{x(1-\beta_1^2x^2)(1-\beta_2^2x^2)\ldots(1-\beta_{\mu-1}^2x^2)}{(1-\delta_1^2x^2)(1-\delta_2^2x^2)\ldots(1-\delta_\mu^2x^2)},$$

et la formule (221) deviendra

(222) $$\varepsilon c'^2 \varpi_0(y, c') = 2\mu c^2 \varpi_0(x, c) - 2c^2 \left\{ \frac{1}{\delta_1^2} + \frac{1}{\delta_2^2} + \cdots + \frac{1}{\delta_\mu^2} \right\} \varpi(x, c) + 2x.\Delta(x, c) \left\{ \frac{\delta_1^2}{1-\delta_1^2 x^2} + \frac{\delta_2^2}{1-\delta_2^2 x^2} + \cdots + \frac{\delta_\mu^2}{1-\delta_\mu^2 x^2} \right\}.$$

Si μ est un nombre impair, on aura en mettant $2\mu+1$ pour μ,

(223) $$y = \frac{(1-c^2 a_1^2 x^2)(1-c^2 a_2^2 x^2)\ldots(1-c^2 a_\mu^2 x^2)}{x(a_1^2-x^2)(a_2^2-x^2)\ldots(a_\mu^2-x^2)} \cdot \frac{a_1^2 \cdot a_2^2 \ldots a_\mu^2}{\varepsilon c'},$$

et la formule (221) deviendra

(224) $$\varepsilon c'^2 \varpi_0(y, c') = (2\mu+1) c^2 \varpi_0(x, c) - 2c^2(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_\mu^2) \varpi(x, c) + 2x\Delta(x, c) \left\{ -\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{a_1^2 - x^2} + \cdots + \frac{1}{a_\mu^2 - x^2} \right\}.$$

Supposons maintenant $a_\mu = 0$. On aura alors $k = \frac{1}{0}$. La fonction y sera impaire, mais le dénominateur sera d'un degré plus petit que celui du numérateur. Pour avoir les formules qui répondent à ce cas, il suffit de mettre dans les deux équations (222, 224), $\frac{1}{cz}$ au lieu de x. Cela donne

$$\Delta(x, c) = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{c^2 z^2}\right)\left(1 - \frac{1}{z^2}\right)} = -\frac{\Delta(z, c)}{cz^2},$$

$$\varpi(x, c) = +\int \frac{dz}{\Delta(z, c)} = +\varpi(z, c),$$

$$c^2 \varpi_0(x, c) = +\int \frac{dz}{z^2 \Delta(z, c)} = +c^2 \varpi_0(z, c) - \frac{\Delta(z, c)}{z}.$$

Donc en substituant dans la formule (224) et mettant $z = x$,

(225) $$\varepsilon c'^2 \varpi_0(y, c') = (2\mu+1) c^2 \varpi_0(x, c) - 2c^2(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_\mu^2) \varpi(x, c) + 2x\Delta(x, c) \left\{ \frac{c^2 a_1^2}{1 - c^2 a_1^2 x^2} + \frac{c^2 a_2^2}{1 - c^2 a_2^2 x^2} + \cdots + \frac{c^2 a_\mu^2}{1 - c^2 a_\mu^2 x^2} \right\}.$$

L'expression de y sera, en vertu de la formule (223),

$$y = \frac{\varepsilon}{a_1^2 \cdot a_2^2 \ldots a_\mu^2} \cdot \frac{x(a_1^2 - x^2)(a_2^2 - x^2)\ldots(a_\mu^2 - x^2)}{(1 - c^2 a_1^2 x^2)(1 - c^2 a_2^2 x^2)\ldots(1 - c^2 a_\mu^2 x^2)}.$$

Pour donner un exemple soit

$$c' = \frac{2\sqrt{c}}{1+c}, \quad y = (1+c)\frac{x}{1+cx^2}, \quad \varepsilon = 1+c;$$

alors on a $\mu=2$, et la formule (222) donnera, pour $\mu=1$,

$$\varpi_0(y,c')=\frac{c(1+c)}{2}\varpi_0(x,c)+\frac{1+c}{2}\varpi(x,c)-\frac{1+c}{2}\cdot\frac{x\Delta(x,c)}{1+cx^2}.$$

§ 3.

Transformation des fonctions de la troisième espèce.

Soit maintenant

$$\varphi y=\int\frac{dy}{\left(1-\frac{y^2}{a'^2}\right)\Delta(y,c')}=\Pi(y,c',a').$$

En mettant pour $\frac{dy}{\Delta(y,c')}$ sa valeur $\varepsilon\frac{dx}{\Delta(x,c)}$, on aura

$$\Pi(y,c',a')=\varepsilon\int\frac{dx}{\left(1-\frac{y^2}{a'^2}\right)\Delta(x,c)}. \tag{226}$$

Pour réduire le second membre aux fonctions elliptiques il faut décomposer la fraction rationnelle $\frac{1}{1-\frac{y^2}{a'^2}}$ en fractions partielles. Soit donc d'abord

$$\frac{1}{a'-y}=k'+\frac{A_1}{a_1-x}+\frac{A_2}{a_2-x}+\cdots+\frac{A_\mu}{a_\mu-x}=k'+\Sigma\frac{A}{a-x},$$

où il est clair que k' est une constante. Pour déterminer A_1, A_2, ... on aura d'abord

$$A=\frac{(a-x)}{a'-y}\quad\text{pour}\quad x=a,$$

donc

$$A=\frac{dx}{dy};$$

or on a

$$\varepsilon\Delta(y,c')=\frac{dy}{dx}\Delta(x,c),$$

donc en faisant $x=a$ et remarquant que la valeur de y deviendra alors a', on aura

$$\varepsilon\Delta(a',c')=\frac{dy}{dx}\Delta(a,c),$$

et par conséquent

$$A=\frac{\Delta(a,c)}{\varepsilon\Delta(a',c')}.$$

En substituant on aura par conséquent

$$(227)\qquad \frac{1}{a'-y}=k'+\frac{1}{\varepsilon\varDelta(a',c')}\left\{\frac{\varDelta(a_1,c)}{a_1-x}+\frac{\varDelta(a_2,c)}{a_2-x}+\cdots+\frac{\varDelta(a_\mu,c)}{a_\mu-x}\right\}.$$

En désignant de même les racines de l'équation $a'+y=0$ par $b_1, b_2, \ldots b_\mu$, on aura

$$\frac{1}{a'+y}=k''+\frac{1}{\varepsilon\varDelta(a',c')}\left\{\frac{\varDelta(b_1,c)}{b_1-x}+\frac{\varDelta(b_2,c)}{b_2-x}+\cdots+\frac{\varDelta(b_\mu,c)}{b_\mu-x}\right\}.$$

En ajoutant ces valeurs de $\frac{1}{a'-y}$ et $\frac{1}{a'+y}$ on aura celle de $\frac{2a'}{a'^2-y^2}$. Mais il suffit de considérer la formule (227). En la multipliant par $\frac{dy}{\varDelta(y,c')}$ et intégrant, il viendra

$$(228)\qquad \varDelta(a',c')\int\frac{dy}{(a'-y)\varDelta(y,c)}=k_1\varpi(x,c)+\Sigma\varDelta(a,c)\int\frac{dx}{(a-x)\varDelta(x,c)}.$$

Cela posé, ayant $\frac{1}{a-x}=\frac{a+x}{a^2-x^2}$, on en tire

$$\int\frac{dx}{(a-x)\varDelta(x,c)}=\frac{1}{a}\,\Pi(x,c,a)+\int\frac{x\,dx}{(a^2-x^2)\varDelta(x,c)}.$$

De même on aura

$$\int\frac{dy}{(a'-y)\varDelta(y,c')}=\frac{1}{a'}\,\Pi(y,c',a')+\int\frac{y\,dy}{(a'^2-y^2)\varDelta(y,c')}.$$

Donc la formule (228) donnera en substituant

$$(229)\qquad \left\{\begin{aligned}&\frac{\varDelta(a',c')}{a'}\,\Pi(y,a',c')+\varDelta(a',c')\int\frac{y\,dy}{(a'^2-y^2)\varDelta(y,c')}\\&=k_1\varpi(x,c)+\Sigma\frac{\varDelta(a,c)}{a}\,\Pi(x,a,c)+\Sigma\varDelta(a,c)\int\frac{x\,dx}{(a^2-x^2)\varDelta(x,c)}.\end{aligned}\right.$$

Les intégrales qui entrent encore dans cette formule seront, comme on le voit, exprimables par des logarithmes.

On aura par conséquent

$$(230)\qquad \frac{\varDelta(a',c')}{a'}\,\Pi(y,c',a')=k_1\varpi(x,c)+\Sigma\frac{\varDelta(a,c)}{a}\,\Pi(x,c,a)+v'.$$

Il est à remarquer que cette formule ne contient pas de fonctions de la seconde espèce.

La fonction de la troisième espèce $\Pi(y,c',a')$ est donc ainsi réduite à la fonction de la première espèce $\varpi(x,c)$ et à μ fonctions de la troisième espèce.

Or je dis qu'on pourra toujours exprimer les μ fonctions du second membre par une seule. C'est ce qui est facile à prouver à l'aide des formules établies dans les chapitres précédens. D'abord si l'on détermine une quantité α de sorte que l'équation

$$(fx)^2-(\varphi x)^2[\varDelta(x,c)]^2=(x^2-a_1^2)(x^2-a_2^2)\dots(x^2-a_\mu^2)(x^2-\alpha^2)$$

soit satisfaite, fx et φx étant des fonctions entières de x, dont l'une est paire et l'autre impaire, on aura sûr le champ, en vertu de la formule (104),

$$\Sigma\frac{\varDelta(a,c)}{a}\Pi(x,c,a)=k_2\varpi(x,c)+\frac{\varDelta(\alpha,c)}{\alpha}\Pi(x,c,\alpha)-\tfrac{1}{2}\log\left\{\frac{fx+\varphi x\,\varDelta(x,c)}{fx-\varphi x\,\varDelta(x,c)}\right\}.$$

Donc en substituant:

$$(231)\quad\frac{\varDelta(a',c')}{a'}\Pi(y,c',a')=(k_1+k_2)\varpi(x,c)+\frac{\varDelta(\alpha,c)}{\alpha}\Pi(x,c,\alpha)$$
$$+v'-\tfrac{1}{2}\log\left\{\frac{fx+\varphi x\,\varDelta(x,c)}{fx-\varphi x\,\varDelta(x,c)}\right\}.$$

Quant aux coefficiens des puissances de x dans les deux fonctions fx et φx, ils sont déterminés par les μ équations suivantes:

$$fa_1+\varphi a_1.\varDelta(a_1,c)=0,$$
$$fa_2+\varphi a_2.\varDelta(a_2,c)=0,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$fa_\mu+\varphi a_\mu.\varDelta(a_\mu,c)=0,$$

auxquelles il faut ajouter celle-ci:

$$f\alpha+\varphi\alpha.\varDelta(\alpha,c)=0,$$

pour déterminer le signe du radical $\varDelta(\alpha,c)$.

On peut encore réduire les fonctions du second membre de l'équation (230) d'une autre manière: on pourra les exprimer par l'une quelconque d'entre elles, comme nous allons le voir.

Soit a l'une quelconque des quantités $a_1,\ a_2,\ \dots a_\mu$. Alors comme elles seront les racines de l'équation

$$a'=y=\psi(x),$$

elles auront, en vertu de ce qui a été démontré dans le troisième paragraphe du chapitre précédent, toutes la forme

$$\frac{a\,\varDelta(e,c)+e\,\varDelta(a,c)}{1-c^2e^2a^2},$$

où e est une constante indépendante de a. Soit donc

(232) $$a_m = \frac{a\,\Delta(e_m, c) + e_m\,\Delta(a, c)}{1 - c^2 e_m^2 a^2},$$

on aura en vertu de la formule (112)

$$\frac{\Delta(a_m, c)}{a_m} \cdot \Pi(x, c, a_m) = \frac{\Delta(a, c)}{a} \Pi(x, c, a)$$

$$+ \beta_m \varpi(x, c) + \frac{\Delta(e_m, c)}{e_m} \Pi(x, c, e_m) + \log S_m.$$

La formule (230) deviendra donc en substituant

(233) $$\frac{\Delta(a', c')}{a'} \Pi(y, c', a') = (k_1 + \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_{\mu-1})\,\varpi(x, c)$$

$$+ \mu \frac{\Delta(a, c)}{a} \Pi(x, c, a) + \Sigma \frac{\Delta(e_m, c)}{e_m} \Pi(x, c, e_m)$$

$$+ v' + \log S_1 + \log S_2 + \cdots + \log S_{\mu-1}.$$

Je dis maintenant que $\Sigma \frac{\Delta(e_m, c)}{e_m} \Pi(x, c, e_m)$ se réduit à zéro. En effet, si l'expression de a_m est racine de l'équation $a' - y = 0$, elle le sera encore en mettant $-e_m$ pour e_m. Si donc μ est un nombre impair, les termes qui composent l'expression $\Sigma \frac{\Delta(e_m, c)}{e_m} \Pi(x, c, e_m)$ sont deux-à-deux égales et de signes contraires. Si μ est un nombre pair, l'expression dont il s'agit se réduira à un seul terme $\frac{\Delta(e, c)}{e} \Pi(x, c, e)$, où e est zéro ou l'infini. Si e est nul, ce terme le sera de même. Si $e = \frac{1}{0}$, la valeur correspondante de a_m est $\pm \frac{1}{ca}$, donc en vertu de la formule (115) . . . .

XXIX.

THÉORÈMES ET PROBLÈMES.

Journal für die reine und angewandte Mathematik, herausgegeben von *Crelle*, Bd. 2, Berlin 1827.

Théorème. Si la somme de la série infinie

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_m x^m + \cdots$$

est égale à zéro pour toutes les valeurs de x entre deux limites réelles α et β, on aura nécessairement

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 0, \quad \ldots \; a_m = 0 \; \ldots,$$

de sorte que la somme de la série s'évanouira pour une valeur quelconque de x.

Problème. En supposant la série

$$fx = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

convergente pour toute valeur positive *moindre* que la quantité positive α, on propose de trouver la limite vers laquelle converge la valeur de la fonction fx, en faisant converger x vers la limite α.

Théorème. Si l'équation différentielle séparée

$$\frac{a\,dx}{\sqrt{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4}} = \frac{dy}{\sqrt{\alpha + \beta y + \gamma y^2 + \delta y^3 + \varepsilon y^4}},$$

où α, β, γ, δ, ε, a sont des quantités *réelles*, est algébriquement intégrable, il faut nécessairement que la quantité a soit un nombre *rationnel*.

Problème. Trouver une intégrale *algébrique* des deux équations séparées:

$$\frac{dx\sqrt{3}}{\sqrt{3+3x^2+x^4}} = \frac{dy}{\sqrt{3-3y^2+y^4}},$$

$$\frac{dx\sqrt{3}}{\sqrt{1+x^2+x^4}} = \frac{dy}{\sqrt{1-x^2+x^4}}.$$

Journal für die reine und angewandte Mathematik, herausgegeben von *Crelle*, Bd. 3, Berlin 1828.

Problème. Le nombre $\alpha^{\mu-1}-1$ peut il être divisible par μ^2, μ étant un nombre premier, et α un entier moindre que μ et plus grand que l'unité?

ERRATA.

Page 50. Dans la première et l'avant-dernière formule les signes des seconds membres doivent être changés.

Page 154, dernière ligne, *au lieu de* $\frac{1}{a-x}$, *lisez* $\frac{1}{\alpha-x}$.

Page 163, dernière ligne, *au lieu de* $h\,y^{(m)}$, *lisez* $h\,y^{(\mu')}$.

Page 185, ligne 3, en descendant, *au lieu de* $3[f(11)+11.\frac{4}{5}]$, *lisez* $3[f(11)+11.\frac{4}{3}]$.

Page 192, ligne 13, en descendant, *au lieu de* $\varepsilon^{\frac{\pi\mu_m-\alpha_m}{n}}$, *lisez* $\varepsilon^{\frac{\pi\mu_m-\alpha_m}{n}}$.

Page 237, ligne 12, en descendant, *au lieu de* $\delta'=-\alpha\sin\varphi-\frac{1}{2}\alpha^2\sin 2\varphi+\frac{1}{3}\alpha^3\sin 3\varphi-\cdots$ *lisez* $\delta'=-(\alpha\sin\varphi-\frac{1}{2}\alpha^2\sin 2\varphi+\frac{1}{3}\alpha^3\sin 3\varphi-\cdots)$

Page 239, ligne 6 et 7, en remontant, *au lieu de* lorsque k est égal à zéro ou compris entre 0 et $+\infty$, et lorsque k est compris entre 0 et -1, *lisez:* lorsque k est compris entre 0 et $+\infty$, et lorsque k est égal à zéro ou compris entre 0 et -1.

Page 265, ligne 13, en remontant, *au lieu de* Fa, *lisez* $F\alpha$.

Page 277, ligne 3, en descendant, *au lieu de* $\varphi x=\frac{i}{cc}\frac{1}{\varphi\left(x-\frac{\omega}{2}-\frac{\varpi}{2}i\right)}$,

lisez $\varphi x=-\frac{i}{cc}\frac{1}{\varphi\left(x-\frac{\omega}{2}-\frac{\varpi}{2}i\right)}$.

Page 313, lignes 3 et 4, en remontant, *au lieu de* v_1 en $\theta^{-m}v_1$, *lisez* $\sqrt[n]{v_1}$ en $\theta^{-m}\sqrt[n]{v_1}$.

Page 343, ligne 10, en descendant, le numérateur du dernier facteur doit être $1-\frac{\alpha^2}{[m\omega-(\mu-\frac{1}{2})\varpi i]^2}$.

Page 357, ligne 8, en descendant, *au lieu de* $\frac{\alpha^2+\beta^2-1}{2}$; *lisez* $\alpha^2+\beta^2-1$.

Page 419, ligne 3 et 4, en descendant. Effacez les exposans 2.

Page 458, ligne 9, en remontant, *au lieu de* c', *lisez partout* c''.

Page 582, ligne 12, en remontant, *au lieu de* $y(1-c^2e^2z^2)\ldots(1-c^2e_\mu^2z^2)$,

lisez $(-1)^{\mu+1}y(1-c^2e^2z^2)\ldots(1-c^2e_\mu^2z^2)$.

Page 582, ligne 7, en remontant, *au lieu de* $\frac{(-1)^{\mu+1} c^{2\mu} e^2 e_2^2 \ldots e_\mu^2}{c^{\mu+\frac{1}{2}} \cdot c'^{-\frac{1}{2}}} y$,

lisez $\frac{c^{2\mu} e^2 e_2^2 \ldots e_\mu^2}{c^{\mu+\frac{1}{2}} c'^{-\frac{1}{2}}} y$.

Page 582, ligne 3, en remontant, *au lieu de* $\frac{(-1)^{\mu+1}}{e^2 e_2^2 \ldots e_\mu^2}$, *lisez* $\frac{1}{e\; e_2^2 \ldots e_\mu^2}$.

Page 586, ligne 5, en remontant, *au lieu de* $\frac{1}{\sqrt{\pm c}}$, *lisez* $\frac{1}{\sqrt{\mp c}}$.

Page 586, ligne 3, en remontant, *au lieu de* $\frac{2\,\Delta e_m}{\sqrt{(\mp c)}\,(1 \pm c\, e_m^2)}$, *lisez* $\frac{2\,\Delta e_m}{\sqrt{\mp c}\,(1 \pm c\, e_m^2)}$.

Page 589, ligne 3, en descendant, *au lieu de* $\frac{1 \pm \sqrt{1-c^2}}{1 \mp \sqrt{1-c^2}}$, $\frac{c \pm \sqrt{c^2-1}}{c \mp \sqrt{c^2-1}}$,

lisez $\left(\frac{1 \pm \sqrt{1-c^2}}{1 \mp \sqrt{1-c^2}}\right)^2$, $\left(\frac{c \pm \sqrt{c^2-1}}{c \mp \sqrt{c^2-1}}\right)^2$.

Page 613, ligne 9, en descendant, *au lieu de* $a_\mu = 0$, *lisez* $a_\mu = \frac{1}{0}$.

ŒUVRES

COMPLÈTES

DE NIELS HENRIK ABEL

NOUVELLE ÉDITION

PUBLIÉE AUX FRAIS DE L'ÉTAT NORVÉGIEN

PAR MM. L. SYLOW ET S. LIE

TOME SECOND

CONTENANT LES MÉMOIRES POSTHUMES D'ABEL



CHRISTIANIA

IMPRIMERIE DE GRØNDAHL & SØN

M DCCC LXXXI

TABLE DES MATIÈRES DU TOME SECOND.

I.

LES FONCTIONS TRANSCENDANTES $\Sigma\frac{1}{a^2}, \Sigma\frac{1}{a^3}, \Sigma\frac{1}{a^4}, \ldots \Sigma\frac{1}{a^n}$ EXPRIMÉES PAR DES INTÉGRALES DÉFINIES.

Si l'on différentie plusieurs fois de suite la fonction $\Sigma\frac{1}{a}$, on aura

$$\frac{d\Sigma\frac{1}{a}}{da} = \frac{\Sigma d\frac{1}{a}}{da} = -\Sigma\frac{1}{a^2},$$

$$\frac{d^2\Sigma\frac{1}{a}}{da^2} = \frac{\Sigma d^2\left(\frac{1}{a}\right)}{da^2} = +2\Sigma\frac{1}{a^3},$$

$$\frac{d^3\Sigma\frac{1}{a}}{da^3} = \frac{\Sigma d^3\left(\frac{1}{a}\right)}{da^3} = -2.3\Sigma\frac{1}{a^4},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{d^n\Sigma\frac{1}{a}}{da^n} = \frac{\Sigma d^n\left(\frac{1}{a}\right)}{da^n} = \pm 2.3.4\ldots n.\Sigma\frac{1}{a^{n+1}},$$

où le signe $+$ a lieu, lorsque n est pair, et le signe $-$, lorsque n est impair.

On en conclut réciproquement

$$\Sigma\frac{1}{a^2} = -\frac{d\Sigma\frac{1}{a}}{da},\quad \Sigma\frac{1}{a^3} = +\frac{d^2\Sigma\frac{1}{a}}{2.da^2},\quad \Sigma\frac{1}{a^4} = -\frac{d^3\Sigma\frac{1}{a}}{2.3.da^3} + \text{etc.},$$

$$\Sigma\frac{1}{a^n} = \pm\frac{d^{n-1}\Sigma\frac{1}{a}}{1.2.3\ldots(n-1)da^{n-1}} = \pm\frac{d^{n-1}L(a)}{2.3\ldots(n-1)da^{n-1}}.$$

Or on a $\Sigma\frac{1}{a} = L(a) = \int_0^1 \frac{x^{a-1}-1}{x-1}dx$. On en tire, en différentiant par rapport à a,

$$\frac{d\Sigma\frac{1}{a}}{da} = \int_0^1 \frac{x^{a-1}(lx)}{x-1}dx,$$

$$\frac{d^2\Sigma\frac{1}{a}}{da^2} = \int_0^1 \frac{x^{a-1}(lx)^2}{x-1}dx,$$

$$\frac{d^3\Sigma\frac{1}{a}}{da^3} = \int_0^1 \frac{x^{a-1}(lx)^3}{x-1}dx,$$

. . . .

$$\frac{d^{n-1}\Sigma\frac{1}{a}}{da^{n-1}} = \int_0^1 \frac{x^{a-1}(lx)^{n-1}}{x-1}dx.$$

En substituant ces valeurs, on aura

$$\Sigma\frac{1}{a^2} = -\int_0^1 \frac{x^{a-1}lx}{x-1}dx,$$

$$\Sigma\frac{1}{a^3} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^{a-1}(lx)^2}{x-1}dx,$$

$$\Sigma\frac{1}{a^4} = -\frac{1}{2.3}\int_0^1 \frac{x^{a-1}(lx)^3}{x-1}dx,$$

. . . .

$$\Sigma\frac{1}{a^{2n}} = -\frac{1}{2.3.4\ldots(2n-1)}\int_0^1 \frac{x^{a-1}(lx)^{2n-1}}{x-1}dx,$$

$$\Sigma\frac{1}{a^{2n+1}} = +\frac{1}{2.3.4\ldots2n}\int_0^1 \frac{x^{a-1}(lx)^{2n}}{x-1}dx.$$

En général, quel que soit α, on aura

$$\Sigma\frac{1}{a^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 \frac{x^{a-1}\left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1}}{x-1}dx.$$

Désignons $\Sigma\frac{1}{a^\alpha}$ par $L(a,\alpha)$, nous aurons

(1) $$L(a,\alpha)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1\frac{x^{a-1}\left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1}}{x-1}dx+C.$$

En développant $\frac{x^{a-1}}{x-1}$ en série infinie, il viendra

$$L(a,\alpha)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left[\int_0^1 x^{a-2}\left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1}dx+\int_0^1 x^{a-3}\left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1}dx\right.$$
$$\left.+\int_0^1 x^{a-4}\left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1}dx+\cdots\right];$$

or $\int_0^1 x^{a-k-1}\left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1}dx=\frac{\Gamma(\alpha)}{(a-k)^\alpha}$, par conséquent

$$L(a,\alpha)=\frac{1}{(a-1)^\alpha}+\frac{1}{(a-2)^\alpha}+\frac{1}{(a-3)^\alpha}+\cdots+C,$$

où C est une constante indépendante de a. Pour la trouver, faisons dans (1) $a=1$, ce qui donne $L(1,\alpha)=0$ et $x^{a-1}=x^0=1$; par conséquent

$$C=-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1\frac{\left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1}}{x-1}dx.$$

On tire de là

$$L(a,\alpha)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1\frac{x^{a-1}-1}{x-1}\left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1}dx,$$

où α peut être positif, négatif où zéro. On a

$$x^{a-1}=\left(\frac{1}{x}\right)^{-a+1}=1-(a-1)\left(l\frac{1}{x}\right)+\frac{(a-1)^2}{2}\cdot\left(l\frac{1}{x}\right)^2-\frac{(a-1)^3}{2.3}\left(l\frac{1}{x}\right)^3+\text{etc.}$$

Substituant cette valeur, on aura

$$L(a,\alpha)=$$
$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left\{(a-1)\int_0^1\frac{\left(l\frac{1}{x}\right)^\alpha}{1-x}dx-\frac{(a-1)^2}{2}\int_0^1\frac{\left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha+1}}{1-x}dx+\frac{(a-1)^3}{2.3}\int_0^1\frac{\left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha+2}}{1-x}dx-\cdots\right\}.$$

Considérons l'expression $\int_0^1\frac{\left(l\frac{1}{x}\right)^k}{1-x}dx$. En développant $\frac{1}{1-x}$, on aura

$$\int\frac{\left(l\frac{1}{x}\right)^k}{1-x}dx=\int\left(l\frac{1}{x}\right)^k dx+\int x\left(l\frac{1}{x}\right)^k dx+\int x^2\left(l\frac{1}{x}\right)^k dx+\cdots;$$

or $\int_0^1 x^n\left(l\frac{1}{x}\right)^k dx=\frac{\Gamma(k+1)}{(n+1)^{k+1}}$, donc

$$\int_0^1 \frac{\left(l\frac{1}{x}\right)^k}{1-x}dx = \Gamma(k+1)\left(1+\frac{1}{2^{k+1}}+\frac{1}{3^{k+1}}+\frac{1}{4^{k+1}}+\cdots\right),$$

donc enfin

$$L(a,\alpha)=\frac{(a-1).\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)}\left(1+\frac{1}{2^{\alpha+1}}+\frac{1}{3^{\alpha+1}}+\frac{1}{4^{\alpha+1}}+\cdots\right)$$
$$-\frac{(a-1)^2.\Gamma(\alpha+2)}{2.\Gamma(\alpha)}\left(1+\frac{1}{2^{\alpha+2}}+\frac{1}{3^{\alpha+2}}+\frac{1}{4^{\alpha+2}}+\cdots\right)$$
$$+\frac{(a-1)^3.\Gamma(\alpha+3)}{2.3.\Gamma(\alpha)}\left(1+\frac{1}{2^{\alpha+3}}+\frac{1}{3^{\alpha+3}}+\frac{1}{4^{\alpha+3}}+\cdots\right)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

or on a $\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)$, $\Gamma(\alpha+2)=\alpha(\alpha+1)\Gamma(\alpha)$ et en général $\Gamma(\alpha+k)$ $=\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+k-1)\Gamma(\alpha)$. Substituant ces valeurs, on obtient

$$L(a,\alpha)=\frac{a-1}{1}\alpha\left(1+\frac{1}{2^{\alpha+1}}+\frac{1}{3^{\alpha+1}}+\frac{1}{4^{\alpha+1}}+\cdots\right)$$
$$-\frac{(a-1)^2}{1.2}\alpha(\alpha+1)\left(1+\frac{1}{2^{\alpha+2}}+\frac{1}{3^{\alpha+2}}+\frac{1}{4^{\alpha+2}}+\cdots\right)$$
$$+\frac{(a-1)^3}{1.2.3}\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\left(1+\frac{1}{2^{\alpha+3}}+\frac{1}{3^{\alpha+3}}+\frac{1}{4^{\alpha+3}}+\cdots\right)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Si l'on pose a infini, on aura

$$L(\infty,\alpha)=1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\frac{1}{4^\alpha}+\cdots,$$

donc en désignant $L(\infty,\alpha)$ par $L'(\alpha)$

$$L(a,\alpha)=$$
$$\alpha.(a-1)L'(\alpha+1)-\frac{\alpha(\alpha+1)}{2}(a-1)^2L'(\alpha+2)+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{2.3}(a-1)^3L'(\alpha+3)-\cdots$$

Si dans la formule (1) on met $\frac{m}{a}$ au lieu de a, on aura

$$L\left(\frac{m}{a},\alpha\right)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1\frac{\left(x^{\frac{m}{a}-1}-1\right)\left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1}}{x-1}dx.$$

Faisant $x^{\frac{1}{a}}=y, x$ devient $=y^a$, $dx=ay^{a-1}$, $\left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1}=a^{\alpha-1}\left(l\frac{1}{y}\right)^{\alpha-1}$ et par suite

$$L\left(\frac{m}{a},\alpha\right)=\frac{a^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1\frac{(y^{m-a}-1)\left(l\frac{1}{y}\right)^{\alpha-1}y^{a-1}}{y^a-1}dy=\frac{a^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1\frac{y^{m-1}-y^{a-1}}{y^a-1}\left(l\frac{1}{y}\right)^{\alpha-1}dy.$$

On tire de là

$$L\left(\frac{m}{a}, \alpha\right) = -\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 \frac{\left(l\frac{1}{y}\right)^{\alpha-1}}{y-1}dy + \frac{a^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 \frac{y^{m-1}\left(l\frac{1}{y}\right)^{\alpha-1}}{y^a-1}dy.$$

Si maintenant $m-1<a$, ce qu'on peut supposer, la fraction $\frac{y^{m-1}}{y^a-1}$ est résoluble en fractions partielles de la forme $\frac{A}{1-cy}$. On aura donc

$$L\left(\frac{m}{a}, \alpha\right) = \left\{A\int_0^1 \frac{\left(l\frac{1}{y}\right)^{\alpha-1}}{1-cy}dy + A'\int_0^1 \frac{\left(l\frac{1}{y}\right)^{\alpha-1}}{1-c'y}dy + \cdots\right\}\frac{a^\alpha}{\Gamma(\alpha)}.$$

Si l'on développe $\frac{1}{1-cy}$ en série, on voit que

$$\int \frac{\left(l\frac{1}{y}\right)^{\alpha-1}}{1-cy}dy = \int\left(l\frac{1}{y}\right)^{\alpha-1}dy + c\int y\left(l\frac{1}{y}\right)^{\alpha-1}dy + c^2\int y^2\left(l\frac{1}{y}\right)^{\alpha-1}dy + \cdots$$

or $\int_0^1\left(l\frac{1}{y}\right)^{\alpha-1}y^k dy = \frac{\Gamma(\alpha)}{(k+1)^\alpha}$, donc

$$\int_0^1 \frac{\left(l\frac{1}{y}\right)^{\alpha-1}}{1-cy}dy = \Gamma(\alpha)\left(1+\frac{c}{2^\alpha}+\frac{c^2}{3^\alpha}+\frac{c^3}{4^\alpha}+\cdots\right);$$

donc en désignant $1+\frac{c}{2^\alpha}+\frac{c^2}{3^\alpha}+\frac{c^3}{4^\alpha}+\cdots$ par $L'(\alpha, c)$, on aura

$$\int_0^1 \frac{\left(l\frac{1}{y}\right)^{\alpha-1}}{1-cy}.dy = \Gamma(\alpha).L'(\alpha, c);$$

on obtiendra donc enfin:

$$L\left(\frac{m}{a}, \alpha\right) = a^\alpha[A.L'(\alpha, c) + A'.L'(\alpha, c') + A''.L'(\alpha, c'') + \text{etc.}].$$

La fonction $L\left(\frac{m}{a}, \alpha\right)$ peut donc, lorsque m et a sont des nombres entiers, être exprimée sous forme finie à l'aide des fonctions $\Gamma(\alpha)$ et $L'(\alpha, c)$. Soit par exemple $m=1$, $a=2$, on aura

$$L(\tfrac{1}{2}, \alpha) = \frac{2^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 \frac{1-y}{y^2-1}\left(l\frac{1}{y}\right)^{\alpha-1}dy = -\frac{2^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 \frac{\left(l\frac{1}{y}\right)^{\alpha-1}}{1+y}dy.$$

On a par conséquent $A=-1$ et $c=-1$, donc

$$L(\tfrac{1}{2}, \alpha) = -2^\alpha.L'(\alpha, -1) = -2^\alpha\left(1-\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}-\frac{1}{4^\alpha}+\cdots\right).$$

Lorsque α est un nombre entier, on sait que la somme de cette série peut s'exprimer par le nombre π ou par le logarithme de 2. Soit $\alpha = 1$, on a $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \log 2$, donc $L(\frac{1}{2}, 1) = L(\frac{1}{2}) = -2 \log 2$.

En posant $\alpha = 2$, on a $1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{12}$, donc

$$L(\tfrac{1}{2}, 2) = -\frac{\pi^2}{3}.$$

On peut en général exprimer $L(\frac{1}{2}, 2n)$ par $-M\pi^{2n}$, où M est un nombre rationnel.

II.

SUR L'INTÉGRALE DÉFINIE $\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{c-1}\left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1}dx$.

Dans les Exercices de calcul intégral de M. *Legendre* on trouve l'expression suivante

$$(1) \qquad \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{c-1}dx = \frac{\Gamma a.\Gamma c}{\Gamma(a+c)}$$

donc

$$\log \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{c-1}dx = \log \Gamma a + \log \Gamma c - \log \Gamma(a+c).$$

En différentiant par rapport à a et à c, et remarquant que

$$\frac{dl\Gamma(a)}{da} = La - C$$

on aura

$$\frac{\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{c-1}lx.dx}{\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{c-1}dx} = La - L(a+c),$$

$$\frac{\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{c-1}l(1-x).dx}{\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{c-1}dx} = Lc - L(a+c).$$

Ces deux équations combinées avec l'équation (1), donnent

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{c-1}lx.dx = [La - L(a+c)]\frac{\Gamma a.\Gamma c}{\Gamma(a+c)}$$

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{c-1}l(1-x)dx = [Lc - L(a+c)]\frac{\Gamma a \,.\, \Gamma c}{\Gamma(a+c)}.$$

La dernière équation peut aussi se déduire de l'avant-dernière en échangeant a et c entre eux, et mettant $1-x$ à la place de x.

Lorsque $c=1$, on a, à cause de $L(1+a)=\frac{1}{a}+L(a)$, et $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$,

$$\int_0^1 x^{a-1}\,lx\,.\,dx = -\frac{1}{a^2},$$

résultat connu, et

$$\int_0^1 x^{a-1}\,l(1-x)\,dx = -\frac{L(1+a)}{a},$$

donc

$$L(1+a) = -a\int_0^1 x^{a-1}l(1-x)\,dx.$$

En développant $(1-x)^{c-1}$ en série, on trouvera

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{c-1}l\left(\frac{1}{x}\right)dx = \int_0^1 x^{a-1}l\left(\frac{1}{x}\right)dx - (c-1)\int_0^1 x^a l\left(\frac{1}{x}\right)dx + \frac{(c-1)(c-2)}{2}\int_0^1 x^{a+1}l\left(\frac{1}{x}\right)dx - \cdots;$$

or $\int_0^1 x^k l\left(\frac{1}{x}\right)dx = \frac{1}{(k+1)^2}$, donc

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{c-1}l\left(\frac{1}{x}\right)dx$$

$$= \frac{1}{a^2} - (c-1)\frac{1}{(a+1)^2} + \frac{(c-1)(c-2)}{2}\cdot\frac{1}{(a+2)^2} - \frac{(c-1)(c-2)(c-3)}{2\,.\,3}\cdot\frac{1}{(a+3)^2} + \cdots;$$

mais $\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{c-1}l\left(\frac{1}{x}\right)dx = [L(a+c) - La]\frac{\Gamma a\,.\,\Gamma c}{\Gamma(a+c)}$, donc

$$(2)\quad [L(a+c) - La]\frac{\Gamma a\,.\,\Gamma c}{\Gamma(a+c)}$$

$$= \frac{1}{a^2} - (c-1)\frac{1}{(a+1)^2} + \frac{(c-1)(c-2)}{2}\cdot\frac{1}{(a+2)^2} - \frac{(c-1)(c-2)(c-3)}{2\,.\,3}\cdot\frac{1}{(a+3)^2} + \cdots.$$

Soit par exemple $c=1-a$, on a

$$L(a+c) - La = -La,\quad \Gamma(a+c)=1,$$

$$\Gamma a\,.\,\Gamma c = \Gamma a\,.\,\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi};$$

donc

$$-La\cdot\frac{\pi}{\sin a\pi}=\frac{1}{a^2}+\frac{a}{(a+1)^2}+\frac{a(a+1)}{2(a+2)^2}+\frac{a(a+1)(a+2)}{2.3.(a+3)^2}+\dots.$$

Soit $a=\frac{1}{2}$, on a $-La=2\log 2$, $\sin\frac{\pi}{2}=1$, donc

$$2\pi\log 2=2^2+\frac{2}{3^2}+\frac{3}{2.5^2}+\frac{3.5}{2^2.3.7^2}+\frac{3.5.7}{2^3.3.4.9^2}+\dots.$$

Soit $a=1-x$, $c=2x-1$, on aura en remarquant que $L(1-x)-Lx=\pi\cot\pi x$,

$$-\pi.\cot\pi x\cdot\frac{\Gamma(1-x).\Gamma(2x-1)}{\Gamma x}$$
$$=\frac{1}{(1-x)^2}-\frac{2x-2}{(2-x)^2}+\frac{(2x-2)(2x-3)}{2(3-x)^2}-\frac{(2x-2)(2x-3)(2x-4)}{2.3.(4-x)^2}+\dots.$$

En échangeant a et c entre eux dans l'équation (2), on obtient

$$[L(a+c)-Lc]\frac{\Gamma a.\Gamma c}{\Gamma(a+c)}=\frac{1}{c^2}-(a-1)\frac{1}{(c+1)^2}+\frac{(a-1)(a-2)}{2(c+2)^2}-\dots.$$

En divisant l'équation (2) par celle-ci membre à membre, on aura

$$\frac{L(a+c)-L(a)}{L(a+c)-L(c)}=\frac{\frac{1}{a^2}-\frac{c-1}{(a+1)^2}+\frac{(c-1)(c-2)}{2(a+2)^2}-\dots}{\frac{1}{c^2}-\frac{a-1}{(c+1)^2}+\frac{(a-1)(a-2)}{2(c+2)^2}-\dots}.$$

De cette équation on tirera, en y faisant $c=1$,

$$L(1+a)=a-\frac{a(a-1)}{2^2}+\frac{a(a-1)(a-2)}{2.3^2}-\dots,$$

donc en écrivant $-a$ pour a,

$$L(1-a)=-\left(a+\frac{a(a+1)}{2^2}+\frac{a(a+1)(a+2)}{2.3^2}+\dots\right),$$

et en mettant $a-1$ au lieu de a,

$$La=(a-1)-\frac{(a-1)(a-2)}{2^2}+\frac{(a-1)(a-2)(a-3)}{2.3^2}-\dots;$$

on tire de là

$$L(1-a)-La=\pi.\cot\pi a$$
$$=-\left(2a-1+\frac{a(a+1)-(a-1)(a-2)}{2^2}+\frac{a(a+1)(a+2)+(a-1)(a-2)(a-3)}{2.3^2}+\dots\right).$$

Si dans l'équation (2) on pose $a=1$, on aura

$$[L(c+1)-L(1)]\frac{\Gamma(1).\Gamma c}{\Gamma(c+1)}=\frac{L(1+c)}{c}=1-\frac{(c-1)}{2^2}+\frac{(c-1)(c-2)}{2.3^2}-\dots$$

comme auparavant. En faisant $c=0$, il vient

$$\frac{L(1)}{0}=\frac{0}{0}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}.$$

Nous avons vu que

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{c-1}l\left(\frac{1}{x}\right)dx=[L(a+c)-La]\frac{\Gamma a.\Gamma c}{\Gamma(a+c)}.$$

En différentiant cette équation logarithmiquement, il viendra

$$\frac{\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{c-1}\left(l\frac{1}{x}\right)^2dx}{\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{c-1}l\left(\frac{1}{x}\right)dx}=-\frac{\frac{dL(a+c)}{da}-\frac{dL(a)}{da}}{L(a+c)-La}+L(a+c)-L(a).$$

Or on a $\frac{dLa}{da}=-\Sigma\frac{1}{a^2}$; soit $\Sigma\frac{1}{a^2}=L'(a)$, on aura

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{c-1}\left(l\frac{1}{x}\right)^2.dx$$
$$=[(L'(a+c)-L'a)+(L(a+c)-La)^2]\frac{\Gamma a.\Gamma c}{\Gamma(a+c)}.$$

Si l'on désigne $\Sigma\frac{1}{a^3}$ par $L''a$, $L\frac{1}{a^4}$ par $L'''a$ etc., on obtiendra par des différentiations répétées

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{c-1}\left(l\frac{1}{x}\right)^3dx=[2(L''(a+c)-L''a)+$$
$$3(L'(a+c)-L'a)(L(a+c)-La)+(L(a+c)-La)^3]\frac{\Gamma a.\Gamma c}{\Gamma(a+c)}.$$
$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{c-1}\left(l\frac{1}{x}\right)^4dx=\text{etc.}$$

En différentiant l'équation (2) par rapport à a, on aura

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{c-1}\left(l\frac{1}{x}\right)^2dx$$
$$=2\left(\frac{1}{a^3}-\frac{c-1}{1}\cdot\frac{1}{(a+1)^3}+\frac{(c-1)(c-2)}{1.2}\cdot\frac{1}{(a+2)^3}-\frac{(c-1)(c-2)(c-3)}{1.2.3}\cdot\frac{1}{(a+3)^3}+\cdots\right),$$
$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{c-1}\left(l\frac{1}{x}\right)^3dx$$
$$=2.3\left(\frac{1}{a^4}-\frac{c-1}{1}\cdot\frac{1}{(a+1)^4}+\frac{(c-1)(c-2)}{1.2}\cdot\frac{1}{(a+2)^4}-\frac{(c-1)(c-2)(c-3)}{1.2.3}\cdot\frac{1}{(a+3)^4}+\cdots\right),$$

et en général

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{c-1}\left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1}dx$$

$$=\Gamma\alpha\left(\frac{1}{a^\alpha}-\frac{c-1}{1}\cdot\frac{1}{(a+1)^\alpha}+\frac{(c-1)(c-2)}{1.2}\cdot\frac{1}{(a+2)^\alpha}-\frac{(c-1)(c-2)(c-3)}{1.2.3}\cdot\frac{1}{(a+3)^\alpha}+\cdots\right).$$

Or la fonction $\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{c-1}\left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1}dx$ est exprimable par les fonctions Γ, L, L', L'', ... $L^{(\alpha-1)}$, donc la somme de la série infinie

$$\frac{1}{a^\alpha}-\frac{c-1}{1}\cdot\frac{1}{(a+1)^\alpha}+\frac{(c-1)(c-2)}{1.2}\cdot\frac{1}{(a+2)^\alpha}-\cdots$$

est exprimable par ces mêmes fonctions.

Il y a encore d'autres intégrales qui peuvent s'exprimer par les mêmes fonctions. En effet, soit

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{c-1}\left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1}dx=\varphi(a,c),$$

on obtiendra par des différentiations successives par rapport à c,

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{c-1}l(1-x)\left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1}dx=\varphi' c,$$

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{c-1}[l(1-x)]^2\left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1}dx=\varphi'' c,$$

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{c-1}[l(1-x)]^3\left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1}dx=\varphi''' c,$$

et en général

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{c-1}[l(1-x)]^{\beta-1}\left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1}dx=\varphi^{(\beta-1)} c.$$

Or on a $\varphi(a,c)=(-1)^{\alpha-1}\dfrac{d^{\alpha-1}\frac{\Gamma a\,.\,\Gamma c}{\Gamma(a+c)}}{da^{\alpha-1}}$, donc en substituant cette valeur, on obtiendra l'expression générale suivante,

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{c-1}[l(1-x)]^n(lx)^m\,dx=\frac{d^{m+n}\frac{\Gamma a\,.\,\Gamma c}{\Gamma(a+c)}}{da^m\,.\,dc^n},$$

et cette fonction est, comme nous venons de le voir, exprimable par les fonctions Γ, L, L', L'', ... $L^{(n-1)}$ ... $L^{(m-1)}$.

On sait que

$$\text{(A)} \qquad \int_0^1 \left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1} dx = \Gamma\alpha.$$

En différentiant par rapport à α on aura

$$\int_0^1 \left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1} ll\left(\frac{1}{x}\right) dx = \frac{d\,\Gamma\alpha}{d\alpha} = \frac{\frac{d\,\Gamma\alpha}{\Gamma\alpha}\,\Gamma\alpha}{d\alpha} = \Gamma\alpha\,.\,\frac{dl\,\Gamma\alpha}{d\alpha},$$

or $\frac{dl\,\Gamma\alpha}{d\alpha} = L\alpha - C$, donc

$$\int_0^1 \left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1} ll\left(\frac{1}{x}\right) dx = \Gamma\alpha\,.\,(L\alpha - C);$$

en différentiant encore, on aura

$$\int_0^1 \left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1} \left(ll\frac{1}{x}\right)^2 dx = \Gamma\alpha\left[(L\alpha - C)^2 - L'\alpha)\right].$$

Une expression générale pour la fonction

$$\int_0^1 \left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1} \left(ll\frac{1}{x}\right)^n dx$$

peut se trouver aisément comme il suit. En différentiant l'équation (A) n fois de suite, on aura:

$$\int_0^1 \left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1} \left(ll\frac{1}{x}\right)^n dx = \frac{d^n\,\Gamma\alpha}{d\alpha^n}.$$

or $\frac{dl\,\Gamma\alpha}{d\alpha} = L\alpha - C$, donc

$$l\,\Gamma\alpha = \int (L\alpha - C)\,d\alpha \quad \text{et} \quad \Gamma\alpha = e^{\int (L\alpha - C)\,d\alpha},$$

donc

$$\int_0^1 \left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1} \left(ll\frac{1}{x}\right)^n dx = \frac{d^n e^{\int (L\alpha - C)\,d\alpha}}{d\alpha^n},$$

fonction qui est exprimable par les fonctions Γ, L, L', L'' . . . L^{n-1}.

Si l'on met e^y à la place de x, on a $l\frac{1}{x} = -y$, $ll\frac{1}{x} = l(-y)$, $dx = e^y\,dy$; donc

$$\int_{-\infty}^0 (-y)^{\alpha-1}\left[l(-y)\right]^n e^y\,dy = \frac{d^n e^{\int (L\alpha - C)\,d\alpha}}{d\alpha^n},$$

ou en changeant y en $-y$

$$\int_\infty^0 y^{\alpha-1}(ly)^n e^{-y}\,dy = -\frac{d^n e^{\int (L\alpha - C)\,d\alpha}}{d\alpha^n},$$

Faisant $y = z^{\frac{1}{\alpha}}$, on a $y^{\alpha-1}dy = \frac{1}{\alpha}d(y)^\alpha = \frac{1}{\alpha}dz$, $ly = \frac{1}{\alpha}lz$, $e^{-y} = e^{-\left(z^{\frac{1}{\alpha}}\right)}$, et par suite

$$\int_0^\infty (lz)^n e^{-\left(z^{\frac{1}{\alpha}}\right)} dz = \alpha^{n+1} \frac{d^n e^{\int (L\alpha - C)\, d\alpha}}{d\alpha^n}.$$

Si l'on met α au lieu de $\frac{1}{\alpha}$, on aura en posant $n = 0$,

$$\int_0^\infty e^{-x^\alpha}.\, dx = \frac{1}{\alpha}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right);$$

en posant $n = 1$,

$$\int_0^\infty l\left(\frac{1}{x}\right) e^{-x^\alpha} dx = -\frac{1}{\alpha^2}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)\left[L\left(\frac{1}{\alpha}\right) - C\right].$$

Si par exemple $\alpha = 2$, on aura

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \tfrac{1}{2}\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi} \quad \text{et} \quad \int_0^\infty l\left(\frac{1}{x}\right) e^{-x^2} dx = \tfrac{1}{4}\sqrt{\pi}(C + 2\log 2),$$

en remarquant que $L(\frac{1}{2}) = -2\log 2$. Il faut se rappeler que la constante C est égale à 0,57721566...

Si dans l'équation (A) on pose $x = y^n$, on trouvera

$$\int_0^1 y^{n-1}\left(l\frac{1}{y}\right)^{\alpha-1} dy = \frac{\Gamma\alpha}{n^\alpha}, \text{ lorsque } n \text{ est positif,}$$

$$\int_\infty^1 y^{n-1}\left(l\frac{1}{y}\right)^{\alpha-1} dy = \frac{\Gamma\alpha}{n^\alpha}, \text{ lorsque } n \text{ est négatif.}$$

En différentiant cette équation par rapport à α, on aura, lorsque n est positif,

$$\int_0^1 y^{n-1}\left(l\frac{1}{y}\right)^{\alpha-1} ll\left(\frac{1}{y}\right) dy = \frac{\Gamma\alpha}{n^\alpha}(L\alpha - C - \log n).$$

Soit $y = e^{-x}$, on trouvera

$$\int_0^\infty e^{-nx} x^{\alpha-1} lx.\, dx = \frac{\Gamma\alpha}{n^\alpha}(L\alpha - C - \log n),$$

résultat qu'on peut aussi déduire aisément de l'équation

$$\int_0^\infty e^{-x^\alpha} l\left(\frac{1}{x}\right) dx = -\frac{1}{\alpha^2}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)\left[L\left(\frac{1}{\alpha}\right) - C\right].$$

III.

SOMMATION DE LA SÉRIE $y=\varphi(0)+\varphi(1)x+\varphi(2)x^2+\varphi(3)x^3+\cdots+\varphi(n)x^n$, n ÉTANT UN NOMBRE ENTIER POSITIF FINI OU INFINI, ET $\varphi(n)$ UNE FONCTION ALGÉBRIQUE RATIONELLE DE n.

La fonction $\varphi(n)$ étant algébrique et rationnelle, elle est résoluble en termes de la forme An^α et $\frac{B}{(a+n)^\beta}$; y est donc résoluble en plusieurs séries de la forme

$$p=A.0^\alpha+Ax+A.2^\alpha x^2+A.3^\alpha x^3+\cdots+An^\alpha x^n \text{ et}$$

$$q=\frac{B}{a^\beta}+\frac{Bx}{(a+1)^\beta}+\frac{Bx^2}{(a+2)^\beta}+\frac{Bx^3}{(a+3)^\beta}+\cdots+\frac{Bx^n}{(a+n)^\beta}.$$

La sommation de la série proposée est donc réduite à la sommation de ces deux séries.

Considérons d'abord la quantité p. $A.0^\alpha$ étant une quantité constante et A facteur de chaque terme de la série, nous poserons

$$\frac{p-A.0^\alpha}{A}=f(\alpha,x).$$

On a donc

$$f(\alpha,x)=x+2^\alpha x^2+3^\alpha x^3+4^\alpha x^4+\cdots+n^\alpha x^n;$$

divisant par x, on a

$$\frac{f(\alpha,x)}{x}=1+2^\alpha x+3^\alpha x^2+\ldots+n^\alpha x^{n-1};$$

en multipliant par dx et intégrant, il vient

$$\int\frac{f(\alpha,x)}{x}dx=x+2^{\alpha-1}x^2+3^{\alpha-1}x^3+\cdots+n^{\alpha-1}x^n;$$

en comparant cette série à la précédente, on voit que

$$\int\frac{f(\alpha,x)}{x}dx=f(\alpha-1,x);$$

différentiant et multipliant par x, on tire de là

$$f(\alpha,x)=\frac{x\,.\,df(\alpha-1,x)}{dx},$$

ou en écrivant $f\alpha$ au lieu de $f(\alpha,x)$,

$$f\alpha=\frac{x\,.\,df(\alpha-1)}{dx}.$$

Connaissant la valeur de $f(\alpha-1)$, on peut en déduire celle de $f(\alpha)$.

Mettant $\alpha-1$ au lieu de α, on aura

$$f(\alpha-1)=\frac{x\,.\,df(\alpha-2)}{dx};$$

en substituant cette valeur dans l'équation précédente, il vient

$$f\alpha=\frac{x\,.\,d[x\,.\,df(\alpha-2)]}{dx^2};$$

mettant de plus $\alpha-2$, $\alpha-3$ etc. au lieu de α, on obtient

$$f(\alpha-2)=\frac{x\,.\,df(\alpha-3)}{dx},$$

$$f(\alpha-3)=\frac{x\,.\,df(\alpha-4)}{dx},$$

$$f(\alpha-4)=\frac{x\,.\,df(\alpha-5)}{dx},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f(2)=\frac{x\,.\,df(1)}{dx},$$

$$f(1)=\frac{x\,.\,df(0)}{dx}.$$

Substituant ces valeurs on trouve

$$f\alpha=\frac{x\,.\,d(x\,.\,d(x\,\ldots d(x\,.\,df(0)\ldots)))}{dx^\alpha}.$$

On a ainsi la fonction $f\alpha$ déterminée par la fonction $f(0)$. Or on a

$$f(0)=x+x^2+x^3+x^4+\cdots+x^n=\frac{x(1-x^n)}{1-x},$$

donc

$$f(\alpha) = x + 2^\alpha x^2 + 3^\alpha x^3 + \cdots + n^\alpha x^n = \frac{x\,.\,d\left(x\,.\,d\left(x\ldots d\frac{x(1-x^n)}{1-x}\cdots\right)\right)}{dx^\alpha}.$$

On connaît ainsi la fonction $f(\alpha)$, et par suite on connaît de même la fonction p. Si la suite va à l'infini, on a $f(0) = \frac{x}{1-x}$, et par conséquent

$$x + 2^\alpha x^2 + 3^\alpha x^3 + 4^\alpha x^4 + \cdots = \frac{x\,.\,d\left(x\,.\,d\left(x\ldots d\frac{x}{1-x}\cdots\right)\right)}{dx^\alpha}.$$

En faisant successivement $\alpha = 0, 1, 2, 3$ etc., on aura

$$x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots = \frac{x}{1-x}$$

$$x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \cdots = \frac{x\,.\,d\frac{x}{1-x}}{dx} = \frac{x}{(1-x)^2}$$

$$x + 2^2x^2 + 3^2x^3 + 4^2x^4 + \cdots = \frac{x\,.\,d\left(x\,.\,d\frac{x}{1-x}\right)}{dx^2} = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}.$$

. . . .

Considérons ensuite l'autre série, savoir

$$F\alpha = \frac{1}{a^\alpha} + \frac{x}{(a+1)^\alpha} + \frac{x^2}{(a+2)^\alpha} + \frac{x^3}{(a+3)^\alpha} + \cdots + \frac{x^n}{(a+n)^\alpha};$$

en multipliant par x^a et différentiant, on aura

$$\frac{d(F\alpha\,.\,x^a)}{dx} = \frac{x^{a-1}}{a^{\alpha-1}} + \frac{x^a}{(a+1)^{\alpha-1}} + \frac{x^{a+1}}{(a+2)^{\alpha-1}} + \cdots + \frac{x^{n+a-1}}{(a+n)^{\alpha-1}};$$

ou bien

$$\frac{d(F\alpha\,.\,x^a)}{dx} = x^{a-1}\left(\frac{1}{a^{\alpha-1}} + \frac{x}{(a+1)^{\alpha-1}} + \frac{x^2}{(a+2)^{\alpha-1}} + \cdots + \frac{x^n}{(a+n)^{\alpha-1}}\right).$$

On voit par là que

$$\frac{d(F\alpha\,.\,x^a)}{dx} = x^{a-1}F(\alpha-1);$$

en multipliant par dx et intégrant, on obtient

$$F\alpha = \frac{\int dx\,.\,x^{a-1}F(\alpha-1)}{x^a}.$$

On peut donc déterminer $F\alpha$ par $F(\alpha-1)$.

En mettant maintenant $\alpha-1$, $\alpha-2$, etc. au lieu de α, on aura

$$F(\alpha-1) = \frac{\int dx\,.\,x^{a-1}F(\alpha-2)}{x^a}.$$

$$F(\alpha-2)=\frac{\int dx\,.\,x^{\alpha-1}F(\alpha-3)}{x^\alpha},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$F(2)=\frac{\int dx\,.\,x^{\alpha-1}F(1)}{x^\alpha},$$

$$F(1)=\frac{\int dx\,.\,x^{\alpha-1}F(0)}{x^\alpha}.$$

On peut donc déterminer $F(\alpha)$ par $F(0)$, car on aura par substitution:

$$F(\alpha)=\frac{1}{x^\alpha}\int\frac{dx}{x}\int\frac{dx}{x}\int\frac{dx}{x}\cdots\int\frac{dx}{x}\int\frac{dx}{x}\int dx\,.\,x^{\alpha-1}F(0),$$

or $F(0)=1+x+x^2+\cdots+x^n=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$, donc

$$F\alpha=\frac{1}{x^\alpha}\int\frac{dx}{x}\int\frac{dx}{x}\cdots\int\frac{dx}{x}\int\frac{dx\,.\,(x^{\alpha-1}-x^{n+\alpha})}{1-x}.$$

Si la série va à l'infini, on a $F(0)=\frac{1}{1-x}$, et par suite

$$F\alpha=\frac{1}{x^\alpha}\int\frac{dx}{x}\int\frac{dx}{x}\cdots\int\frac{dx}{x}\int dx\,\frac{x^{\alpha-1}}{1-x}.$$

Les quantités constantes dues aux intégrations successives doivent être des valeurs particulières des fonctions $F(0), F(1), F(2)\ldots F(\alpha)$.

Ayant ainsi déterminé les fonctions $f\alpha$ et $F\alpha$, on en tirera aisément la somme de la série proposée

$$\varphi(0)+\varphi(1)x+\varphi(2)x^2+\varphi(3)x^3+\cdots+\varphi(n)x^n.$$

Le procédé dont on a fait usage pour trouver la somme de cette série à l'aide de la série $1+x+x^2+\cdots+x^n$, peut aussi servir à la détermination de la somme de la série

$$z=f(0)\varphi(0)+f(1)\varphi(1)x+f(2)\varphi(2)x^2+\cdots+f(n)\varphi(n)x^n$$

à l'aide de la série

$$f(0)+f(1)x+f(2)x^2+\cdots+f(n)x^n,$$

où fn désigne une fonction quelconque, et φn une fonction rationnelle. En effet la série z est résoluble en plusieurs séries de la forme

$$A(f(1)x+2^\alpha f(2)x^2+3^\alpha f(3)x^3+\cdots+n^\alpha f(n)x^n),\ \text{et}$$

$$A'\left(\frac{f(0)}{a^\alpha}+\frac{f(1)x}{(a+1)^\alpha}+\frac{f(2)x^2}{(a+2)^\alpha}+\cdots+\frac{f(n)x^n}{(a+n)^\alpha}\right).$$

Si l'on pose $f(0) + f(1)x + f(2)x^2 + \cdots + f(n)x^n = s$, on trouvera précisément de la même manière que ci-dessus:

$$f(1)x + 2^a f(2)x^2 + 3^a f(3)x^3 + \cdots + n^a f(n)x^n = \frac{x\,.\,d(x\,.\,d(x\ldots d(x\,.\,ds)))}{dx^a}$$

$$\frac{f(0)}{a^a} + \frac{f(1)}{(a+1)^a}\cdot x + \frac{f(2)}{(a+2)^a}\cdot x^2 + \cdots + \frac{f(n)}{(a+n)^a}\cdot x^n$$

$$= \frac{1}{x^a}\int\frac{dx}{x}\int\frac{dx}{x}\cdots\int\frac{dx}{x}\int dx\,.\,x^{a-1}.\,s.$$

Soit par exemple $s = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2\,.\,3} + \frac{x^4}{2\,.\,3\,.\,4} + \cdots,$

on aura

$$\frac{1}{a} + \frac{x}{a+1} + \frac{1}{2}\,\frac{x^2}{a+2} + \frac{1}{2\,.\,3}\,\frac{x^3}{a+3} + \cdots = \frac{1}{x^a}\int dx\,.\,x^{a-1}e^x$$

$$= \frac{e^x}{x}\left(1 - \frac{(a-1)}{x} + \frac{(a-1)(a-2)}{x^2} - \frac{(a-1)(a-2)(a-3)}{x^3} + \cdots\right) + \frac{c}{x^a}.$$

IV.

SUR L'EQUATION DIFFÉRENTIELLE $dy+(p+qy+ry^2)dx=0$, OÙ p, q ET r SONT DES FONCTIONS DE x SEUL.

On peut toujours réduire l'équation $dy+(p+qy+ry^2)\,dx=0$, à une autre de la forme

$$dy+(P+Qy^2)\,dx=0.$$

Première méthode. Soit $y=z+r'$, on aura

$$dz+dr'+(p+qr'+r'^2r)\,dx+z(q+2rr')\,dx+rz^2\,dx=0.$$

Pour que le terme multiplié par z disparaisse, il faut poser $q+2rr'=0$, d'où l'on tire $r'=-\frac{q}{2r}$. Cette valeur étant substituée pour r', donne

(1) $$dz+\left(p-\frac{q^2}{4r}-\frac{dq}{dx}\frac{1}{2r}+\frac{dr}{dx}\frac{q}{2r^2}+rz^2\right)dx=0;$$

donc

$$dz+(P+Qz^2)\,dx=0,$$

où $P=p-\frac{q^2}{4r}-\frac{dq}{dx}\frac{1}{2r}+\frac{dr}{dx}\frac{q}{2r^2}$ et $Q=r$.

Seconde méthode. Soit $y=zr'$ et par conséquent $dy=r'dz+zdr'$, on aura

$$r'dz+p\,dx+z\,(dr'+r'q\,dx)+z^2r'^2r\,dx=0.$$

Pour que z s'évanouisse, on fera $dr'+r'q\,dx=0$, d'où l'on tire

$$r'=e^{-\int q\,dx}.$$

3*

En substituant cette valeur pour r' on aura

(2) $$dz+(p\,e^{\int q dx}+r\,e^{-\int q dx}z^2)\,dx=0.$$

Si donc on peut résoudre les équations (1) ou (2), on peut aussi résoudre la proposée, et réciproquement.

L'équation (2) est résoluble dans le cas où l'on a

$$p\,e^{\int q dx}=ar\,e^{-\int q dx};$$

car on a alors

$$\frac{dz}{a+z^2}=-\frac{p}{a}\,e^{\int q dx}\,dx;$$

donc

$$\text{arc tang}\,\frac{z}{\sqrt{a}}=-\frac{1}{\sqrt{a}}\int p\,dx\,e^{\int q dx};$$

et de là

$$z=-\sqrt{a}\,\text{tang}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\int p\,dx\,e^{\int q dx}\right);$$

mais $y=zr'=z\,e^{-\int q dx}$; donc

$$y=-\sqrt{a}\,.\,e^{-\int q dx}\,\text{tang}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\int e^{\int q dx}p\,dx\right);$$

maintenant $pe^{\int q dx}=ar\,e^{-\int q dx}$; donc

$$e^{2\int q dx}=\frac{ar}{p},\quad e^{\int q dx}=\sqrt{\frac{ar}{p}},$$

$$\int q dx=\tfrac{1}{2}\log\frac{ar}{p},\quad q dx=\tfrac{1}{2}\frac{dr}{r}-\tfrac{1}{2}\frac{dp}{p},\quad q=\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{dr}{dx}-\frac{1}{p}\frac{dp}{dx}\right).$$

L'équation $dy+(p+qy+ry^2)\,dx=0$, deviendra donc

$$dy+\left[p+\tfrac{1}{2}\left(\frac{dr}{rdx}-\frac{dp}{pdx}\right)y+ry^2\right]dx=0,$$

et son intégrale sera

$$y=-\sqrt{\frac{p}{r}}\,\text{tang}\left(\int\sqrt{rp}\,dx\right),$$

ou bien, en mettant pour la tangente son expression exponentielle;

$$y=\sqrt{-\frac{p}{r}}\cdot\frac{1-e^{2\int dx\sqrt{-pr}}}{1+e^{2\int dx\sqrt{-pr}}}.$$

Soit par exemple $p=-r=\frac{1}{x}$, on aura

$$dy+\left(\frac{1}{x}-\frac{y^2}{x}\right)dx=0,$$

$$y=\frac{1-e^{2\int\frac{dx}{x}}}{1+e^{2\int\frac{dx}{x}}}=\frac{1-cx^2}{1+cx^2}.$$

En supposant $p=x^m$ et $r=x^n$, on aura $\frac{dr}{rdx}=\frac{n}{x}$ et $\frac{dp}{pdx}=\frac{m}{x}$,

donc $\sqrt{\frac{p}{r}}=x^{\frac{m-n}{2}}$, $\int dx\sqrt{pr}=\int x^{\frac{m+n}{2}}dx=c+\frac{2}{m+n+2}x^{\frac{1}{2}(m+n+2)}$;

$$dy+\left(x^m+\tfrac{1}{2}(n-m)\frac{y}{x}+x^ny^2\right)dx=0,$$

$$y=-x^{\frac{m-n}{2}}\operatorname{tang}\left(c+\frac{2}{m+n+2}x^{\frac{1}{2}(m+n+2)}\right).$$

Soit $n=-m-2$, on aura

$$dy+\left(x^m-(m+1)\frac{y}{x}+\frac{y^2}{x^{m+2}}\right)dx=0,$$

$$y=-x^{m+1}\operatorname{tang}(k+\log x)=-x^{m+1}\operatorname{tang}(\log k'x),$$

d'où l'on tire

$$k'x=e^{-\operatorname{arc\,tang}(y\,x^{-m-1})}.$$

Si dans l'équation (2) on met $-\frac{1}{z}$ à la place de z, on aura

$$dz+(r\,e^{-\int qdx}+p\,e^{\int qdx}z^2)\,dx=0,$$

et puisque $y=-\frac{1}{z}e^{-\int qdx}$, on a

$$dy+(p+qy+ry^2)\,dx=0.$$

Lorsque $p=0$, on a $dy+(qy+ry^2)\,dx=0$,

$$dz=-r\,.\,e^{-\int qdx}dx,\quad z=-\int re^{-\int qdx}dx,$$

$$y=\frac{1}{e^{\int qdx}\int e^{-\int qdx}r\,dx}.$$

Telle est donc l'intégrale de l'équation

$$dy+(qy+ry^2)\,dx=0.$$

Si dans l'équation proposée on fait $\frac{p}{c}=\frac{q}{2a}=r$, on obtient

$$c\,dy+(c+2ay+y^2)p\,dx=0,$$

donc

$$\int\frac{c\,dy}{c+2ay+y^2}=-\int p\,dx,$$

or $\dfrac{dy}{y^2+2ay+c}=\dfrac{1}{2\sqrt{a^2-c}}\left(\dfrac{dy}{y+a-\sqrt{a^2-c}}-\dfrac{dy}{y+a+\sqrt{a^2-c}}\right)$; donc

$$-\int p\,dx=\frac{c}{2\sqrt{a^2-c}}\left[\log\left(y+a-\sqrt{a^2-c}\right)-\log\left(y+a+\sqrt{a^2-c}\right)\right],$$

ou bien

$$-\int p\,dx=\log\left(\frac{y+a-\sqrt{a^2-c}}{y+a+\sqrt{a^2-c}}\right)^{\frac{c}{2\sqrt{a^2-c}}},$$

et de là

$$\frac{y+a-\sqrt{a^2-c}}{y+a+\sqrt{a^2-c}}=e^{\frac{2}{c}\sqrt{a^2-c}\int p\,dx},$$

$$y=-a+\sqrt{a^2-c}\,\frac{1+e^{\frac{2}{c}\sqrt{a^2-c}\int p\,dx}}{1-e^{\frac{2}{c}\sqrt{a^2-c}\int p\,dx}}.$$

Dans ce cas, l'équation (2) devient

$$c\,dz+\left(ce^{\frac{2a}{c}\int p\,dx}+e^{-\frac{2a}{c}\int p\,dx}z^2\right)p\,dx=0;$$

mais on a

$$z=\frac{y}{r'}=y\,e^{\int q\,dx}=y\,e^{\frac{2a}{c}\int p\,dx};$$

donc on aura

$$z=e^{\frac{2a}{c}\int p\,dx}\left\{-a+\sqrt{a^2-c}\,\frac{1+e^{\frac{2}{c}\sqrt{a^2-c}\int p\,dx}}{1-e^{\frac{2}{c}\sqrt{a^2-c}\int p\,dx}}\right\}.$$

Si l'on fait $p=1$, ce qui ne diminue pas la généralité, on a $\int p\,dx=x+k$, et par là

$$c\,dz+\left(c\,e^{\frac{2a}{c}(x+k)}+e^{-\frac{2a}{c}(x+k)}z^2\right)dx=0;$$

$$z=e^{\frac{2a}{c}(x+k)}\left\{-a+\sqrt{a^2-c}\,\frac{1+e^{\frac{2}{c}(x+k)\sqrt{a^2-c}}}{1-e^{\frac{2}{c}(x+k)\sqrt{a^2-c}}}\right\}.$$

Lorsqu'on connaît une valeur de y qui satisfait à l'équation

$$dy+(p+qy+ry^2)\,dx=0,$$

on pourra aisément trouver l'intégrale complète. Soit y' cette valeur particulière. On fera $y = y' + z$, et on aura

$$dz + dy' + (p + qy' + ry'^2)\,dx + [z(q + 2ry') + rz^2]\,dx = 0.$$

Or par l'hypothèse on a $dy' + (p + qy' + ry'^2)\,dx = 0$; donc

$$dz + [(q + 2ry')z + rz^2]\,dx = 0,$$

d'où l'on tire en intégrant

$$z = \frac{1}{e^{\int (q+2ry')\,dx} \int e^{-\int (q+2ry')\,dx}\, r\,dx};$$

mais $y = z + y'$, donc

$$y = y' + \frac{e^{-\int (q+2ry')\,dx}}{\int e^{-\int (q+2ry')\,dx}\, r\,dx}.$$

Soit par exemple

$$dy + \left(\frac{1}{x^2} + \frac{ay}{x} + cy^2\right) dx = 0.$$

Faisant $y = \frac{b}{x}$ on trouvera

$$-b + 1 + ab + cb^2 = 0,$$

et de là

$$b = -\frac{a-1}{2c} \pm \sqrt{\left(\frac{a-1}{2c}\right)^2 - \frac{1}{c}};$$

donc $y' = \left\{\frac{1-a}{2c} \pm \sqrt{\left(\frac{1-a}{2c}\right)^2 - \frac{1}{c}}\right\}\frac{1}{x}$ est une intégrale particulière, et comme on a $q = \frac{a}{x}$, $r = c$, l'intégrale complète de l'équation proposée est

$$y = \left\{\frac{1-a}{2c} \pm \sqrt{\left(\frac{1-a}{2c}\right)^2 - \frac{1}{c}}\right\}\frac{1}{x} + \frac{e^{-\{1 \pm \sqrt{(1-a)^2 4 - c}\}\int \frac{dx}{x}}}{c\int dx\, e^{-\{1 \pm \sqrt{(1-a)^2 4 - c}\}\int \frac{dx}{x}}},$$

et en effectuant les intégrations,

$$y = \left\{\frac{1-a}{2c} \pm \sqrt{\left(\frac{1-a}{2c}\right)^2 - \frac{1}{c}}\right\}\frac{1}{x} + \frac{k\,x^{-\{1 \pm \sqrt{(1-a)^2 - 4c}\}}}{C \pm \frac{ck}{\sqrt{(1-a)^2 - 4c}}\, x^{\mp \sqrt{(1-a)^2 - 4c}}},$$

où k et C sont les constantes arbitraires dues aux intégrations.

Quoiqu'on puisse, comme on vient de le voir, résoudre plusieurs cas en employant des substitutions convenables, il semble pourtant plus commode pour l'intégration des équations différentielles de chercher le facteur par lequel l'é-

quation doit être multipliée pour devenir intégrable. Soit z ce facteur, de sorte que l'équation

$$zdy + z(p + qy^2)\,dx = 0$$

soit une différentielle complète. On doit avoir, comme on sait,

$$\frac{dz}{dx} = \frac{d[z(p + qy^2)]}{dy},$$

et en effectuant la différentiation,

$$\frac{dz}{dx} = (p + qy^2)\frac{dz}{dy} + 2qyz.$$

Soit $z = e^r$, on aura

$$\frac{dr}{dx} = (p + qy^2)\frac{dr}{dy} + 2qy.$$

Quoique cette équation en général ne soit pas moins difficile à résoudre que la proposée, elle peut néanmoins servir à découvrir plusieurs cas particuliers dans lesquels celle-ci est résoluble.

Supposons par exemple que $r = a\log(\alpha + \beta y)$, où a est une quantité constante, et α et β des fonctions de x seul. En substituant cette valeur de r on obtiendra

$$\frac{a\alpha' + a\beta' y}{\alpha + \beta y} - \frac{a\beta(p + qy^2)}{\alpha + \beta y} - 2qy = 0,$$

où $\alpha' = \frac{d\alpha}{dx}$ et $\beta' = \frac{d\beta}{dx}$. En multipliant par $\alpha + \beta y$ on aura

$$a\alpha' - a\beta p + (a\beta' - 2\alpha q)\,y - (a\beta q + 2\beta q)\,y^2 = 0,$$

d'où

$$a\alpha' - a\beta p = 0,\ a\beta' - 2\alpha q = 0,\ a\beta q + 2\beta q = 0.$$

La dernière équation donne $a = -2$, et en substituant cette valeur dans les deux autres équations, on obtiendra

$$\alpha' - \beta p = 0,\ \beta' + \alpha q = 0.$$

Si de ces deux équations on tirait α et β en p et q, on parviendrait à une équation différentielle du second ordre; mais on trouve $p = \frac{\alpha'}{\beta}$ et $q = -\frac{\beta'}{\alpha}$; si donc ces deux conditions ont lieu, on a $r = -2\log(\alpha + \beta y)$, et par suite $z = e^r = \frac{1}{(\alpha + \beta y)^2}$.

Il suit de là que l'équation différentielle

$$dy + \left(\frac{\alpha'}{\beta} - \frac{\beta'}{\alpha}\cdot y^2\right)dx = 0$$

peut être intégrée, et que le facteur qui la rend intégrable est $\frac{1}{(\alpha+\beta y)^2}$. L'intégrale sera

$$\int\frac{dy}{(\alpha+\beta y)^2}+fx=0,$$

c'est-à-dire

$$fx-\frac{1}{\beta(\alpha+\beta y)}=0.$$

Pour trouver fx, il faut différentier, ce qui donnera

$$\left(f'x+\frac{\alpha'\beta+\alpha\beta'+2\beta\beta' y}{\beta^2(\alpha+\beta y)^2}\right)dx+\frac{dy}{(\alpha+\beta y)^2}=0;$$

mais $dy=-\frac{(\alpha\alpha'-\beta\beta' y^2)}{\alpha\beta}dx$, donc

$$f'x+\frac{\alpha'\beta+\alpha\beta'+2\beta\beta' y}{\beta^2(\alpha+\beta y)^2}-\frac{\alpha\alpha'-\beta\beta' y^2}{\alpha\beta(\alpha+\beta y)^2}=0,$$

d'où en réduisant,

$$f'x=-\frac{\beta'}{\alpha\beta^2}\quad\text{et}\quad fx=-\int\frac{\beta'}{\alpha\beta^2}dx.$$

L'intégrale de l'équation

$$dy+\left(\frac{\alpha'}{\beta}-\frac{\beta'}{\alpha}y^2\right)dx=0$$

sera donc

$$\frac{1}{\beta(\alpha+\beta y)}+\int\frac{\beta'}{\alpha\beta^2}dx=0,$$

d'où l'on tire

$$y=-\frac{\alpha}{\beta}+\frac{1}{\beta^2\left(C-\int\frac{\beta'}{\alpha\beta^2}dx\right)}.$$

Supposons $\beta'=\alpha=\frac{dp}{dx}$, on aura

$$dy+\left(\frac{d^2p}{p\,dx^2}-y^2\right)dx=0,$$

$$y=-\frac{dp}{pdx}+\frac{1}{p^2\left(C-\int\frac{dx}{p^2}\right)}.$$

Voy. Memorie della società Italiana t. III, p. 236.

V.

SUR L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE $(y+s)\,dy+(p+qy+ry^2)\,dx=0$.

Cette équation peut toujours être réduite à la forme

$$zdz+(P+Qz)\,dx=0.$$

A cet effet je pose $y=\alpha+\beta z$; donc $dy=d\alpha+\beta dz+zd\beta$; donc en substituant:

$$(\alpha+s+\beta z)(d\alpha+zd\beta+\beta dz)+(p+q\alpha+q\beta z+r\alpha^2+2r\alpha\beta z+r\beta^2z^2)\,dx=0,$$

ou bien

$$\left(z+\frac{\alpha+s}{\beta}\right)dz+\frac{(s+\alpha)\,d\alpha+(p+q\alpha+r\alpha^2)\,dx}{\beta^2}$$
$$+z\frac{(\alpha+s)\,d\beta+\beta\,[d\alpha+(q+2r\alpha)\,dx]}{\beta^2}+\left(rdx+\frac{d\beta}{\beta}\right)z^2=0.$$

Pour que cette équation soit de la forme $zdz+(P+Qz)\,dx=0$, on doit avoir les deux équations suivantes:

$$\frac{\alpha+s}{\beta}=0, \text{ et } rdx+\frac{d\beta}{\beta}=0,$$

donc

$$\alpha=-s,\ \beta=e^{-\int rdx},$$

$$P=(p-qs+rs^2)\,e^{2\int rdx},\ Q=\left[q-2rs-\frac{ds}{dx}\right]e^{\int rdx}.$$

Si donc dans l'équation $(y+s)\,dy+(p+qy+ry^2)\,dx=0$, au lieu de y on met $\alpha+\beta z=-s+z\,e^{-\int rdx}$, on obtient

$$zdz+\left[(p-qs+rs^2)\,e^{2\int rdx}+\left(q-2rs-\frac{ds}{dx}\right)e^{\int rdx}z\right]dx=0.$$

Donc, si cette équation est résoluble, celle-là l'est de même. Cela a lieu si

$$p-qs+rs^2=0,$$

ou bien si

$$q-2rs-\frac{ds}{dx}=0.$$

Dans le premier cas on a

$$dz+\left(q-2rs-\frac{ds}{dx}\right)e^{\int rdx}dx=0,$$

d'où

$$z=\int\left(2rs+\frac{ds}{dx}-q\right)e^{\int rdx}dx;$$

et dans le second cas

$$zdz+(p-qs+rs^2)\,e^{2\int rdx}dx=0,$$

d'où

$$z=\sqrt{2\int(qs-p-rs^2)\,e^{2\int rdx}dx}.$$

L'équation différentielle

$$(y+s)\,dy+(qs-rs^2+qy+ry^2)\,dx=0$$

a donc pour intégrale

$$y=-s+e^{-\int rdx}\int\left(2rs+\frac{ds}{dx}-q\right)e^{\int rdx}dx;$$

et celle-ci:

$$(y+s)\,dy+\left[p+\left(2rs+\frac{ds}{dx}\right)y+ry^2\right]dx=0$$

a pour intégrale

$$y=-s+e^{-\int rdx}\sqrt{2\int\left(rs^2-p+\frac{sds}{dx}\right)e^{2\int rdx}dx}.$$

On peut aussi donner une autre forme à l'équation

$$zdz+(P+Qz)\,dx=0.$$

En mettant $y+\alpha$ au lieu de z on a

$$(y+\alpha)(dy+d\alpha)+[P+Q(y+\alpha)]\,dx=0;$$

c'est-à-dire

$$(y+\alpha)\,dy+\alpha d\alpha+Pdx+Q\alpha dx+y\,(Qdx+d\alpha)=0.$$

En posant maintenant

$$Qdx+da=0, \quad \text{ou} \quad a=-\int Qdx,$$

on aura

$$\left(y-\int Qdx\right)dy+Pdx=0,$$

et en faisant $-\int Qdx=R$ et par conséquent $Q=-\frac{dR}{dx}$,

$$(y+R)\,dy+Pdx=0, \quad \text{d'où} \quad dy+\frac{P}{y+R}\,dx=0.$$

Si l'on fait $Pdx=dv$, on a

$$dv+(y+fv)\,dy=0.$$

Je vais maintenant chercher le facteur qui rend l'équation

$$ydy+(p+qy)\,dx=0$$

une différentielle complète. Soit z ce facteur, on aura

$$\frac{d(zy)}{dx}=-\frac{d\,[z\,(p+qy)]}{dy},$$

ou bien

$$y\,\frac{dz}{dx}-(p+qy)\,\frac{dz}{dy}-zq=0.$$

Soit $z=e^r$, on aura

$$\frac{dz}{dx}=z\,\frac{dr}{dx} \quad \text{et} \quad \frac{dz}{dy}=z\,\frac{dr}{dy}.$$

Donc

$$y\,\frac{dr}{dx}-(p+qy)\,\frac{dr}{dy}-q=0.$$

Supposons $r=\alpha+\beta y$, on aura

$$y\left(\frac{d\alpha}{dx}+y\,\frac{d\beta}{dx}\right)-(p+qy)\,\beta-q=0,$$

c'est-à-dire

$$y^2\,\frac{d\beta}{dx}+y\left(\frac{d\alpha}{dx}-q\beta\right)-p\beta-q=0.$$

On en tire

$$\frac{d\beta}{dx}=0, \quad \frac{d\alpha}{dx}-q\beta=0, \quad p\beta+q=0.$$

et par conséquent

$$\beta=-c, \quad \alpha=-c\int qdx, \quad -cp+q=0.$$

Le facteur cherché sera donc

$$e^r=e^{-c\left(y+\int qdx\right)}.$$

Soit maintenant $r=\alpha+\beta y+\gamma y^2$, on aura

$$y\left(\frac{d\alpha}{dx}+y\frac{d\beta}{dx}+y^2\frac{d\gamma}{dx}\right)-(p+qy)(\beta+2\gamma y)-q=0;$$

donc en développant

$$y^3\frac{d\gamma}{dx}+y^2\left(\frac{d\beta}{dx}-2q\gamma\right)+y\left(\frac{d\alpha}{dx}-\beta q-2p\gamma\right)-q-p\beta=0.$$

On en conclut

$$\frac{d\gamma}{dx}=0,\quad \frac{d\beta}{dx}-2q\gamma=0,\quad \frac{d\alpha}{dx}-\beta q-2p\gamma=0,\quad q+p\beta=0,$$

d'où

$$\gamma=c,\quad \beta=2c\int q\,dx,\quad q+2cp\int q\,dx=0,$$

$$\alpha=2c\int dx\left(q\int q\,dx+p\right)=2c\int q\,dx\int q\,dx-\int\frac{q\,dx}{\int q\,dx}.$$

L'équation deviendra donc

$$y\,dy-\frac{q\,dx}{2c\int q\,dx}+qy\,dx=0,$$

et la facteur sera e^r, où

$$r=2c\int q\,dx\int q\,dx-\int\frac{q\,dx}{\int q\,dx}+2cy\int q\,dx+cy^2.$$

Faisant $q=1$ et écrivant $-c$ au lieu de $2c$, on a $\frac{q\,dx}{\int q\,dx}=\frac{dx}{x+a}$ et

$$y\,dy+\left(\frac{1}{c(x+a)}+y\right)dx=0;$$

et le facteur deviendra

$$\frac{1}{x+a}\,e^{-\frac{c}{2}(x+y+a)^2}.$$

Lorsque $a=0$, on a

$$y\,dy+\left(y+\frac{1}{cx}\right)dx=0,$$

et le facteur sera $\frac{1}{x}\,e^{-\frac{c}{2}(x+y)^2}$. L'intégrale sera donc

$$\frac{1}{x}\int ye^{-\frac{c}{2}(y+x)^2}dy+fx=0,$$

ou bien

$$\int y\, e^{-\frac{c}{2}(y+x)^2} dy + Fx = 0.$$

Supposons en général

$$r = \alpha + \alpha_1 y + \alpha_2 y^2 + \alpha_3 y^3 + \cdots + \alpha_n y^n;$$

on aura en différentiant successivement par rapport à x et à y:

$$\frac{dr}{dx} = \frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\alpha_1}{dx} y + \frac{d\alpha_2}{dx} y^2 + \frac{d\alpha_3}{dx} y^3 + \cdots + \frac{d\alpha_n}{dx} y_n,$$

$$\frac{dr}{dy} = \alpha_1 + 2\alpha_2 y + 3\alpha_3 y^2 + \cdots + n\alpha_n y^{n-1}.$$

En substituant ces valeurs dans l'équation

$$y\frac{dr}{dx} - (p+qy)\frac{dr}{dy} - q = 0,$$

et réduisant, on obtiendra

$$\frac{d\alpha_n}{dx} y^{n+1} + \left(\frac{d\alpha_{n-1}}{dx} - nq\alpha_n\right) y^n + \left(\frac{d\alpha_{n-2}}{dx} - (n-1)q\alpha_{n-1} - np\alpha_n\right) y^{n-1}$$
$$+ \left(\frac{d\alpha_{n-3}}{dx} - (n-2)q\alpha_{n-2} - (n-1)p\alpha_{n-1}\right) y^{n-2} + \cdots$$
$$\cdots + \left(\frac{d\alpha_1}{dx} - 2q\alpha_2 - 3p\alpha_3\right) y^2 + \left(\frac{d\alpha}{dx} - q\alpha_1 - 2p\alpha_2\right) y - q - p\alpha_1 = 0.$$

On a donc les équations

$$\frac{d\alpha_n}{dx} = 0,\ \frac{d\alpha_{n-1}}{dx} - nq\alpha_n = 0,\ \frac{d\alpha_{n-2}}{dx} - (n-1)q\alpha_{n-1} - np\alpha_n = 0 \text{ etc.},$$

$$\frac{d\alpha_1}{dx} - 2q\alpha_2 - 3p\alpha_3 = 0,\ \frac{d\alpha}{dx} - q\alpha_1 - 2p\alpha_2 = 0,\ q + p\alpha_1 = 0.$$

Voilà $n+2$ équations, mais comme le nombre des quantités inconnues n'est que $n+1$, il restera après l'élimination de celles-ci, entre p et q une équation de condition, qui par conséquent doit avoir lieu pour que le facteur puisse avoir la forme supposée. En intégrant on aura

$$\alpha_n = c,\ \alpha_{n-1} = n\int \alpha_n q\,dx,\ \alpha_{n-2} = (n-1)\int \alpha_{n-1} q\,dx + n\int \alpha_n p\,dx,$$
$$\alpha_{n-3} = (n-2)\int \alpha_{n-2} q\,dx + (n-1)\int \alpha_{n-1} p\,dx, \ldots$$
$$\alpha_{n-m} = (n-m+1)\int \alpha_{n-m+1} q\,dx + (n-m+2)\int \alpha_{n-m+2} p\,dx, \ldots$$
$$\alpha_1 = 2\int \alpha_2 q\,dx + 3\int \alpha_3 p\,dx,\ \alpha = \int \alpha_1 q\,dx + 2\int \alpha_2 p\,dx,\ q + p\alpha_1 = 0,$$

ou bien

$$\alpha_n = c,\ \alpha_{n-1} = nc\int q\,dx,\ \alpha_{n-2} = n(n-1)c\int q\,dx \int q\,dx + nc\int p\,dx,$$

$$\alpha_{n-3}=n(n-1)(n-2)c\int q\,dx\int q\,dx\int q\,dx+n(n-2)c\int q\,dx\int p\,dx$$
$$+n(n-1)c\int p\,dx\int q\,dx \text{ etc.}$$

Soit par exemple $n=3$, on aura

$$\alpha_3=c,\quad \alpha_2=3c\int q\,dx,\quad \alpha_1=6c\int q\,dx\int q\,dx+3c\int p\,dx,$$
$$\alpha=6c\int q\,dx\int q\,dx\int q\,dx+3c\int q\,dx\int p\,dx+6c\int p\,dx\int q\,dx.$$

L'équation de condition deviendra donc

$$q+6cp\int q\,dx\int q\,dx+3cp\int p\,dx=0.$$

Soit $r=\frac{1}{\alpha+\beta y}$, on a $\frac{dr}{dx}=-\frac{\frac{d\alpha}{dx}+y\frac{d\beta}{dx}}{(\alpha+\beta y)^2}$, $\frac{dr}{dy}=-\frac{\beta}{(\alpha+\beta y)^2}$; on aura donc

$$\frac{-y\left(\frac{d\alpha}{dx}+\frac{d\beta}{dx}y\right)}{(\alpha+\beta y)^2}+\frac{\beta(p+qy)}{(\alpha+\beta y)^2}-q=0,$$

d'où en réduisant

$$y^2\left(\frac{d\beta}{dx}+\beta^2 q\right)+y\left(\frac{d\alpha}{dx}-\beta q+2\alpha\beta q\right)+\alpha^2 q-\beta p=0;$$

donc

$$\frac{d\beta}{dx}+\beta^2 q=0,\quad \frac{d\alpha}{dx}-\beta q+2\alpha\beta q=0,\quad \alpha^2 q-\beta p=0;$$

donc

$$\beta=\frac{1}{\int q\,dx},\quad \alpha=\sqrt{\frac{p}{q\int q\,dx}},\quad \frac{d\alpha}{dx}=\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{q\int q\,dx}{p}}\cdot\frac{d}{dx}\frac{p}{q\int q\,dx};$$

et par suite

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{q\int q\,dx}{p}}\cdot\frac{d}{dx}\frac{p}{q\int q\,dx}-\frac{q}{\int q\,dx}+2\sqrt{\frac{p}{q\int q\,dx}}\cdot\frac{q}{\int q\,dx}=0.$$

Si l'on fait $q=-\frac{d\beta}{\beta^2\,dx}$, on aura

$$\frac{d\alpha}{dx}+\frac{d\beta}{\beta\,dx}-2\alpha\frac{d\beta}{\beta\,dx}=0,$$

d'où l'on tire successivement

$$\alpha=C\beta^2+\tfrac{1}{2}=\frac{C}{(\int q\,dx)^2}+\tfrac{1}{2},$$

$$(C\beta^2+\tfrac{1}{2})^2 q-\beta p=0,\ p=\frac{(C\beta^2+\frac{1}{2})^2 q}{\beta};$$

mais $\beta=\frac{1}{\int q dx}$, donc

$$p=\left(\frac{C}{(\int q dx)^2}+\tfrac{1}{2}\right)^2 q\int q dx.$$

On rendra donc l'équation

$$ydy+\left[\left(\frac{C}{(\int q dx)^2}+\tfrac{1}{2}\right)^2 q\int q dx+qy\right]dx=0$$

intégrable en la multipliant par le facteur $e^{\frac{1}{\alpha+\beta y}}$, où

$$\alpha+\beta y=\frac{C}{(\int q dx)^2}+\tfrac{1}{2}+\frac{y}{\int q dx}.$$

Faisant $q=1$ on aura

$$ydy+\left[\left(\frac{C}{(x+a)^2}+\tfrac{1}{2}\right)^2(x+a)+y\right]dx=0,$$

et le facteur deviendra $e^{\frac{C+(x+a)y+\frac{1}{2}(x+a)^2}{(x+a)^2}}$. Si $a=0$ et $C=a$, on a

$$ydy+\left(\frac{a^2}{x^3}+\frac{a}{x}+\tfrac{1}{4}x+y\right)dx=0,$$

et le facteur sera $e^{\frac{a}{x^2}+\frac{y}{x}+\frac{1}{2}}$.

Supposons maintenant $r=a\log(\alpha+\beta y)$, on aura

$$\frac{dr}{dx}=\frac{a\frac{d\alpha}{dx}+ay\frac{d\beta}{dx}}{\alpha+\beta y},\quad \frac{dr}{dy}=\frac{a\beta}{\alpha+\beta y};$$

par conséquent

$$y\left\{\frac{a\frac{d\alpha}{dx}+ay\frac{d\beta}{dx}}{\alpha+\beta y}\right\}-(p+qy)\frac{a\beta}{\alpha+\beta y}-q=0,$$

et en réduisant

$$y^2 a\frac{d\beta}{dx}+y\left(a\frac{d\alpha}{dx}-a\beta q-\beta q\right)-ap\beta-\alpha q=0;$$

donc

$$\frac{d\beta}{dx}=0,\ a\frac{d\alpha}{dx}-a\beta q-\beta q=0,\ ap\beta+\alpha q=0;$$

donc

$$\beta=c,\ \alpha=\frac{(a+1)c}{a}\int q dx,\ acp+\frac{(a+1)c}{a}q\int q dx=0,\ p=-\frac{a+1}{a^2}q\int q dx.$$

L'équation deviendra donc

$$y\,dy-\left(\frac{a+1}{a^2}q\int q\,dx-qy\right)dx=0,$$

et le facteur sera

$$e^r=\left(\frac{(a+1)c}{a}\int q\,dx+cy\right)^a.$$

Soit $q=1$, on aura

$y\,dy-\left(\frac{a+1}{a^2}(x+b)-y\right)dx=0$, et le facteur sera $\left(\frac{(a+1)}{a}(x+b)+y\right)^a$;

mais l'équation étant homogène, la résolution ne présente aucune difficulté.

Soit ensuite $r=a\log(y+\alpha)+a'\log(y+\alpha')$; donc

$$\frac{dr}{dx}=\frac{a\frac{d\alpha}{dx}}{y+\alpha}+\frac{a'\frac{d\alpha'}{dx}}{y+\alpha'},\quad \frac{dr}{dy}=\frac{a}{y+\alpha}+\frac{a'}{y+\alpha'},$$

$$y\left\{\frac{a\frac{d\alpha}{dx}}{y+\alpha}+\frac{a'\frac{d\alpha'}{dx}}{y+\alpha'}\right\}-(p+qy)\left(\frac{a}{y+\alpha}+\frac{a'}{y+\alpha'}\right)-q=0;$$

donc en réduisant

$$\begin{gathered}y^2\left(a\frac{d\alpha}{dx}+a'\frac{d\alpha'}{dx}-(a+a'+1)q\right)\\ +y\left(a\alpha'\frac{d\alpha}{dx}+a'\alpha\frac{d\alpha'}{dx}-(a+a')p-q(a\alpha'+a'\alpha+\alpha+\alpha')\right)\\ -p(a\alpha'+a'\alpha)-q\alpha\alpha'=0.\end{gathered}$$

On aura donc les trois équations suivantes

$$a\frac{d\alpha}{dx}+a'\frac{d\alpha'}{dx}-(a+a'+1)q=0,$$

$$a\alpha'\frac{d\alpha}{dx}+a'\alpha\frac{d\alpha'}{dx}-(a+a')p-q(a\alpha'+a'\alpha+\alpha+\alpha')=0,$$

$$p(a\alpha'+a'\alpha)+q\alpha\alpha'=0.$$

La première équation donne

$$a\alpha+a'\alpha'=(a+a'+1)\int q\,dx;$$

donc

$$\alpha'=\frac{(a+a'+1)\int q\,dx-a\alpha}{a'}=\left(1+\frac{1+a}{a'}\right)\int q\,dx-\frac{a}{a'}\alpha.$$

En substituant cette valeur dans la seconde et la troisième équation on obtiendra

$$\left[\left(a+\frac{a}{a'}(1+a)\right)\int q\,dx-\frac{a^2}{a'}\alpha\right]\frac{d\alpha}{dx}+\alpha\left((a'+a+1)\,q-a\frac{d\alpha}{dx}\right)-(a+a')\,p$$
$$-q\left[(a+1)\left(1+\frac{1+a}{a'}\right)\int q\,dx-(a+1)\frac{a}{a'}\alpha+(a'+1)\,\alpha\right]=0,$$

ou bien

$$\frac{d\alpha}{dx}\left[\left(a+\frac{a(a+1)}{a'}\right)\int q\,dx-\alpha\left(\frac{a^2}{a'}+a\right)\right]$$
$$+\alpha\left[(a'+a+1)\,q+q\left((a+1)\frac{a}{a'}-(a'+1)\right)\right]-(a+a')\,p$$
$$-q\left(a+1+\frac{(a+1)^2}{a'}\right)\int q\,dx=0,$$

et

$$p\left[\left(a+\frac{a}{a'}(1+a)\right)\int q\,dx-\frac{a^2}{a'}\alpha+a'\alpha\right]+q\alpha\left[\left(1+\frac{1+a}{a'}\right)\int q\,dx-\frac{a}{a'}\alpha\right]=0.$$

Soit $a+a'=0$, ou $a'=-a$, on aura

$$\frac{d\alpha}{dx}\int q\,dx+\alpha q-\frac{a+1}{a}q\int q\,dx=0,$$

donc

$$\frac{d\alpha}{dx}+\alpha\frac{q}{\int q\,dx}-\frac{a+1}{a}q=0,$$

et en intégrant

$$\alpha=\frac{a+1}{a}\,e^{-\int\frac{q\,dx}{\int q\,dx}}\int e^{\int\frac{q\,dx}{\int q\,dx}}q\,dx;$$

or $\int\frac{q\,dx}{\int q\,dx}=\log\left(\int q\,dx\right)$; donc

$$\alpha=\frac{(a+1)\int\left(\int q\,dx\right)q\,dx}{a\int q\,dx};$$

c'est-à-dire

$$\alpha=\frac{(a+1)\left[C+\frac{1}{2}\left(\int q\,dx\right)^2\right]}{a\int q\,dx}=\frac{a+1}{2a}\int q\,dx+\frac{k}{\int q\,dx},$$

ou bien

$$\alpha=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{a}\right)\int q\,dx+\frac{k}{\int q\,dx},$$

donc

$$\alpha'=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{a}\right)\int q\,dx+\frac{k}{\int q\,dx};$$

maintenant on a

$$p=-\frac{q\alpha\alpha'}{a\alpha'+a'\alpha}=\frac{q}{4\int q\,dx}\left[\left(\int q\,dx+\frac{2k}{\int q\,dx}\right)^2-\frac{1}{a^2}\left(\int q\,dx\right)^2\right].$$

Il suit de là que l'équation

$$ydy+\left\{\frac{q}{4\int q dx}\left[\left(\int q dx+\frac{2k}{\int q dx}\right)^2-\frac{1}{a^2}\left(\int q dx\right)^2\right]+qy\right\}dx=0$$

devient intégrable quand on la multiplie par le facteur

$$e^r=\left\{\frac{y+\frac{1}{2}\int q dx+\frac{k}{\int q dx}+\frac{1}{2a}\int q dx}{y+\frac{1}{2}\int q dx+\frac{k}{\int q dx}-\frac{1}{2a}\int q dx}\right\}^a.$$

En faisant $q=1$, l'équation deviendra

$$ydy+\left\{\frac{1}{4x}\left[\left(x+\frac{2k}{x}\right)^2-\frac{x^2}{a^2}\right]+y\right\}dx=0,$$

et le facteur sera

$$\left\{\frac{y+\frac{x}{2}\left(1+\frac{1}{a}\right)+\frac{k}{x}}{y+\frac{x}{2}\left(1-\frac{1}{a}\right)+\frac{k}{x}}\right\}^a.$$

VI.

DETERMINATION D'UNE FONCTION AU MOYEN D'UNE ÉQUATION QUI NE CONTIENT QU'UNE SEULE VARIABLE.

1.

La fonction fx étant donnée, trouver la fonction φx par l'équation

$$\varphi x + 1 = \varphi(fx).$$

Soit $x = \psi y$ et $fx = \psi(y+1)$, on aura

$$1 + \varphi\psi y = \varphi\psi(y+1),$$

ou bien

$$\varphi\psi(y+1) - \varphi\psi y = 1,$$

c'est-à-dire

$$\varDelta\varphi\psi y = 1;$$

donc en intégrant

$$\varphi\psi y = y + \chi y,$$

où χy désigne une fonction périodique quelconque de y, de sorte que

$$\chi(y+1) = \chi y.$$

Or $\psi y = x$, d'où l'on tire $y = {}'\psi x$, et par conséquent

(1) $$\varphi x = {}'\psi x + \chi({}'\psi x).$$

Il s'agit maintenant de trouver la fonction ${}'\psi x$. Cela se fait comme il suit. On a $x = \psi y$ et $fx = \psi(y+1)$; donc

(2) $$\psi(y+1) = f\psi y.$$

Voilà une équation aux différences finies, d'où l'on tire ψy, et cette fonction étant connue, on a

$$x = \psi y \quad \text{d'où} \quad y = {}'\psi x.$$

Par ce qui précède on voit que le problème est toujours résoluble, et qu'il a même une infinité de solutions.

Supposons par exemple $fx = x^n$, l'équation (2) deviendra

$$\psi(y+1) = (\psi y)^n.$$

En mettant ici successivement $y+1$, $y+2$, etc. à la place de y, on aura

$$\psi(y+2) = [\psi(y+1)]^n = (\psi y)^{n^2},$$
$$\psi(y+3) = [\psi(y+2)]^n = (\psi y)^{n^3},$$

et en général

$$\psi(y+x) = (\psi y)^{n^x}.$$

En faisant $y=0$ et $\psi(0)=a$, on a $\psi x = a^{n^x}$, et par suite $\psi y = a^{n^y}$; or $\psi y = x$; donc $a^{n^y} = x$, d'où $n^y = \frac{\log x}{\log a}$, et

$$y = \frac{\log\log x - \log\log a}{\log n};$$

donc

$$'\psi x = \frac{\log\log x - \log\log a}{\log n}.$$

L'équation (1) deviendra donc

$$\varphi x = \frac{\log\log x - \log\log a}{\log n} + \chi\left(\frac{\log\log x - \log\log a}{\log n}\right),$$

ce qui donne la fonction cherchée.

Si l'on met x^n au lieu de x, on aura

$$\varphi(x^n) = \frac{\log\log x^n - \log\log a}{\log n} + \chi\left(\frac{\log\log x^n - \log\log a}{\log n}\right)$$
$$= \frac{\log n + \log\log x - \log\log a}{\log n} + \chi\left(\frac{\log n + \log\log x - \log\log a}{\log n}\right)$$
$$= 1 + \frac{\log\log x - \log\log a}{\log n} + \chi\left(1 + \frac{\log\log x - \log\log a}{\log n}\right) = 1 + \varphi x.$$

La fonction a donc la propriété demandée. Le cas le plus simple est celui où $\chi y = 0$ et $a = e$, $\log e$ étant $= 1$; on aura alors

$$\varphi x = \frac{\log\log x}{\log n}, \quad \text{et} \quad \frac{\log\log x}{\log n} + 1 = \frac{\log\log x^n}{\log n}.$$

2.

Considérons en général l'équation

$$F[x, \varphi(fx), \varphi(\psi x)] = 0,$$

où F, f et ψ sont des fonctions données, et où l'on cherche la fonction φ.

Soit $fx = y_t$ et $\psi x = y_{t+1}$, l'équation devient

$$F(x, \varphi y_t, \varphi y_{t+1}) = 0.$$

Soit $\varphi y_t = u_t$, on aura $\varphi y_{t+1} = u_{t+1}$, et par conséquent

$$F(x, u_t, u_{t+1}) = 0.$$

De l'équation $fx = y_t$ on déduit $x = 'fy_t$; donc en substituant cette valeur dans l'équation $\psi x = y_{t+1}$, on obtient

(1) $$y_{t+1} = \psi('fy_t).$$

De cette équation on tire y_t, et par conséquent aussi $x = 'fy_t$, en fonction de t. Cette valeur étant substituée dans l'équation $F(x, u_t, u_{t+1}) = 0$, donne

(2) $$F('fy_t, u_t, u_{t+1}) = 0.$$

De cette équation on tire $u_t = \theta t = \varphi(y_t)$. Faisant $y_t = z$, on trouvera $t = 'y_z$; donc enfin

$$\varphi z = \theta('y_z).$$

Exemple. Trouver la fonction φ déterminée par l'équation

$$(\varphi x)^2 = \varphi(2x) + 2.$$

Soit $\varphi x = u_t = \varphi y_t$, et $\varphi(2x) = u_{t+1} = \varphi(y_{t+1})$, on aura

$$(u_t)^2 = u_{t+1} + 2.$$

On en tire

$$u_{t+1} = u_t^2 - 2.$$

Supposons

$$u_1 = a + \frac{1}{a},$$

donc

$$u_2 = a^2 + \frac{1}{a^2},$$

$$u_3 = a^4 + \frac{1}{a^4},$$

et en général

$$u_t = a^{2^{t-1}} + \frac{1}{a^{2^{t-1}}}.$$

Ayant $x = y_t$ et $2x = y_{t+1}$, on a $y_{t+1} = 2y_t$, d'où l'on tire

$$y_t = c . 2^{t-1} = x;$$

donc

$$2^{t-1} = \frac{x}{c}.$$

Cette valeur étant substituée dans l'équation

$$\varphi x = u_t = a^{2^{t-1}} + a^{-2^{t-1}},$$

donne

$$\varphi x = a^{\frac{x}{c}} + a^{-\frac{x}{c}} = \left(a^{\frac{1}{c}}\right)^{x} + \left(a^{\frac{1}{c}}\right)^{-x},$$

ou bien

$$\varphi x = b^{x} + b^{-x}.$$

On a en effet

$$(b^{x} + b^{-x})^{2} = b^{2x} + b^{-2x} + 2.$$

VII.

PROPRIÉTÉS REMARQUABLES DE LA FONCTION $y=\varphi x$ DÉTERMINÉE PAR L'ÉQUATION $fy\,dy - dx\sqrt{(a-y)(a_1-y)(a_2-y)\dots(a_m-y)}=0$, fy ÉTANT UNE FONCTION QUELCONQUE DE y QUI NE DEVIENT PAS NULLE OU INFINIE LORSQUE $y=a,\ a_1,\ a_2,\dots a_m$.

Soit pour abréger $(a-y)(a_1-y)\dots(a_m-y)=\psi y$, on aura

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{fy}\sqrt{\psi y}.$$

En différentiant on aura un résultat de la forme

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{P}{\sqrt{\psi y}}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{P}{fy},$$

où P est une fonction qui ne devient pas infinie lorsque $\psi y=0$. En différentiant de nouveau, on aura

$$\frac{d^3y}{dx^3}=P_1\frac{dy}{dx}=\frac{P_1}{fy}\sqrt{\psi y};$$

de même

$$\frac{d^4y}{dx^4}=\frac{P_2}{\sqrt{\psi y}}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{P_2}{fy},\quad \frac{d^5y}{dx^5}=P_3\frac{dy}{dx}=\frac{P_3}{fy}\sqrt{\psi y},$$

etc.

où P, P_1, P_2, P_3 etc. sont des fonctions de y qui ne deviennent pas infinies lorsque $\psi y=0$.

Cela posé, considérons l'équation

$$\varphi(x+v) = y + v^2 Q_2 + v^4 Q_4 + v^6 Q_6 + \cdots$$
$$+ \sqrt{\psi y}\,(v Q_1 + v^3 Q_3 + v^5 Q_5 + \cdots),$$

où Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 etc. sont des fonctions qui ne deviennent pas infinies lorsque $\psi y = 0$. Supposons que y ait une valeur qui rende ψy égale à zéro, par exemple $y = a$, on aura

$$\varphi(\alpha+v) = a + v^2 Q_2 + v^4 Q_4 + v^6 Q_6 + \cdots;$$

Q_2, Q_4, etc. sont ici des constantes, et α est la valeur de x qui répond à $y = a$, et qui est déterminée par l'expression

$$\alpha = \int^a \frac{fy\,.\,dy}{\sqrt{\psi y}}.$$

La fonction $\varphi(\alpha+v)$ est donc une fonction paire de v. On a par conséquent

$$\varphi(\alpha+v) = \varphi(\alpha-v),$$

d'où l'on déduit, en mettant $\alpha - v$ au lieu de v,

$$\varphi(2\alpha - v) = \varphi v.$$

Cela posé, on a de même

$$\varphi(2\alpha_1 - v) = \varphi v,$$

en désignant par α_1 l'expression $\int^{a_1} \frac{fy\,dy}{\sqrt{\psi y}}$, donc aussi

$$\varphi(2\alpha - v) = \varphi(2\alpha_1 - v),$$

d'où l'on tire, en mettant $2\alpha_1 - v$ au lieu de v,

$$\varphi(2\alpha - 2\alpha_1 + v) = \varphi v,$$

ce qui nous montre que la fonction φ est périodique. De là on déduit ensuite sans peine

$$\varphi[\pm 2n(\alpha-\alpha_1) + v] = \varphi v,$$

n étant un nombre entier quelconque.

On a de la même manière

$$\varphi[\pm 2n(\alpha-\alpha_2) + v] = \varphi v,$$

donc

$$\varphi[\pm 2n(\alpha-\alpha_1) + v] = \varphi[\pm 2n_1(\alpha-\alpha_2) + v]$$

d'où

$$\varphi[v \pm 2n(\alpha-\alpha_1) \pm 2n_1(\alpha-\alpha_2)] = \varphi v.$$

En général on aura

$$\varphi v = \varphi\,[v + 2n(\alpha - \alpha_1) + 2n_1(\alpha - \alpha_2) + 2n_2(\alpha - \alpha_3) + \cdots + 2n_{m-1}(\alpha - \alpha_m)],$$

n, n_1, n_2 etc. étant des nombres quelconques entiers positifs ou négatifs. Ou bien

$$\varphi v = \varphi\,(v + 2n\alpha + 2n_1\alpha_1 + 2n_2\alpha_2 + \cdots + 2n_m\alpha_m),$$
$$\text{où } n + n_1 + n_2 + \cdots + n_m = 0.$$

Si l'on suppose que $\varphi k = 0$, on aura, en faisant $v = k$,

$$\varphi\,(k + 2n\alpha + 2n_1\alpha_1 + \cdots + 2n_m\alpha_m) = 0.$$

On peut donc trouver une infinité de solutions de l'équation

$$\varphi x = 0,$$

savoir

$$x = k + 2\,(n\alpha + n_1\alpha_1 + \cdots + n_m\alpha_m),$$
$$\text{où } n + n_1 + n_2 + \cdots + n_m = 0.$$

On peut aussi trouver une infinité de valeurs de x qui rendent φx infinie. En effet il suffit pour cela de changer y en $\frac{1}{z}$ dans l'équation

$$x = \int \frac{fy \, . \, dy}{\sqrt{\psi y}},$$

et de chercher ensuite par la méthode précédente les valeurs de x qui rendent $z = 0$.

Pour éclaircir ce qui précède je donnerai un exemple. Soit $fy = 1$, $\psi y = 1 - y^2 = (1 - y)(1 + y)$, on aura

$$x = \int \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} = \text{arc}\sin y,$$

donc

$$y = \sin x = \varphi x.$$

Dans cet exemple on a $a = 1$, $a_1 = -1$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\alpha_1 = -\frac{\pi}{2}$, on a donc

$$\varphi\left(\frac{\pi}{2} - v\right) = \varphi\left(\frac{\pi}{2} + v\right),$$

$$\varphi\left(-\frac{\pi}{2} - v\right) = \varphi\left(-\frac{\pi}{2} + v\right),$$

$$\varphi\,(\pi - v) = \varphi v, \quad \varphi v = \varphi\,(v \pm 2n\pi), \quad 0 = \varphi\,(\pm n\pi).$$

VIII.

SUR UNE PROPRIÉTÉ REMARQUABLE D'UNE CLASSE TRÈS ÉTENDUE DE FONCTIONS TRANSCENDANTES.

Soit y une fonction de x, déterminée par l'équation

$$0 = sy + t\frac{dy}{dx},$$

s et t étant deux fonctions entières de x. Soit de même

$$\int ry\,dx = tvy,$$

on aura en différentiant

$$ry = \left(v\frac{dt}{dx} + t\frac{dv}{dx}\right)y + vt\frac{dy}{dx};$$

or $t\dfrac{dy}{dx} = -sy$, donc

$$r = v\left(\frac{dt}{dx} - s\right) + t\frac{dv}{dx}.$$

Cela posé, soit $v = \dfrac{1}{x-a}$, on aura

$$r = \frac{\frac{dt}{dx} - s}{x-a} - \frac{t}{(x-a)^2},$$

ou, en faisant $t = \varphi x$ et $s = fx$,

$$r = \frac{\varphi' x - fx}{x-a} - \frac{\varphi x}{(x-a)^2}.$$

Or on voit sans peine que

$$\frac{\varphi' x - f x}{x-a} = \frac{\varphi' a - f a}{x-a} + \varphi'' a - f' a + \frac{\varphi''' a - f'' a}{2}(x-a) + \frac{\varphi'''' a - f''' a}{2.3}(x-a)^2 + \cdots,$$

$$\frac{\varphi x}{(x-a)^2} = \frac{\varphi a}{(x-a)^2} + \frac{\varphi' a}{x-a} + \frac{\varphi'' a}{2} + \frac{\varphi''' a}{2.3}(x-a) + \frac{\varphi'''' a}{2.3.4}(x-a)^2 + \cdots,$$

donc on aura

$$r = -\frac{\varphi a}{(x-a)^2} - \frac{fa}{x-a} + R,$$

d'où l'on tire, en multipliant par ydx et intégrant,

$$vty = -\varphi a \int \frac{ydx}{(x-a)^2} - fa \int \frac{ydx}{x-a} + \int Rydx.$$

Cela posé, soit $z = \int \frac{ydx}{x-a}$, on aura en différentiant

$$\frac{dz}{da} = \int \frac{ydx}{(x-a)^2},$$

donc en substituant

$$vty = -\varphi a \frac{dz}{da} - fa.z + \int Rydx.$$

Soit $z = qp$, on aura en substituant

$$\int Rydx - vty = \varphi a.p\frac{dq}{da} + \varphi a.q\frac{dp}{da} + pq.fa.$$

Soit

$$\varphi a \frac{dq}{da} + fa.q = 0,$$

on aura en faisant $y = \psi x$,

$$q = \psi a, \quad \int Rydx - \frac{t.\psi x}{x-a} = \varphi a.\psi a\frac{dp}{da}.$$

donc

$$p = \iint \frac{R.\psi x}{\varphi a.\psi a} dx\,da - \int \frac{\psi x.\varphi x}{\psi a.\varphi a}\frac{da}{x-a}.$$

donc

(1) $$\frac{1}{\psi a}\int \frac{\psi x.dx}{x-a} - \psi x.\varphi x \int \frac{da}{(a-x)\,\psi a\,\varphi a} = \iint \frac{R.\psi x}{\varphi a.\psi a} dx\,da,$$

où l'on a

$$R = \tfrac{1}{2}\varphi'' a - f' a + (\tfrac{1}{3}\varphi''' a - \tfrac{1}{2}f'' a)(x-a) + \left(\frac{1}{2.4}\varphi'''' a - \frac{1}{2.3}f''' a\right)(x-a)^2 + \cdots$$

Le second membre de l'équation (1) peut toujours, comme on le voit, être développé en plusieurs termes de la forme:

$$A_{m,n}\int\frac{a^m.da}{\varphi a.\psi a}\int x^n\psi x.dx.$$

En faisant

$$\varphi x=\alpha+\alpha_1x+\alpha_2x^2+\alpha_3x^3+\dots,$$
$$fx=\beta+\beta_1x+\beta_2x^2+\beta_3x^3+\dots,$$

il est facile de trouver

$$A_{m,n}=(n+1)\alpha_{m+n+2}-\beta_{m+n+1};$$

on aura donc la formule générale:

(2) $$\frac{1}{\psi a}\int\frac{\psi x.dx}{x-a}-\psi x.\varphi x\int\frac{da}{(a-x)\varphi a.\psi a}$$
$$=\Sigma[(n+1)\alpha_{m+n+2}-\beta_{m+n+1}]\int\frac{a^m da}{\varphi a.\psi a}\int x^n\psi x.dx.$$

Il faut remarquer que les intégrales par rapport à x doivent être prises depuis une valeur de x qui réduit à zéro la fonction $\psi x.\varphi x$, et celles par rapport à a depuis une valeur de cette variable qui réduit à zéro la fonction $\frac{1}{\psi a}$.

La fonction $y=\psi x$ étant déterminée par l'équation

$$y.fx+\varphi x\frac{dy}{dx}=0,$$

il est clair qu'on a

$$y=e^{-\int\frac{fx}{\varphi x}dx};$$

donc y est de la forme

$$\psi x=\frac{e^p}{(x-\delta)^m(x-\delta_1)^{m_1}\dots},$$

m, m_1, etc. étant des nombres positifs moindre que l'unité. p est une fonction rationnelle, qui s'évanouit lorsque tous les facteurs de φx sont inégaux, si en même temps le degré de fx est moindre que celui de φx.

Supposons maintenant qu'on prenne les intégrales entre deux limites de x qui rendent égale à zéro la fonction $\varphi x.\psi x$, on aura

(3) $$\int\frac{\psi x.dx}{x-a}=\psi a\,\Sigma[(n+1)\alpha_{m+n+2}-\beta_{m+n+1}]\int x^n\psi x\,dx.\int\frac{a^m da}{\varphi a.\psi a}.$$

Si l'on donne de même à a une valeur telle que $\frac{1}{\psi a}$ devienne égal à zéro, on aura

(4) $$0=\Sigma[(n+1)\alpha_{m+n+2}-\beta_{m+n+1}]\int x^n\psi x\,dx.\int\frac{a^m da}{\varphi a.\psi a}.$$

Il y a un cas remarquable qu'il est important de considérer à part, savoir celui où

$$\frac{1}{\psi x} = \varphi x \cdot \psi x;$$

on a alors

$$\psi x = y = \frac{1}{\sqrt{\varphi x}},$$

donc

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}\frac{\varphi' x}{(\sqrt{\varphi x})^3}.$$

L'équation $y \cdot fx + \varphi x \frac{dy}{dx} = 0$ devient donc

$$fx - \tfrac{1}{2}\varphi' x = 0,$$

donc

$$\beta_m = \tfrac{1}{2}(m+1)\alpha_{m+1}.$$

L'équation (2) devient dans ce cas:

$$(5) \qquad \sqrt{\varphi a}\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{\varphi x}} - \sqrt{\varphi x}\int\frac{da}{(a-x)\sqrt{\varphi a}} = \Sigma\tfrac{1}{2}(n-m)\alpha_{m+n+2}\int\frac{x^n dx}{\sqrt{\varphi x}}\int\frac{a^m da}{\sqrt{\varphi a}}.$$

Pour vérifier cette formule dans un cas particulier, soit $\varphi x = 1 - x^2$, on aura $\alpha = 1$, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = -1$,

$$\sqrt{1-a^2}\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{1-x^2}} - \sqrt{1-x^2}\int\frac{da}{(a-x)\sqrt{1-a^2}} = 0,$$

ce qui est vrai, car on a

$$\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2\sqrt{1-a^2}}\log\frac{ax-1+\sqrt{1-a^2}\sqrt{1-x^2}}{ax-1-\sqrt{1-a^2}\sqrt{1-x^2}}$$

$$\int\frac{da}{(a-x)\sqrt{1-a^2}} = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\log\frac{ax-1+\sqrt{1-a^2}\sqrt{1-x^2}}{ax-1-\sqrt{1-a^2}\sqrt{1-x^2}}.$$

Si l'on fait $\varphi x = (1-x^2)(1-c^2x^2)$, on a $\alpha = 1$, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = -(1+c^2)$, $\alpha_3 = 0$, $\alpha_4 = c^2$, donc

$$\sqrt{(1-a^2)(1-c^2a^2)}\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}} - \sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}\int\frac{da}{(a-x)\sqrt{(1-a^2)(1-c^2a^2)}}$$

$$= c^2\int\frac{x^2dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}}\int\frac{da}{\sqrt{(1-a^2)(1-c^2a^2)}} - c^2\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}}\int\frac{a^2da}{\sqrt{(1-a^2)(1-c^2a^2)}}.$$

Cette formule contient implicitement les propriétés remarquables des fonctions elliptiques que M. *Legendre* a données dans ses Ex. de calc. int. t. 1. p. 134 et sq.

IX.

EXTENSION DE LA THÉORIE PRÉCÉDENTE.

Soit y une fonction qui satisfasse à l'équation

$$(1) \qquad 0 = sy + s_1 \frac{dy}{dx} + s_2 \frac{d^2y}{dx^2} + \cdots + s_m \frac{d^my}{dx^m},$$

$s, s_1, s_2 \ldots$ étant des fonctions entières de x.

Soit de même

$$\int rydx = vy + v_1 \frac{dy}{dx} + \cdots + v_{m-2} \frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} + ts_m \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}},$$

on aura en différentiant:

$$ry = \frac{dv}{dx} y + \left(v + \frac{dv_1}{dx}\right) \frac{dy}{dx} + \left(v_1 + \frac{dv_2}{dx}\right) \frac{d^2y}{dx^2} + \cdots + \left(v_{m-2} + \frac{d(ts_m)}{dx}\right) \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + ts_m \frac{d^my}{dx^m};$$

or

$$s_m \frac{d^my}{dx^m} = -sy - s_1 \frac{dy}{dx} - s_2 \frac{d^2y}{dx^2} - \cdots - s_{m-1} \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}};$$

donc on aura en substituant et égalant ensuite à zéro les divers coefficiens:

$$-r = st - \frac{dv}{dx},$$

$$v = s_1 t - \frac{dv_1}{dx},$$

$$v_1 = s_2 t - \frac{dv_2}{dx},$$

. . . .

$$v_{m-2} = s_{m-1} t - \frac{d(ts_m)}{dx}.$$

De là on tire aisément

$$(2)\quad \begin{cases} v_{\mu-1} = s_\mu t - \dfrac{d(s_{\mu+1}t)}{dx} + \dfrac{d^2(s_{\mu+2}t)}{dx^2} - \cdots, \\ -r = s.t - \dfrac{d(s_1 t)}{dx} + \dfrac{d^2(s_2 t)}{dx^2} - \cdots \pm \dfrac{d^{m-1}(s_{m-1}t)}{dx^{m-1}} \mp \dfrac{d^m(s_m t)}{dx^m}. \end{cases}$$

Cela posé, soit $t = \frac{1}{x-a}$, et supposons que

$$(3)\quad \begin{cases} st = \dfrac{s'}{x-a} + R, \\ s_1 t = \dfrac{s'_1}{x-a} + R_1, \\ s_2 t = \dfrac{s'_2}{x-a} + R_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ s_{m-1} t = \dfrac{s'_{m-1}}{x-a} + R_{m-1}, \\ s_m t = \dfrac{s'_m}{x-a} + R_m, \end{cases}$$

s', s'_1, s'_2 etc. étant des constantes et R, R_1, $R_2 \ldots$ des fonctions entières de x; il est clair que s'_μ est la même fonction de a que s_μ l'est de x. En différentiant on trouvera

$$\frac{d^\mu(s_\mu t)}{dx^\mu} = (-1)^\mu \Gamma(\mu+1) \frac{s'_\mu}{(x-a)^{\mu+1}} + \frac{d^\mu R_\mu}{dx^\mu}.$$

donc la valeur de $-r$ devient

$$(4)\quad -r = \frac{s'}{x-a} + \frac{s'_1}{(x-a)^2} + \Gamma(3)\frac{s'_2}{(x-a)^3} + \cdots + \Gamma(m+1)\frac{s'_m}{(x-a)^{m+1}} + \varrho,$$

en faisant

$$\varrho = R - \frac{dR_1}{dx} + \frac{d^2 R_2}{dx^2} - \cdots \mp \frac{d^m R_m}{dx^m}.$$

Cela posé soit

$$z = \int \frac{y\,dx}{x-a};$$

on aura en différentiant par rapport à a,

$$\frac{dz}{da} = \int \frac{y\,dx}{(x-a)^2},$$

$$\frac{d^2 z}{da^2} = \Gamma(3) \int \frac{y\,dx}{(x-a)^3},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d^m z}{da^m} = \Gamma(m+1)\int\frac{y\,dx}{(x-a)^{m+1}};$$

or en multipliant la valeur de r par ydx et intégrant, on obtiendra

$$-\chi' = s'\int\frac{y\,dx}{x-a} + s'_1\int\frac{y\,dx}{(x-a)^2} + s'_2\Gamma(3)\int\frac{y\,dx}{(x-a)^3} + \cdots + s'_m\Gamma(m+1)\int\frac{y\,dx}{(x-a)^{m+1}} + \int\varrho y\,dx$$

en faisant pour abréger

$$\chi = vy + v_1\frac{dy}{dx} + \cdots + v_{m-2}\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} + s_m t\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}, \text{ et } \chi' = \chi - \chi_0.$$

On a donc l'équation suivante en z

(5) $$-\chi' - \int\varrho y\,dx = s'z + s'_1\frac{dz}{da} + s'_2\frac{d^2z}{da^2} + \cdots + s'_m\frac{d^mz}{da^m}.$$

Supposons maintenant qu'on connaisse l'intégrale complète de l'équation différentielle qui détermine la fonction y, et soit

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 + c_3y_3 + \cdots + c_my_m$$

cette intégrale. On trouvera alors, comme on le voit sans peine,

$$z = y'_1\int p_1\,da + y'_2\int p_2\,da + y'_3\int p_3\,da + \cdots + y'_m\int p_m\,da,$$

où y'_μ est la même fonction de a que y_μ l'est de x, et p_1, $p_2 \ldots$ des fonctions rationnelles de y'_1, y'_2, $y'_3 \ldots$ et de leurs dérivées, et des fonctions entières de $\chi' + \int\varrho y\,dx$ de la forme

$$p_\mu = \frac{\theta_\mu(\chi' + \int\varrho y\,dx)}{s'_m}.$$

On a donc

(6) $$\int\frac{y\,dx}{x-a} = y'_1\int\frac{da.\theta_1(\chi'+\int\varrho y\,dx)}{s'_m} + y'_2\int\frac{da.\theta_2(\chi'+\int\varrho y\,dx)}{s'_m} + \cdots + y'_m\int\frac{da.\theta_m(\chi'+\int\varrho y\,dx)}{s'_m}.$$

Quant aux quantités θ_1, θ_2, etc. on peut remarquer qu'elles sont déterminées par les équations suivantes:

(7) $$\begin{cases} 0 = y'_1\theta_1 + y'_2\theta_2 + y'_3\theta_3 + \cdots + y'_m\theta_m, \\ 0 = \frac{dy'_1}{da}\theta_1 + \frac{dy'_2}{da}\theta_2 + \frac{dy'_3}{da}\theta_3 + \cdots + \frac{dy'_m}{da}\theta_m, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0 = \frac{d^{m-2}y'_1}{da^{m-2}}\theta_1 + \frac{d^{m-2}y'_2}{da^{m-2}}\theta_2 + \frac{d^{m-2}y'_3}{da^{m-2}}\theta_3 + \cdots + \frac{d^{m-2}y'_m}{da^{m-2}}\theta_m, \\ -1 = \frac{d^{m-1}y'_1}{da^{m-1}}\theta_1 + \frac{d^{m-1}y'_2}{da^{m-1}}\theta_2 + \frac{d^{m-1}y'_3}{da^{m-1}}\theta_3 + \cdots + \frac{d^{m-1}y'_m}{da^{m-1}}\theta_m. \end{cases}$$

De là on tire aisément

$$(2)\quad \begin{cases} v_{\mu-1} = s_\mu t - \frac{d(s_{\mu+1}t)}{dx} + \frac{d^2(s_{\mu+2}t)}{dx^2} - \cdots, \\ -r = s.t - \frac{d(s_1 t)}{dx} + \frac{d^2(s_2 t)}{dx^2} - \cdots \pm \frac{d^{m-1}(s_{m-1}t)}{dx^{m-1}} \mp \frac{d^m(s_m t)}{dx^m}. \end{cases}$$

Cela posé, soit $t = \frac{1}{x-a}$, et supposons que

$$(3)\quad \begin{cases} st = \frac{s'}{x-a} + R, \\ s_1 t = \frac{s'_1}{x-a} + R_1, \\ s_2 t = \frac{s'_2}{x-a} + R_2, \\ \dots\dots\dots\dots \\ s_{m-1} t = \frac{s'_{m-1}}{x-a} + R_{m-1}, \\ s_m t = \frac{s'_m}{x-a} + R_m, \end{cases}$$

s', s'_1, s'_2 etc. étant des constantes et R, R_1, $R_2 \dots$ des fonctions entières de x; il est clair que s'_μ est la même fonction de a que s_μ l'est de x. En différentiant on trouvera

$$\frac{d^\mu(s_\mu t)}{dx^\mu} = (-1)^\mu \Gamma(\mu+1) \frac{s'_\mu}{(x-a)^{\mu+1}} + \frac{d^\mu R_\mu}{dx^\mu}.$$

donc la valeur de $-r$ devient

$$(4)\quad -r = \frac{s'}{x-a} + \frac{s'_1}{(x-a)^2} + \Gamma(3)\frac{s'_2}{(x-a)^3} + \cdots + \Gamma(m+1)\frac{s'_m}{(x-a)^{m+1}} + \varrho,$$

en faisant

$$\varrho = R - \frac{dR_1}{dx} + \frac{d^2 R_2}{dx^2} - \cdots \mp \frac{d^m R_m}{dx^m}.$$

Cela posé soit

$$z = \int \frac{y\,dx}{x-a};$$

on aura en différentiant par rapport à a,

$$\frac{dz}{da} = \int \frac{y\,dx}{(x-a)^2},$$

$$\frac{d^2 z}{da^2} = \Gamma(3) \int \frac{y\,dx}{(x-a)^3},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{d^m z}{da^m} = \Gamma(m+1)\int\frac{y\,dx}{(x-a)^{m+1}};$$

or en multipliant la valeur de r par ydx et intégrant, on obtiendra

$$-\chi' = s'\int\frac{ydx}{x-a} + s'_1\int\frac{ydx}{(x-a)^2} + s'_2\,\Gamma(3)\int\frac{ydx}{(x-a)^3} + \cdots + s'_m\,\Gamma(m+1)\int\frac{ydx}{(x-a)^{m+1}} + \int\varrho y\,dx$$

en faisant pour abréger

$$\chi = vy + v_1\frac{dy}{dx} + \cdots + v_{m-2}\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} + s_m t\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}},\ \text{ et }\ \chi' = \chi - \chi_0.$$

On a donc l'équation suivante en z

$$(5)\qquad -\chi' - \int\varrho y\,dx = s'z + s'_1\frac{dz}{da} + s'_2\frac{d^2z}{da^2} + \cdots + s'_m\frac{d^mz}{da^m}.$$

Supposons maintenant qu'on connaisse l'intégrale complète de l'équation différentielle qui détermine la fonction y, et soit

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 + c_3y_3 + \cdots + c_my_m$$

cette intégrale. On trouvera alors, comme on le voit sans peine,

$$z = y'_1\int p_1\,da + y'_2\int p_2\,da + y'_3\int p_3\,da + \cdots + y'_m\int p_m\,da,$$

où y'_μ est la même fonction de a que y_μ l'est de x, et $p_1, p_2 \ldots$ des fonctions rationnelles de $y'_1, y'_2, y'_3 \ldots$ et de leurs dérivées, et des fonctions entières de $\chi' + \int\varrho y\,dx$ de la forme

$$p_\mu = \frac{\theta_\mu(\chi' + \int\varrho y\,dx)}{s'_m}.$$

On a donc

$$(6)\int\frac{ydx}{x-a} = y'_1\int\frac{da.\theta_1(\chi'+\int\varrho y\,dx)}{s'_m} + y'_2\int\frac{da.\theta_2(\chi'+\int\varrho y\,dx)}{s'_m} + \cdots + y'_m\int\frac{da.\theta_m(\chi'+\int\varrho y\,dx)}{s'_m}.$$

Quant aux quantités θ_1, θ_2, etc. on peut remarquer qu'elles sont déterminées par les équations suivantes:

$$(7)\quad\begin{cases} 0 = y'_1\theta_1 + y'_2\theta_2 + y'_3\theta_3 + \cdots + y'_m\theta_m, \\ 0 = \frac{dy'_1}{da}\theta_1 + \frac{dy'_2}{da}\theta_2 + \frac{dy'_3}{da}\theta_3 + \cdots + \frac{dy'_m}{da}\theta_m, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0 = \frac{d^{m-2}y'_1}{da^{m-2}}\theta_1 + \frac{d^{m-2}y'_2}{da^{m-2}}\theta_2 + \frac{d^{m-2}y'_3}{da^{m-2}}\theta_3 + \cdots + \frac{d^{m-2}y'_m}{da^{m-2}}\theta_m, \\ -1 = \frac{d^{m-1}y'_1}{da^{m-1}}\theta_1 + \frac{d^{m-1}y'_2}{da^{m-1}}\theta_2 + \frac{d^{m-1}y'_3}{da^{m-1}}\theta_3 + \cdots + \frac{d^{m-1}y'_m}{da^{m-1}}\theta_m. \end{cases}$$

Les quantités θ_1, θ_2, $\theta_3\ldots$ sont donc des fonctions de a seul. Pour appliquer ce qui précède, supposons $m=1$ et $m=2$.

1. Si $m=1$, on aura

$$-1=y'_1\theta_1, \quad \text{donc} \quad \theta_1=-\frac{1}{y'_1};$$

de même en supposant $\chi_0=0$

$$\chi'=\chi=s_1 t y=\frac{s_1 y}{x-a}.$$

donc l'équation (6) deviendra

$$\int\frac{y\,dx}{x-a}=-y'_1\int da\frac{1}{s'_1 y'_1}\left(\frac{s_1 y}{x-a}+\int\varrho y\,dx\right),$$

c'est-à-dire

$$\int\frac{y\,dx}{x-a}+s_1 y'_1 y\int\frac{da}{(x-a)y'_1 s'_1}=-y'_1\iint\varrho\frac{y}{y'_1 s'_1}dx\,da,$$

la même équation que l'équation (1) du mémoire précédent.

2. Si $m=2$, on aura

$$0=y'_1\theta_1+y'_2\theta_2, \quad -1=\frac{dy'_1}{da}\theta_1+\frac{dy'_2}{da}\theta_2,$$

d'où l'on tire

$$\theta_1=\frac{y'_2}{y'_1\frac{dy'_2}{da}-y'_2\frac{dy'_1}{da}}, \quad \theta_2=\frac{y'_1}{y'_2\frac{dy'_1}{da}-y'_1\frac{dy'_2}{da}}.$$

Or des deux équations

$$\frac{d^2y'_1}{da^2}+\frac{s'_1}{s'_2}\frac{dy'_1}{da}+\frac{s'}{s'_2}y'_1=0,$$

$$\frac{d^2y'_2}{da^2}+\frac{s'_1}{s'_2}\frac{dy'_2}{da}+\frac{s'}{s'_2}y'_2=0,$$

on tirera

$$y'_2\frac{d^2y'_1}{da^2}-y'_1\frac{d^2y'_2}{da^2}+\frac{s'_1}{s'_2}\left(y'_2\frac{dy'_1}{da}-y'_1\frac{dy'_2}{da}\right)=0;$$

donc

$$y'_2\frac{dy'_1}{da}-y'_1\frac{dy'_2}{da}=e^{-\int\frac{s'_1}{s'_2}da};$$

par conséquent

$$\theta_1=-y'_2 e^{\int\frac{s'_1}{s'_2}da}; \quad \theta_2=y'_1 e^{\int\frac{s'_1}{s'_2}da}.$$

On a de même

$$\chi=vy+s_2 t\frac{dy}{dx};$$

or $v=s_1 t-\frac{d(s_2 t)}{dx}=\frac{s'_1}{x-a}+\frac{s'_2}{(x-a)^2}+R_1-\frac{dR_2}{dx}$, et $s_2 t=\frac{s'_2}{x-a}+R_2$, donc

$$\chi = \frac{s'_1 y + s'_2 \frac{dy}{dx}}{x-a} + \frac{s'_2 y}{(x-a)^2} + \left(R_1 - \frac{dR_2}{dx}\right) y + R_2 \frac{dy}{dx}.$$

L'équation (6) deviendra donc dans ce cas

$$\begin{aligned}
\int \frac{y\,dx}{x-a} = & -y'_1 y^1 \int \frac{da}{x^1-a}\cdot\frac{s'_1}{s'_2} e^{\int \frac{s'_1}{s'_2} da} y'_2 - y'_1 \frac{dy^1}{dx^1} \int \frac{da}{x^1-a} e^{\int \frac{s'_1}{s'_2} da} y'_2 \\
& + y'_1 y^0 \int \frac{da}{x^0-a}\cdot\frac{s'_1}{s'_2} e^{\int \frac{s'_1}{s'_2} da} y'_2 + y'_1 \frac{dy^0}{dx^0} \int \frac{da}{x^0-a} e^{\int \frac{s'_1}{s'_2} da} y'_2 \\
& + y'_2 y^1 \int \frac{da}{x^1-a}\cdot\frac{s'_1}{s'_2} e^{\int \frac{s'_1}{s'_2} da} y'_1 + y'_2 \frac{dy^1}{dx^1} \int \frac{da}{x^1-a} e^{\int \frac{s'_1}{s'_2} da} y'_1 \\
& - y'_2 y^0 \int \frac{da}{x^0-a}\cdot\frac{s'_1}{s'_2} e^{\int \frac{s'_1}{s'_2} da} y'_1 - y'_2 \frac{dy^0}{dx^0} \int \frac{da}{x^0-a} e^{\int \frac{s'_1}{s'_2} da} y'_1 \\
& - y'_1 y^1 \int \frac{da}{(x^1-a)^2} e^{\int \frac{s'_1}{s'_2} da} y'_2 + y'_1 y^0 \int \frac{da}{(x^0-a)^2} e^{\int \frac{s'_1}{s'_2} da} y'_2 \\
& + y'_2 y^1 \int \frac{da}{(x^1-a)^2} e^{\int \frac{s'_1}{s'_2} da} y'_1 - y'_2 y^0 \int \frac{da}{(x^0-a)^2} e^{\int \frac{s'_1}{s'_2} da} y'_1 \\
& - y'_1 \iint \frac{y'_2}{s'_2} e^{\int \frac{s'_1}{s'_2} da} \varrho y\,dx\,da + y'_2 \iint \frac{y'_1}{s'_2} e^{\int \frac{s'_1}{s'_2} da} \varrho y\,dx\,da \\
& - y'_1 y^1 \int \frac{da}{s'_2} \left(R_1^1 - \frac{dR_2^1}{dx^1}\right) e^{\int \frac{s'_1}{s'_2} da} y'_2 + y'_1 y^0 \int \frac{da}{s'_2} \left(R_1^0 - \frac{dR_2^0}{dx^0}\right) e^{\int \frac{s'_1}{s'_2} da} y'_2 \\
& + y'_2 y^1 \int \frac{da}{s'_2} \left(R_1^1 - \frac{dR_2^1}{dx^1}\right) e^{\int \frac{s'_1}{s'_2} da} y'_1 - y'_2 y^0 \int \frac{da}{s'_2} \left(R_1^0 - \frac{dR_2^0}{dx^0}\right) e^{\int \frac{s'_1}{s'_2} da} y'_1 \\
& - y'_1 \frac{dy^1}{dx^1} \int \frac{da}{s'_2} R_2^1 e^{\int \frac{s'_1}{s'_2} da} y'_2 + y'_1 \frac{dy^0}{dx^0} \int \frac{da}{s'_2} R_2^0 e^{\int \frac{s'_1}{s'_2} da} y'_2 \\
& + y'_2 \frac{dy^1}{dx^1} \int \frac{da}{s'_2} R_2^1 e^{\int \frac{s'_1}{s'_2} da} y'_1 - y'_2 \frac{dy^0}{dx^0} \int \frac{da}{s'_2} R_2^0 e^{\int \frac{s'_1}{s'_2} da} y'_1,
\end{aligned}$$

ou bien en faisant

$$\chi = \left[\left(s_1 - \frac{ds_2}{dx}\right) y + s_2 \frac{dy}{dx}\right] \frac{1}{x-a} + \frac{y s_2}{(x-a)^2} = \frac{p}{x-a} + \frac{q}{(x-a)^2},$$

et

$$\chi' = \frac{p^1}{x^1-a} - \frac{p^0}{x^0-a} + \frac{q^1}{(x^1-a)^2} - \frac{q^0}{(x^0-a)^2},$$

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} \int \frac{y\,dx}{x-a} &= y'_1 \iint_{s'_2}^{\theta_1} \varrho y\,da\,dx + y'_2 \iint_{s'_2}^{\theta_2} \varrho y\,da\,dx \\ &+ y'_1 p^1 \int_{s'_2}^{\theta_1} \cdot \frac{da}{x^1-a} - y'_1 p^0 \int_{s'_2}^{\theta_1} \cdot \frac{da}{x^0-a} \\ &+ y'_2 p^1 \int_{s'_2}^{\theta_2} \cdot \frac{da}{x^1-a} - y'_2 p^0 \int_{s'_2}^{\theta_2} \cdot \frac{da}{x^0-a} \\ &+ y'_1 q^1 \int_{s'_2}^{\theta_1} \cdot \frac{da}{(x^1-a)^2} - y'_1 q^0 \int_{s'_2}^{\theta_1} \cdot \frac{da}{(x^0-a)^2} \\ &+ y'_2 q^1 \int_{s'_2}^{\theta_2} \cdot \frac{da}{(x^1-a)^2} - y'_2 q^0 \int_{s'_2}^{\theta_2} \cdot \frac{da}{(x^0-a)^2}. \end{aligned}\right.$$

Si l'on suppose $s_1=0$, $s_2=0$ pour $x=x^1$ et $x=x^0$, on aura la formule:

$$(9)\quad \int \frac{y\,dx}{x-a} = c\left(y'_1 \iint \frac{y'_2}{s'_2}\, e^{\int \frac{s'_1}{s'_2} da} \varrho y\,da\,dx - y'_2 \iint \frac{y'_1}{s'_2}\, e^{\int \frac{s'_1}{s'_2} da} \varrho y\,da\,dx\right).$$

Dans la formule (8) on peut faire $y = \sqrt[n]{p+\sqrt{p^2-q^n}} + \dfrac{q}{\sqrt[n]{p+\sqrt{p^2-q^n}}}$.

Soit

$$z = \int\left(\frac{\alpha_1}{x-a} + \frac{\alpha_2}{(x-a)^2} + \frac{\Gamma(3)\,\alpha_3}{(x-a)^3} + \frac{\Gamma(4)\,\alpha_4}{(x-a)^4} + \cdots + \frac{\Gamma m\,.\,\alpha_m}{(x-a)^m}\right) y\,dx,$$

$\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_m$ étant des fonctions de a, cherchons s'il est possible de faire en sorte que z satisfasse à l'équation

$$\beta z + \gamma \frac{dz}{da} = \int \varrho y\,dx + vy + v_1 \frac{dy}{dx} + \cdots + v_{m-2} \frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} + \frac{s_m}{x-a} \cdot \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}.$$

En différentiant l'expression de z par rapport à a, on aura

$$\frac{dz}{da} = \int\left\{\frac{\frac{d\alpha_1}{da}}{x-a} + \frac{\alpha_1 + \frac{d\alpha_2}{da}}{(x-a)^2} + \frac{\left(\alpha_2 + \frac{d\alpha_3}{da}\right)\Gamma(3)}{(x-a)^3} + \frac{\left(\alpha_3 + \frac{d\alpha_4}{da}\right)\Gamma(4)}{(x-a)^4} + \cdots\right\} y\,dx;$$

donc en substituant on obtient une équation de la forme

$$\int r y\,dx = \chi,$$

où

$$-r=\varrho-\frac{\beta\alpha_1+\gamma\frac{d\alpha_1}{da}}{x-a}-\frac{\beta\alpha_2+\gamma\left(\alpha_1+\frac{d\alpha_2}{da}\right)}{(x-a)^2}-\frac{\left[\beta\alpha_3+\gamma\left(\alpha_2+\frac{d\alpha_3}{da}\right)\right]\Gamma(3)}{(x-a)^3}-\cdots$$

$$\cdots-\frac{\left[\beta\alpha_m+\gamma\left(\alpha_{m-1}+\frac{d\alpha_m}{da}\right)\right]\Gamma m}{(x-a)^m}-\frac{\gamma\alpha_m\,\Gamma(m+1)}{(x-a)^{m+1}}.$$

Or on a vu que

$$-r=\varrho+\frac{s'}{x-a}+\frac{s'_1}{(x-a)^2}+\frac{s'_2\,\Gamma(3)}{(x-a)^3}+\cdots+\frac{s'_m\,\Gamma(m+1)}{(x-a)^{m+1}};$$

on a donc les équations suivantes:

$$s'+\beta\alpha_1+\gamma\frac{d\alpha_1}{da}=0,$$

$$s'_1+\beta\alpha_2+\gamma\left(\alpha_1+\frac{d\alpha_2}{da}\right)=0,$$

$$s'_2+\beta\alpha_3+\gamma\left(\alpha_2+\frac{d\alpha_3}{da}\right)=0,$$

$$s'_3+\beta\alpha_4+\gamma\left(\alpha_3+\frac{d\alpha_4}{da}\right)=0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$s'_{m-1}+\beta\alpha_m+\gamma\left(\alpha_{m-1}+\frac{d\alpha_m}{da}\right)=0,$$

$$s'_m+\gamma\,\alpha_m=0.$$

Donc

$$\alpha_n=-\frac{s'_n}{\gamma}-\frac{\beta}{\gamma}\alpha_{n+1}-\frac{d\alpha_{n+1}}{da},$$

ou bien

$$\alpha_n=\delta_n+\varepsilon\,\alpha_{n+1}-\frac{d\alpha_{n+1}}{da},$$

en faisant pour abréger $-\frac{s'_n}{\gamma}=\delta_n$ et $-\frac{\beta}{\gamma}=\varepsilon$. De là on tire

$$\alpha_{n+1}=\delta_{n+1}+\varepsilon\,\alpha_{n+2}-\frac{d\alpha_{n+2}}{da};$$

donc

$$\alpha_n=\delta_n+\varepsilon\delta_{n+1}+\left(\varepsilon^2-\frac{d\varepsilon}{da}\right)\alpha_{n+2}-2\varepsilon\frac{d\alpha_{n+2}}{da}-\frac{d\delta_{n+1}}{da}+\frac{d^2\alpha_{n+2}}{da^2}.$$

Comme on a $m+1$ équations et $m+2$ indéterminées, on peut faire ε constant; alors on a

$$\alpha_n=\delta_n+\varepsilon\delta_{n+1}-\frac{d\delta_{n+1}}{da}+\varepsilon^2\alpha_{n+2}-2\varepsilon\frac{d\alpha_{n+2}}{da}+\frac{d^2\alpha_{n+2}}{da^2}.$$

Il est clair que α_n est de la forme

$$\begin{aligned}\alpha_n = \delta_n + \varepsilon\,\delta_{n+1} - \frac{d\delta_{n+1}}{da} \\ + \varepsilon^2\,\delta_{n+2} - 2\varepsilon\frac{d\delta_{n+2}}{da} + \frac{d^2\delta_{n+2}}{da^2} \\ + \varepsilon^3\,\delta_{n+3} - 3\varepsilon^2\frac{d\delta_{n+3}}{da} + 3\varepsilon\frac{d^2\delta_{n+3}}{da^2} - \frac{d^3\delta_{n+3}}{da^3} + \cdots.\end{aligned}$$

En faisant $n = 0$, on aura

$$\begin{aligned}0 = \delta + \varepsilon\delta_1 - \frac{d\delta_1}{da} \\ + \varepsilon^2\delta_2 - 2\varepsilon\frac{d\delta_2}{da} + \frac{d^2\delta_2}{da^2} \\ + \varepsilon^3\delta_3 - 3\varepsilon^2\frac{d\delta_3}{da} + 3\varepsilon\frac{d^2\delta_3}{da^2} - \frac{d^3\delta_3}{da^3} \\ + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ + \varepsilon^m\delta_m - m\varepsilon^{m-1}\frac{d\delta^m}{da} + \frac{m(m-1)}{2}\varepsilon^{m-2}\frac{d^2\delta_m}{da^2} - \cdots \pm \frac{d^m\delta_m}{da^m}.\end{aligned}$$

Cette équation détermine la fonction γ.

En substituant au lieu de δ_n sa valeur $-\frac{s'_n}{\gamma} = s'_n\,\omega$, on aura une équation linéaire en ω.

Ayant ainsi trouvé toutes les inconnues, on a

$$\gamma\left(\frac{dz}{da} - \varepsilon z\right) = \chi + \int \varrho y\,dx,$$

d'où l'on tirera la valeur de z.

X.

SUR LA COMPARAISON DES FONCTIONS TRANSCENDANTES.

Soit y une fonction algébrique quelconque déterminée par l'équation

(1) $$0 = \alpha + \alpha_1 y + \alpha_2 y^2 + \cdots + \alpha_m y^m,$$

α, α_1, α_2 ... étant des fonctions entières de x. Soit de même

(2) $$0 = q + q_1 y + q_2 y^2 + q_3 y^3 + \cdots + q_{m-1} y^{m-1},$$

q, q_1, q_2 etc. étant des fonctions entières de x et d'un nombre quelconque d'autres variables, savoir les coefficiens des diverses puissances de x dans les fonctions q, q_1, q_2, etc. Soient a, a_1, a_2, a_3 ... ces coefficiens. Cela posé, on peut tirer des deux équations (1) et (2) la fonction y exprimée rationnellement en x et en a, a_1, a_2 etc. Soit r cette fonction, on aura

(3) $$y = r.$$

En substituant cette valeur de y dans l'une des équations (1) et (2), on aura une équation

(4) $$s = 0,$$

s étant une fonction entière de x, a, a_1, a_2 ....

Cette équation donne x en fonction des quantités a, a_1, a_2 etc. En différentiant par rapport à ces quantités on aura

$$\frac{ds}{dx} dx + d's = 0,$$

la caractéristique d' étant uniquement relative aux quantités a, a_1, a_2 etc.

De là on tire

$$dx = -\frac{d's}{\frac{ds}{dx}},$$

et en multipliant par $f(y, x)$, où f désigne une fonction rationnelle de y et x,

$$(5) \qquad f(y, x)\,dx = -\frac{f(r, x)}{\frac{ds}{dx}}\,d's,$$

où on a mis r au lieu de y dans le second membre. On aura donc, en développant la différentielle $d's$, une équation de cette forme:

$$(6) \qquad f(y, x)\,dx = \varphi x\,.\,da + \varphi_1 x\,.\,da_1 + \varphi_2 x\,.\,da_2 + \cdots,$$

φx, $\varphi_1 x$ etc. étant des fonctions rationnelles de x, a, a_1, a_2 etc.

Cela posé, soient $x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$ les racines de l'équation $s = 0$; on aura, en substituant ces valeurs au lieu de x dans l'équation (6), n équations semblables qui, ajoutées ensemble, donneront celle-ci:

$$\begin{aligned} f(y_1, x_1)\,dx_1 + f(y_2, x_2)\,dx_2 + \cdots + f(y_n, x_n)\,dx_n \\ = [\varphi x_1 + \varphi x_2 + \varphi x_3 + \cdots + \varphi x_n]\,da \\ + [\varphi_1 x_1 + \varphi_1 x_2 + \varphi_1 x_3 + \cdots + \varphi_1 x_n]\,da_1 \\ + [\varphi_2 x_1 + \varphi_2 x_2 + \varphi_2 x_3 + \cdots + \varphi_2 x_n]\,da_2 \\ + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdot, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$f(y_1, x_1)\,dx_1 + f(y_2, x_2)\,dx_2 + \cdots + f(y_n, x_n)\,dx_n = R\,da + R_1\,da_1 + R_2\,da_2 + \cdots,$$

où R, R_1, $R_2 \ldots$ sont, comme il est aisé de le voir, des fonctions rationnelles de a, a_1, $a_2 \ldots$.

Maintenant le premier membre de cette équation est une différentielle complète; le second membre est donc aussi immédiatement intégrable. En désignant donc

$$\int (R\,da + R_1\,da_1 + R_2\,da_2 + \cdots)$$

par ϱ, il est clair que ϱ est une fonction algébrique et logarithmique de a, a_1, $a_2 \ldots$.

On aura donc, en intégrant et désignant $\int f(y, x)\,dx$ par ψx,

$$(7) \qquad \psi x_1 + \psi x_2 + \psi x_3 + \cdots + \psi x_n = C + \varrho.$$

Cette équation exprime, comme on le voit, une propriété de la fonction ψx, qui en général est transcendante.

Les quantités $x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$ étant des fonctions des variables indépendantes $a, a_1, a_2 \ldots$, il est clair qu'en supposant que le nombre de ces variables est μ, on peut regarder un nombre μ des quantités $x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$ comme indéterminées, et les $n-\mu$ autres comme des fonctions de celles-ci. On peut trouver ces fonctions de la manière suivante.

Soient $x_1, x_2, x_3 \ldots x_\mu$ données, et faisons

$$p = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_\mu),$$

on aura, en divisant l'équation $s=0$ par p, une équation

$$s'=0,$$

dont les racines sont les quantités $x_{\mu+1}, x_{\mu+2}, \ldots x_n$.

Dans cette équation les coefficiens contiendront les quantités $a, a_1, a_2 \ldots a_{\mu-1}$; il faut donc exprimer ces quantités au moyen des quantités $x_1, x_2, x_3 \ldots x_\mu$. Cela peut se faire de la manière la plus facile en mettant dans l'équation (2) au lieu de x successivement $x_1, x_2, x_3 \ldots x_\mu$. En effet, on obtiendra alors μ équations linéaires en $a, a_1, a_2 \ldots a_{\mu-1}$ qui serviront à les déterminer. En substituant ensuite ces valeurs dans l'équation $s'=0$, on aura une équation du degré $n-\mu$, dont tous les coefficiens sont des fonctions des quantités $x_1, x_2, x_3 \ldots x_\mu$; par cette équation on peut donc déterminer les fonctions $x_{\mu+1}, x_{\mu+2} \ldots x_n$.

Il n'est pas difficile de se convaincre que, quel que soit le nombre μ, on peut toujours faire en sorte que $n-\mu$ devienne indépendant de μ. Au moyen de l'équation (7) on peut donc exprimer la somme d'un nombre quelconque de fonctions de la forme ψx par un nombre déterminé de fonctions de la même forme, savoir:

$$\psi x_1 + \psi x_2 + \cdots + \psi x_\mu = C + \varrho - (\psi z_1 + \psi z_2 + \psi z_3 + \cdots + \psi z_\nu),$$

en faisant

$$x_{\mu+k} = z_k \quad \text{et} \quad n-\mu = \nu.$$

On peut déterminer la constante en donnant à chacune des quantités $x_1, x_2 \ldots x_\mu$, une valeur particulière. Alors la formule devient

$$(8) \qquad \begin{aligned} \psi x_1 + \psi x_2 + \cdots + \psi x_\mu = \varrho + \psi x'_1 + \psi x'_2 + \cdots + \psi x'_\mu \\ - \varrho' - \psi z_1 - \psi z_2 - \cdots - \psi z_\nu \\ + \psi z'_1 + \psi z'_2 + \cdots + \psi z'_\nu, \end{aligned}$$

en désignant par z'_k la valeur de z_k lorsqu'on donne aux variables $x_1, x_2, \ldots x_\mu$ les valeurs $x'_1, x'_2 \ldots x'_\mu$.

Dans le cas où μ est plus grand que ν on peut trouver une formule beaucoup plus simple. En effet supposons qu'on ait entre les quantités $x_1, x_2 \ldots x_\mu$ les relations suivantes:

(9) $$c_1 = z_1,\quad c_2 = z_2,\quad c_3 = z_3, \ldots\quad c_\nu = z_\nu,$$

on aura aussi

$$\psi x_1 + \psi x_2 + \cdots + \psi x_\mu = c + \varrho,$$

ou bien

$$\psi x_1 + \psi x_2 + \cdots + \psi x_\mu = \varrho - \varrho' + \psi x'_1 + \psi x'_2 + \cdots + \psi x'_\mu.$$

Parmi les quantités $x_1, x_2 \ldots x_\mu$, $\mu - \nu$ sont des variables indépendantes, les autres sont des fonctions de celles-ci, déterminées par les équations (9). On peut donc faire

(10) $$\psi x'_{\nu+1} = 0,\quad \psi x'_{\nu+2} = 0 \ldots \psi x'_\mu = 0,$$

et alors on aura

(11) $$\psi x_1 + \psi x_2 + \cdots + \psi x_\mu = \varrho - \varrho' + \psi x'_1 + \psi x'_2 + \cdots + \psi x'_\nu.$$

Les quantités $x_1, x_2, x_3 \ldots x_\mu$ sont liées entre elles par les équations (9), mais comme ces équations contiennent $\mu + \nu$ indéterminées, savoir

$$x_1,\ x_2,\ x_3 \ldots x_\mu,\ c_1,\ c_2,\ c_3 \ldots c_\nu,$$

il est clair qu'on peut regarder les μ quantités $x_1, x_2, x_3 \ldots x_\mu$ comme variables. Les quantités $x'_1, x'_2, x'_3 \ldots x'_\nu$ se déterminent par les équations (10). Pour cela soit

$$z_k = \varphi_k(x_1,\ x_2,\ x_3 \ldots x_\mu),$$

on aura les équations

$$c_1 = \varphi_1(x'_1,\ x'_2 \ldots x'_\mu),\quad c_2 = \varphi_2(x'_1,\ x'_2 \ldots x'_\mu), \ldots c_\nu = \varphi_\nu(x'_1,\ x'_2 \ldots x'_\mu)$$
$$c_1 = \varphi_1(x_1,\ x_2 \ldots x_\mu),\quad c_2 = \varphi_2(x_1,\ x_2 \ldots x_\mu), \ldots c_\nu = \varphi_\nu(x_1,\ x_2 \ldots x_\mu).$$

Or les équations (10) donnent

$$x'_{\nu+1} = \beta_1,\quad x'_{\nu+2} = \beta_2, \ldots x'_\mu = \beta_{\mu-\nu};$$

en substituant donc ces valeurs, on aura les ν équations suivantes:

(12) $$\begin{cases} \varphi_1(x_1,\ x_2 \ldots x_\mu) = \varphi_1(x'_1,\ x'_2 \ldots x'_\nu,\ \beta_1,\ \beta_2 \ldots \beta_{\mu-\nu}), \\ \varphi_2(x_1,\ x_2 \ldots x_\mu) = \varphi_2(x'_1,\ x'_2 \ldots x'_\nu,\ \beta_1,\ \beta_2 \ldots \beta_{\mu-\nu}), \\ \varphi_3(x_1,\ x_2 \ldots x_\mu) = \varphi_3(x'_1,\ x'_2 \ldots x'_\nu,\ \beta_1,\ \beta_2 \ldots \beta_{\mu-\nu}), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varphi_\nu(x_1,\ x_2 \ldots x_\mu) = \varphi_\nu(x'_1,\ x'_2 \ldots x'_\nu,\ \beta_1,\ \beta_2 \ldots \beta_{\mu-\nu}), \end{cases}$$

qui donnent les valeurs des quantités $x'_1, x'_2, x'_3 \ldots x'_\nu$.

Ces équations sont très compliquées; il est plus simple d'employer la méthode suivante.

En supposant dans l'équation (7) $n = \mu + \nu$ et $x_{\mu+1} = c_1$, $x_{\mu+2} = c_2$, $\ldots x_n = c_\nu$, cette équation deviendra

$$\psi x_1 + \psi x_2 + \cdots + \psi x_\mu = C + \varrho,$$

où les quantités x_1, $x_2 \ldots x_\mu$ sont liées entre elles par les équations suivantes:

(13) $$\theta x_1 = 0, \quad \theta x_2 = 0, \quad \theta x_3 = 0, \ldots \theta x_\mu = 0,$$

(14) $$\theta c_1 = 0, \quad \theta c_2 = 0, \quad \theta c_3 = 0, \ldots \theta c_\nu = 0.$$

Cela posé, si l'on fait $x_1 = x'_1$, $x_2 = x'_2$, $\ldots$ $x_\nu = x'_\nu$, et $x'_{\nu+1} = \beta_1$, $x'_{\nu+2} = \beta_2$, $\ldots$ $x'_\mu = \beta_{\mu-\nu}$, on aura

$$C = -\varrho' + \psi x'_1 + \psi x'_2 + \cdots + \psi x'_\nu$$

$$\psi x_1 + \psi x_2 + \cdots + \psi x_\mu = \varrho - \varrho' + \psi x'_1 + \psi x'_2 + \cdots + \psi x'_\nu,$$

où x'_1, $x'_2 \ldots x'_\nu$ sont déterminés par les équations

(15) $$\theta x'_1 = 0, \quad \theta x'_2 = 0, \quad \theta x'_3 = 0, \ldots \theta x'_\nu = 0,$$

(16) $$\theta \beta_1 = 0, \quad \theta \beta_2 = 0, \quad \theta \beta_3 = 0, \ldots \theta \beta_{\mu-\nu} = 0,$$

(17) $$\theta c_1 = 0, \quad \theta c_2 = 0, \quad \theta c_3 = 0, \ldots \theta c_\nu = 0.$$

Désignons maintenant la fonction s par $\theta_1 x$, il est clair qu'on aura aussi

$$\theta_1 x'_k = 0, \quad \theta_1 \beta_k = 0, \quad \theta_1 c_k = 0,$$

pourvu que a, a_1, $a_2 \ldots a_{\mu-1}$ soient déterminés par les équations (16) et (17).

On aura donc

$$\begin{aligned}\theta_1 x = & (x - x'_1)(x - x'_2)(x - x'_3) \ldots (x - x'_\nu) \\ & \times (x - \beta_1)(x - \beta_2)(x - \beta_3) \ldots (x - \beta_{\mu-\nu}) \\ & \times (x - c_1)(x - c_2)(x - c_3) \ldots (x - c_\nu).\end{aligned}$$

En divisant l'équation $\theta_1 x = 0$ par le produit

$$(x - \beta_1)(x - \beta_2) \ldots (x - \beta_{\mu-\nu})(x - c_1)(x - c_2) \ldots (x - c_\nu),$$

on aura une équation du degré ν dont les différentes racines sont les quantités x'_1, $x'_2 \ldots x'_\nu$.

Dans ce qui précède il faut remarquer que si plusieurs des quantités β_1, β_2 etc. sont égales, par exemple si

$$\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_k,$$

on aura, au lieu des équations

$$\theta_1\beta_1 = 0,\quad \theta_1\beta_2 = 0,\quad \ldots\ \theta_1\beta_k = 0,$$

celles-ci:

$$\theta_1\beta_1 = 0,\quad \theta'_1\beta_1 = 0,\quad \theta''_1\beta_1 = 0, \ldots\ \theta_1^{(k-1)}\beta_1 = 0.$$

La même chose a lieu, si quelques-unes des quantités $x_1, x_2 \ldots x_\mu$ sont égales entre elles.

Ayant ainsi déterminé les quantités $x'_1, x'_2, x'_3 \ldots x'_\nu$ en fonction de $c_1, c_2, c_3 \ldots c_\nu$, il est clair qu'on peut regarder ces quantités comme des variables et déterminées par les équations (13) et (14). Les quantités $x_1, x_2 \ldots x_\mu$ deviennent alors indépendantes et $x'_1, x'_2 \ldots x'_\mu$ des fonctions de ces variables.

Application de la théorie précédente.

Je vais maintenant éclaircir la théorie précédente par plusieurs exemples.

Soit

$$0 = \alpha + \alpha_1 y.$$

Dans ce cas on a $m = 1$, et par conséquent l'équation (2) devient

$$0 = q = a + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + x^n = s, \tag{18}$$

d'où l'on tire en différentiant

$$y\,dx = \frac{da + x\,da_1 + x^2\,da_2 + \cdots + x^{n-1}\,da_{n-1}}{\frac{ds}{dx}} \cdot \frac{\alpha}{\alpha_1}. \tag{19}$$

En désignant donc $\int y\,dx$ par ψx, l'équation (7) devient

$$\psi x_1 + \psi x_2 + \psi x_3 + \cdots + \psi x_n = \varrho,$$

où

$$\left\{\begin{aligned}
-d\varrho = &\left\{\frac{y_1}{\frac{ds_1}{dx_1}} + \frac{y_2}{\frac{ds_2}{dx_2}} + \frac{y_3}{\frac{ds_3}{dx_3}} + \cdots + \frac{y_n}{\frac{ds_n}{dx_n}}\right\} da \\
&+ \left\{\frac{x_1 y_1}{\frac{ds_1}{dx_1}} + \frac{x_2 y_2}{\frac{ds_2}{dx_2}} + \cdots\cdots + \frac{x_n y_n}{\frac{ds_n}{dx_n}}\right\} da_1 \\
&+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&+ \left\{\frac{x_1^{n-1} y_1}{\frac{ds_1}{dx_1}} + \frac{x_2^{n-1} y_2}{\frac{ds_2}{dx_2}} + \cdots + \frac{x_n^{n-1} y_n}{\frac{ds_n}{dx_n}}\right\} da_{n-1}.
\end{aligned}\right. \tag{20}$$

Comme le nombre des variables $x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$ et celui des quantités $a, a_1, a_2 \ldots a_{n-1}$ est le même, toutes les quantités $x_1, x_2 \ldots x_n$ sont des variables indépendantes.

De l'équation que nous venons de trouver, on peut déduire deux formules qui seront d'une grande utilité dans ces recherches. Soit d'abord $y = x^m$, on aura

$$\int y\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} = \psi x.$$

La formule (20) deviendra donc

(21) $$\frac{1}{m+1}(x_1^{m+1} + x_2^{m+1} + \cdots + x_n^{m+1})$$
$$= -\int (P_m\,da + P_{m+1}\,da_1 + P_{m+2}\,da_2 + \cdots + P_{m+n-1}\,da_{n-1}),$$

en faisant pour abréger

(22) $$P_m = \frac{x_1^m}{\frac{ds_1}{dx_1}} + \frac{x_2^m}{\frac{ds_2}{dx_2}} + \frac{x_3^m}{\frac{ds_3}{dx_3}} + \cdots + \frac{x_n^m}{\frac{ds_n}{dx_n}}.$$

Maintenant le premier membre de l'équation (21) peut s'exprimer par une fonction rationnelle et entière des quantités $a, a_1, a_2 \ldots a_{n-1}$. En désignant donc cette fonction par $\frac{1}{m+1} Q_{m+1}$, il est clair qu'on aura

$$P_{m+k} = -\frac{1}{m+1}\frac{dQ_{m+1}}{da_k}.$$

En faisant $m = 0$, on aura

$$P_k = -\frac{dQ_1}{da_k}.$$

Or $Q_1 = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = -a_{n-1}$. La fonction Q_1 ne contient donc que la variable a_{n-1}. On aura par conséquent

$$P_0 = 0,\ P_1 = 0,\ P_2 = 0, \ldots P_{n-2} = 0,\ P_{n-1} = 1.$$

Soit maintenant $y = \frac{1}{(x-\alpha)^m}$, on aura

$$\int y\,dx = -\frac{1}{m-1}\cdot\frac{1}{(x-\alpha)^{m-1}} = \psi x;$$

donc

$$\frac{1}{m-1}\left(\frac{1}{(x_1-\alpha)^{m-1}} + \frac{1}{(x_2-\alpha)^{m-1}} + \cdots + \frac{1}{(x_n-\alpha)^{m-1}}\right)$$
$$= \int (P_m^{(0)}\,da + P_m^{(1)}\,da_1 + P_m^{(2)}\,da_2 + \cdots + P_m^{(n-1)}\,da_{n-1}),$$

en faisant pour abréger

$$P_m^{(k)} = \frac{x_1^k}{(x_1-\alpha)^m \frac{ds_1}{dx_1}} + \frac{x_2^k}{(x_2-\alpha)^m \frac{ds_2}{dx_2}} + \cdots + \frac{x_n^k}{(x_n-\alpha)^m \frac{ds_n}{dx_n}}.$$

Si l'on fait

$$\frac{1}{(x_1-\alpha)^{m-1}} + \frac{1}{(x_2-\alpha)^{m-1}} + \cdots + \frac{1}{(x_n-\alpha)^{m-1}} = Q'_{m-1},$$

on aura

$$P_m^{(k)} = \frac{1}{m-1} \cdot \frac{dQ'_{m-1}}{da_k}.$$

Si $m=1$, cette équation devient illusoire; or dans ce cas on a

$$\int y\,dx = \log(x-\alpha),$$

donc si l'on fait

$$t = (x_1-\alpha)(x_2-\alpha)\ldots(x_n-\alpha) = (-1)^n(a + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \cdots + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \alpha^n),$$

on aura

$$P_1^{(k)} = -\frac{dt}{da_k}\cdot\frac{1}{t} = -\frac{\alpha^k}{a + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \cdots + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \alpha^n}.$$

Dans l'équation (20) la fonction ϱ est en général une fonction logarithmique et algébrique, mais on peut toujours établir entre les quantités x_1, x_2 etc. des relations telles que cette quantité devienne égale à zéro.

En effet soit

$$0 = \delta + \delta_1 x + \delta_2 x^2 + \cdots + \alpha_1(a + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{\mu-1}x^{\mu-1} + x^\mu) = s;$$

on aura en différentiant

$$0 = \left(\frac{ds}{dx}\right)dx + \alpha_1(da + x\,da_1 + x^2\,da_2 + \cdots + x^{\mu-1}da_{\mu-1}),$$

donc

$$y\,dx = \frac{\alpha(da + x\,da_1 + x^2\,da_2 + \cdots + x^{\mu-1}da_{\mu-1})}{\frac{ds}{dx}}.$$

et

$$\psi x_1 + \psi x_2 + \cdots + \psi x_n = \varrho,$$

ϱ étant en général une fonction entière, qui s'évanouit lorsque le degré de α est moindre que celui de α_1. Dans ce cas on a donc

(23) $$\psi x_1 + \psi x_2 + \cdots + \psi x_n = C.$$

Les quantités x_1, x_2, $x_3 \ldots x_n$ sont liées entre elles par les équations

$$a + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \cdots + a_{\mu-1}x_1^{\mu-1} + x_1^\mu = \frac{fx_1}{\varphi x_1},$$

$$a + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + \cdots + a_{\mu-1} x_2^{\mu-1} + x_2^\mu = \frac{f x_2}{\varphi x_2},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \cdots + a_{\mu-1} x_n^{\mu-1} + x_n^\mu = \frac{f x_n}{\varphi x_n},$$

où l'on a fait pour abréger

$$\alpha_1 = \varphi x, \quad \text{et} \quad -(\delta + \delta_1 x + \delta_2 x^2 + \cdots + \delta_{n-1} x^{n-1}) = f x.$$

En faisant dans l'équation (23) $x_1 = x'_1$, $x_2 = x'_2$ etc. on aura

$$\psi x_1 + \psi x_2 + \cdots + \psi x_n = \psi x'_1 + \psi x'_2 + \cdots + \psi x'_n.$$

Dans cette équation on peut regarder δ, δ_1 etc. comme des variables; par conséquent on peut regarder $x_1, x_2, x_3 \ldots$ comme des variables indépendantes, et faire en sorte que $\psi x'_n = 0$, $\psi x'_{n-1} = 0 \ldots . \ \psi x'_{\mu+1} = 0$.

On aura donc la formule

(24) $$\psi x_1 + \psi x_2 + \cdots + \psi x_n = \psi x'_1 + \psi x'_2 + \cdots + \psi x'_\mu.$$

Soit par exemple $\alpha = 1$, $\alpha_1 = x$, on aura $\psi x = -\int \frac{dx}{x} = -\log x$,

$$0 = \delta + a x + a_1 x^2 + \cdots + a_{\mu-1} x^\mu + x^{\mu+1},$$
$$\delta = (-1)^{\mu+1} x_1 x_2 x_3 \ldots x_{\mu+1},$$
$$\delta = (-1)^{\mu+1} x'_1 x'_2 x'_3 \ldots x'_{\mu+1};$$

donc si l'on fait $x'_2 = x'_3 = \cdots = x'_{\mu+1} = 1$, on aura

$$x'_1 = x_1 x_2 x_3 \ldots x_{\mu+1};$$

par conséquent

$$\log x_1 + \log x_2 + \cdots + \log x_{\mu+1} = \log(x_1 x_2 x_3 \ldots x_{\mu+1}),$$

comme on sait.

Soit maintenant $\alpha = 1$, $\alpha_1 = 1 + x^2$, on aura

$$\psi x = -\operatorname{arc\,tang} x,$$
$$0 = \delta + \delta_1 x_1 + (1 + x_1^2)(a + x_1),$$
$$0 = \delta + \delta_1 x_2 + (1 + x_2^2)(a + x_2),$$
$$0 = \delta + \delta_1 x_3 + (1 + x_3^2)(a + x_3),$$
$$\operatorname{arc\,tang} x_1 + \operatorname{arc\,tang} x_2 + \operatorname{arc\,tang} x_3 = C;$$
$$x_1 x_2 x_3 = -\delta - a; \quad x_1 + x_2 + x_3 = -a; \quad x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = \delta_1 + 1;$$

donc

$$(25)\qquad \begin{cases} x_1+x_2+x_3-x_1x_2x_3=\delta \\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3-1=\delta_1. \end{cases}$$

Soit pour déterminer C, $x_3=x'_2$, $x_2=-x'_2$, $x_1=x'_1$, on aura

$$C=\operatorname{arc\,tang} x'_1,\quad x'_1+x'_1(x'_2)^2=\delta,\quad 1+(x'_2)^2=-\delta_1.$$

Des deux dernières équations on tire, en éliminant x'_2,

$$-\frac{\delta}{\delta_1}=x'_1;$$

or les équations (25) donnent

$$-\frac{\delta}{\delta_1}=\frac{x_1+x_2+x_3-x_1x_2x_3}{1-x_1x_2-x_1x_3-x_2x_3},$$

donc en substituant on aura

$$\operatorname{arc\,tang} x_1+\operatorname{arc\,tang} x_2+\operatorname{arc\,tang} x_3=\operatorname{arc\,tang}\frac{x_1+x_2+x_3-x_1x_2x_3}{1-x_1x_2-x_1x_3-x_2x_3}.$$

Pour trouver la valeur de $d\varrho$, il faut, selon ce qu'on a vu, exprimer en fonction de a, a_1 $a_2\ldots$ des fonctions symétriques de x_1, $x_2\ldots x_n$ de la forme

$$\frac{fx_1}{\frac{ds_1}{dx_1}}+\frac{fx_2}{\frac{ds_2}{dx_2}}+\cdots+\frac{fx_n}{\frac{ds_n}{dx_n}};$$

mais comme cela est en général très laborieux par les méthodes ordinaires, je vais développer quelques formules qui sont d'une grande utilité dans ces recherches, et qu'on peut déduire de la théorie précédente.

Soit, dans ce qui précède, y une fonction rationnelle fx, on aura $m=1$, et par conséquent

$$0=q=a+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n=s=\varphi x,$$

d'où l'on tirera en différentiant

$$fx\,.\,dx=-\frac{da+x\,da_1+x^2da_2+\cdots+x^n da_n}{\varphi' x}fx$$

donc l'équation (20) deviendra

$$\int fx_1 . dx_1 + \int fx_2 . dx_2 + \int fx_3 . dx_3 + \cdots + \int fx_n . dx_n = \varrho, \text{ où}$$

$$\begin{aligned}
-d\varrho = & \, da\left(\frac{fx_1}{\varphi' x_1} + \frac{fx_2}{\varphi' x_2} + \cdots + \frac{fx_n}{\varphi' x_n}\right) \\
& + da_1\left(\frac{x_1 . fx_1}{\varphi' x_1} + \frac{x_2 . fx_2}{\varphi' x_2} + \cdots + \frac{x_n . fx_n}{\varphi' x_n}\right) \\
& + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& + da_n\left(\frac{x_1^n . fx_1}{\varphi' x_1} + \frac{x_2^n . fx_2}{\varphi' x_2} + \cdots + \frac{x_n^n . fx_n}{\varphi' x_n}\right).
\end{aligned}$$

Cela posé, soit

$$\int fx\, dx = \psi x + \Sigma A \log (x - \delta),$$

on aura

$$\varrho = \psi x_1 + \psi x_2 + \cdots + \psi x_n + \Sigma A \log (x_1 - \delta)(x_2 - \delta)(x_3 - \delta) \ldots (x_n - \delta).$$

La quantité $\psi x_1 + \psi x_2 + \cdots + \psi x_n$ est une fonction symétrique de $x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$; on peut donc exprimer cette fonction par une fonction rationnelle de $a, a_1, a_2 \ldots a_n$. Soit p cette fonction. La quantité $(x_1 - \delta)(x_2 - \delta) \ldots (x_n - \delta)$ est la même chose que $(-1)^n \frac{\varphi\delta}{a_n}$; on aura donc

$$\varrho = p + \Sigma A (\log \varphi\delta - \log a_n),$$

d'où l'on tire

$$\frac{d\varrho}{da_m} = \frac{dp}{da_m} + \Sigma A \left[\frac{1}{\varphi\delta} \cdot \frac{d\varphi\delta}{da_m} - \frac{1}{a_n} \cdot \frac{da_n}{da_m}\right];$$

on aura aussi

$$\frac{d\varrho}{da_m} = -\left(\frac{x_1^m . fx_1}{\varphi' x_1} + \frac{x_2^m . fx_2}{\varphi' x_2} + \cdots + \frac{x_n^m . fx_n}{\varphi' x_n}\right);$$

donc

$$Q_m = \frac{x_1^m fx_1}{\varphi' x_1} + \frac{x_2^m fx_2}{\varphi' x_2} + \cdots + \frac{x_n^m fx_n}{\varphi' x_n} = -\frac{dp}{da_m} - \Sigma A \left[\frac{1}{\varphi\delta} \cdot \frac{d\varphi\delta}{da_m} - \frac{1}{a_n} \cdot \frac{da_n}{da_m}\right];$$

or $\frac{d\varphi\delta}{da_m} = \delta^m$, donc

$$(26) \qquad \frac{x_1^m fx_1}{\varphi' x_1} + \frac{x_2^m fx_2}{\varphi' x_2} + \cdots + \frac{x_n^m fx_n}{\varphi' x_n} = -\frac{dp}{da_m} - \Sigma \frac{A\delta^m}{\varphi\delta} + \Sigma \frac{A}{a_n}(\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2}).$$

Le signe $+$ a lieu, si $m = n$, et le signe $-$, si $m < n$.

Si l'on fait $m = 0$, on aura

$$\frac{fx_1}{\varphi' x_1} + \frac{fx_2}{\varphi' x_2} + \cdots + \frac{fx_n}{\varphi' x_n} = -\frac{dp}{da} - \Sigma \frac{A}{\varphi\delta}.$$

De l'équation (26) on tire aisément celle-ci

$$(27) \qquad \frac{Fx_1 . fx_1}{\varphi' x_1} + \frac{Fx_2 . fx_2}{\varphi' x_2} + \frac{Fx_3 . fx_3}{\varphi' x_3} + \cdots + \frac{Fx_n . fx_n}{\varphi' x_n}$$

$$=-\beta\frac{dp}{da}-\beta_1\frac{dp}{da_1}-\beta_2\frac{dp}{da_2}-\cdots-\beta_n\frac{dp}{da_n}-\Sigma\frac{A\,.\,F\delta}{\varphi\delta}+\frac{\beta_n}{a_n}\Sigma A,$$

où $F(x)=\beta+\beta_1x+\beta_2x^2+\cdots+\beta_nx^n$.

En faisant $fx=1$, on aura $\psi x=x$, donc

$$p=x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n=-\frac{a_{n-1}}{a_n},\quad A=0;$$

donc

$$\frac{Fx_1}{\varphi'x_1}+\frac{Fx_2}{\varphi'x_2}+\cdots+\frac{Fx_n}{\varphi'x_n}=\frac{\beta_{n-1}}{a_n}-\frac{\beta_n a_{n-1}}{a_n^2}.$$

Il suit de là que

$$(28)\qquad \frac{x_1^m}{\varphi'x_1}+\frac{x_2^m}{\varphi'x_2}+\cdots+\frac{x_n^m}{\varphi'x_n}=0,$$

si m est moindre que $n-1$; que

$$(29)\qquad \frac{x_1^{n-1}}{\varphi'x_1}+\frac{x_2^{n-1}}{\varphi'x_2}+\cdots+\frac{x_n^{n-1}}{\varphi'x_n}=\frac{1}{a_n}.$$

et que

$$(30)\qquad \frac{x_1^n}{\varphi'x_1}+\frac{x_2^n}{\varphi'x_2}+\cdots+\frac{x_n^n}{\varphi'x_n}=-\frac{a_{n-1}}{a_n^2}.$$

Si l'on fait $fx=\frac{1}{x-\delta}$, on aura $p=0$, $A=1$, donc

$$(31)\qquad \frac{Fx_1}{(x_1-\delta)\varphi'x_1}+\frac{Fx_2}{(x_2-\delta)\varphi'x_2}+\cdots+\frac{Fx_n}{(x_n-\delta)\varphi'x_n}=\frac{\beta_n}{a_n}-\frac{F\delta}{\varphi\delta}.$$

De cette équation on déduira, en différentiant m fois de suite par rapport à δ,

$$(32)\qquad \frac{Fx_1}{(x_1-\delta)^{m+1}\varphi'x_1}+\frac{Fx_2}{(x_2-\delta)^{m+1}\varphi'x_2}+\cdots+\frac{Fx_n}{(x_n-\delta)^{m+1}\varphi'x_n}=-\frac{1}{\Gamma(m+1)}\cdot\frac{d^m\left(\frac{F\delta}{\varphi\delta}\right)}{(d\delta)^m},$$

ou bien, en développant le second membre de cette équation,

$$(33)\quad\left\{\begin{aligned}&\frac{Fx_1}{(x_1-\delta)^{m+1}\varphi'x_1}+\frac{Fx_2}{(x_2-\delta)^{m+1}\varphi'x_2}+\cdots+\frac{Fx_n}{(x_n-\delta)^{m+1}\varphi'x_n}=\\&-\frac{1}{\Gamma(m+1)}\left\{\frac{d^m\left(\frac{1}{\varphi\delta}\right)}{d\delta^m}F\delta+m\frac{d^{m-1}\left(\frac{1}{\varphi\delta}\right)}{d\delta^{m-1}}\cdot\frac{dF\delta}{d\delta}+\cdots+\frac{m(m-1)\ldots(n+1)}{1.2.3\ldots(m-n)}\cdot\frac{d^nF\delta}{d\delta^n}\cdot\frac{d^{m-n}\left(\frac{1}{\varphi\delta}\right)}{d\delta^{m-n}}\right\}.\end{aligned}\right.$$

Par exemple, si $m=1$, on aura

$$\frac{Fx_1}{(x_1-\delta)^2.\varphi'x_1}+\frac{Fx_2}{(x_2-\delta)^2.\varphi'x_2}+\cdots+\frac{Fx_n}{(x_n-\delta)^2.\varphi'x_n}=-\frac{F'\delta}{\varphi\delta}+\frac{F\delta.\varphi'\delta}{(\varphi\delta)^2}.$$

XI.

SUR LES FONCTIONS GÉNÉRATRICES ET LEURS DÉTERMINANTES.

Soit $\varphi(x, y, z\ldots)$ une fonction quelconque de plusieurs variables $x, y, z\ldots$, on peut toujours trouver une fonction $f(u, v, p\ldots)$ telle que

(1) $$\varphi(x, y, z\ldots) = \int e^{xu+yv+zp+\cdots} f(u, v, p\ldots)\, du\, dv\, dp.$$

Dans cette équation j'appellerai φ la fonction génératrice de f, et f la déterminante de φ, et je ferai usage des notations suivantes:

(2) $$\begin{cases} \varphi(x, y, z\ldots) = \mathrm{fg}\, f(u, v, p\ldots) \\ f(u, v, p\ldots) = \mathrm{D}\, \varphi(x, y, z\ldots). \end{cases}$$

Cela posé, considérons d'abord les fonctions d'une seule variable, et soit

(3) $$\varphi x = \int e^{vx} fv \,.\, dv,$$

on aura

(4) $$\varphi x = \mathrm{fg}\,.\, fv, \qquad fv = \mathrm{D}\, \varphi x.$$

Soit de même

$$\varphi_1 x = \int e^{xv} f_1 v \,.\, dv,$$

on aura

$$\varphi x + \varphi_1 x = \int e^{xv} (fv + f_1 v)\, dv,$$

donc

$$\mathrm{D}(\varphi x + \varphi_1 x) = fv + f_1 v;$$

or $fv = D\varphi x$, $f_1 v = D\varphi_1 x$, donc

$$D(\varphi x + \varphi_1 x) = D\varphi x + D\varphi_1 x.$$

On aura en général

(5) $D(\varphi x + \varphi_1 x + \varphi_2 x + \varphi_3 x + \cdots) = D\varphi x + D\varphi_1 x + D\varphi_2 x + D\varphi_3 x + \cdots,$

donc aussi

(6) $$\mathrm{fg}(fv + f_1 v + f_2 v + \cdots) = \mathrm{fg}\, fv + \mathrm{fg}\, f_1 v + \mathrm{fg}\, f_2 v + \cdots,$$

(7) $$\begin{cases} D(a\varphi x) = aD\varphi x, \\ \mathrm{fg}(afv) = a\,.\,\mathrm{fg}\, fv. \end{cases}$$

En mettant $x + \alpha$ au lieu de x, on aura

$$\varphi(x+\alpha) = \int e^{xv} e^{\alpha v} fv\,.\,dv,$$

donc

(8) $$\begin{cases} D\varphi(x+\alpha) = e^{\alpha v} D\varphi x, \\ \mathrm{fg}(e^{\alpha v} D\varphi x) = \varphi(x+\alpha) = \mathrm{fg}(e^{\alpha v} fv). \end{cases}$$

En différentiant l'équation (3) on aura

$$\frac{d\varphi x}{dx} = \int e^{xv} v fv\,.\,dv,$$

donc

(9) $$\begin{cases} D\left(\frac{d\varphi x}{dx}\right) = vfv = vD\varphi x, \\ \mathrm{fg}(vfv) = \mathrm{fg}(vD\varphi x) = \frac{d\varphi x}{dx}. \end{cases}$$

De la même manière on aura, en différentiant l'équation (3) n fois de suite,

$$\frac{d^n\varphi x}{dx^n} = \int e^{xv} v^n fv\,.\,dv,$$

donc

(10) $$\begin{cases} D\left(\frac{d^n\varphi x}{dx^n}\right) = v^n\,.\,fv = v^n\,.\,D\varphi x, \\ \mathrm{fg}(v^n fv) = \mathrm{fg}(v^n D\varphi x) = \frac{d^n\varphi x}{dx^n}. \end{cases}$$

De même:

(11) $$\begin{cases} D\left(\int^n \varphi x\, dx^n\right) = v^{-n} fv = v^{-n} D\varphi x, \\ \mathrm{fg}(v^{-n} fv) = \mathrm{fg}(v^{-n} D\varphi x) = \int^n \varphi x\, dx^n. \end{cases}$$

En prenant la différence finie de l'équation (3) n fois de suite, on aura

$$\Delta_\alpha^n \varphi x = \int e^{vx}(e^{v\alpha} - 1)^n fv\,.\,dv,$$

en désignant par α la différence de x; donc

$$(12)\quad \begin{cases} D\,\Delta_\alpha^n \varphi x = (e^{v\alpha}-1)^n fv, \\ fg\left[(e^{v\alpha}-1)^n fv\right] = \Delta_\alpha^n \varphi x, \\ D\,\Sigma_\alpha^n(\varphi x) = (e^{v\alpha}-1)^{-n} fv, \\ fg\left[(e^{v\alpha}-1)^{-n} fv\right] = \Sigma_\alpha^n \varphi x, \end{cases}$$

On trouvera de la même manière

$$(13)\quad \begin{cases} D\left[\Delta_\alpha^n \Delta_{\alpha'}^{n'} \Delta_{\alpha''}^{n''} \ldots d^m \varphi(x+\beta)\right] = e^{v\beta} v^m (e^{v\alpha}-1)^n (e^{v\alpha'}-1)^{n'} (e^{v\alpha''}-1)^{n''} \ldots fv, \\ fg\left[e^{v\beta} v^m (e^{v\alpha}-1)^n (e^{v\alpha'}-1)^{n'} (e^{v\alpha''}-1)^{n''} \ldots fv\right] = \Delta_\alpha^n \Delta_{\alpha'}^{n'} \Delta_{\alpha''}^{n''} \ldots d^m \varphi(x+\beta). \end{cases}$$

Soit en général

$$(14)\quad \delta(\varphi x) = A_{n,\alpha} \frac{d^n \varphi(x+\alpha)}{dx^n} + A_{n',\alpha'} \frac{d^{n'} \varphi(x+\alpha')}{dx^{n'}} + \ldots,$$

on aura

$$\delta(\varphi x) = \int e^{vx} fv\,(A_{n,\alpha} v^n e^{v\alpha} + A_{n',\alpha'} v^{n'} e^{v\alpha'} + \ldots)\,dv,$$

donc

$$D(\delta \varphi x) = fv\,(A_{n,\alpha} v^n e^{v\alpha} + A_{n',\alpha'} v^{n'} e^{v\alpha'} + \ldots).$$

Soit

$$(15)\quad A_{n,\alpha} v^n e^{v\alpha} + A_{n',\alpha'} v^{n'} e^{v\alpha'} + \ldots = \psi v,$$

on aura

$$(16)\quad D(\delta\varphi x) = \psi v \,.\, fv = \psi v \,.\, D\varphi x,$$

Soit de même

$$(17)\quad \begin{cases} D(\delta_1 \varphi x) = \psi_1 v \,.\, D\varphi x, \\ D(\delta_2 \varphi x) = \psi_2 v \,.\, D\varphi x, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ D(\delta_\mu \varphi x) = \psi_\mu v \,.\, D\varphi x, \end{cases}$$

on trouvera aisément

$$D(\delta\delta_1\varphi x) = \psi v \,.\, \psi_1 v \,.\, fv,$$

$$D(\delta\delta_1\delta_2\varphi x) = \psi v \,.\, \psi_1 v \,.\, \psi_2 v \,.\, fv,$$

et en général

$$(18)\quad \begin{cases} D(\delta\delta_1\delta_2 \ldots \delta_\mu \varphi x) = \psi v \,.\, \psi_1 v \,.\, \psi_2 v \ldots \psi_\mu v \,.\, fv, \\ D(\delta^n \varphi x) = (\psi v)^n \,.\, D\varphi x, \\ D(\delta^n \delta_1^{n_1} \delta_2^{n_2} \ldots \delta_\mu^{n_\mu} \varphi x) = (\psi v)^n (\psi_1 v)^{n_1} (\psi_2 v)^{n_2} \ldots (\psi_\mu v)^{n_\mu} D\varphi x, \\ fg\left[(\psi v)^n (\psi_1 v)^{n_1} \ldots (\psi_\mu v)^{n_\mu} D\varphi x\right] = \delta^n \delta_1^{n_1} \ldots \delta_\mu^{n_\mu} \varphi x. \end{cases}$$

Application de la théorie précédente.

La théorie précédente des fonctions génératrices est très féconde pour le développement des fonctions en séries.

Supposons par exemple qu'on veuille développer $\varphi(x+\alpha)$ suivant les coefficiens différentiels de φx. La déterminante de $\varphi(x+\alpha)$ est $e^{v\alpha}fv$, et celle de $\frac{d^n\varphi x}{dx^n}$ sera $v^n fv$. Il s'agit donc seulement de développer $e^{v\alpha}$ en termes de la forme $A_n v^n$; or on a

$$e^{v\alpha}=1+v\alpha+\frac{v^2}{1.2}\alpha^2+\frac{v^3}{1.2.3}\alpha^3+\cdots+\frac{v^n}{1.2.3\ldots n}\alpha^n+\cdots,$$

donc

$$e^{v\alpha}fv=fv+\alpha vfv+\frac{\alpha^2}{1.2}v^2fv+\frac{\alpha^3}{1.2.3}v^3fv+\cdots.$$

En prenant la fonction génératrice de chaque membre de cette équation, on aura, en remarquant que $\text{fg}(e^{v\alpha}fv)=\varphi(x+\alpha)$, et $\text{fg}(v^nfv)=\frac{d^n\varphi x}{dx^n}$,

$$\varphi(x+\alpha)=\varphi x+\alpha\frac{d\varphi x}{dx}+\frac{\alpha^2}{1.2}\cdot\frac{d^2\varphi x}{dx^2}+\cdots,$$

comme on sait.

Supposons en général qu'on ait une relation quelconque entre plusieurs fonctions de la forme ψv, $\psi_1 v$, ... etc., composée de termes de la forme

$$A_{n,n_1,n_2\ldots n_\mu}(\psi v)^n(\psi v_1)^{n_1}\ldots(\psi v_\mu)^{n_\mu},$$

et désignons cette relation par

(19) $$\Sigma A_{n,n_1,n_2\ldots n_\mu}(\psi v)^n(\psi v_1)^{n_1}\ldots(\psi v_\mu)^{n_\mu}=0.$$

En multipliant par fv et prenant la fonction génératrice, on aura

$$\Sigma A_{n,n_1,n_2\ldots n_\mu}\,\text{fg}\left[fv\cdot(\psi v)^n(\psi v_1)^{n_1}\ldots(\psi v_\mu)^{n_\mu}\right]=0;$$

c'est-à-dire

(20) $$\Sigma A_{n,n_1,n_2\ldots n_\mu}\,\delta^n\delta_1^{n_1}\delta_2^{n_2}\ldots\delta_\mu^{n_\mu}\varphi x=0.$$

Cette équation exprimera une relation générale entre les différentes opérations indiquées par les lettres δ, δ_1, δ_2, ...

Problème I. Soit $\delta\varphi x=\varphi(x+\alpha)+a\varphi x$, et proposons-nous de développer $\delta^n\varphi x$ en termes de la forme $A_m\varphi(x+m\alpha)$. La déterminante de $\varphi(x+\alpha)$ étant $e^{v\alpha}fv$, et celle de φx, fv, il est clair que

donc
$$D\,\delta\varphi x = (e^{v\alpha}+a)fv,$$
$$D\,\delta^n\varphi x = (e^{v\alpha}+a)^n fv;$$
ayant de même $D\varphi(x+m\alpha) = e^{vm\alpha}fv$, il faut développer $(e^{v\alpha}+a)^n$ suivant les puissances de $e^{v\alpha}$; or on a
$$(a+e^{v\alpha})^n = a^n + na^{n-1}e^{v\alpha} + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}e^{2v\alpha}+\cdots,$$
donc
$$\delta^n\varphi x = a^n\varphi x + na^{n-1}\varphi(x+\alpha) + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}\varphi(x+2\alpha)+\cdots;$$
on a aussi
$$(a+e^{v\alpha})^n = e^{nv\alpha} + na\,e^{(n-1)v\alpha} + \frac{n(n-1)}{2}a^2e^{(n-2)v\alpha}+\cdots,$$
donc
$$\delta^n\varphi x = \varphi(x+n\alpha) + na\,\varphi[x+(n-1)\alpha] + \frac{n(n-1)}{2}a^2\varphi[x+(n-2)\alpha]+\cdots$$
En faisant $a=-1$, on a $\delta^n\varphi x = \Delta^n_\alpha\varphi x$, donc
$$\Delta^n_\alpha\varphi x = \varphi(x+n\alpha) - n\varphi[x+(n-1)\alpha] + \frac{n(n-1)}{2}\varphi[x+(n-2)\alpha]-\cdots.$$

Problème II. Soit $\delta\varphi x = \varphi(x+\alpha)+a\varphi x$, $\delta_1\varphi x = \varphi(x+\alpha_1)+a_1\varphi x$ et proposons-nous d'exprimer l'opération δ_1^n par δ^m. On a
$$D\,\delta^m\varphi x = (e^{v\alpha}+a)^m fv,\quad D\,\delta_1^n\varphi x = (e^{v\alpha_1}+a_1)^n fv.$$
Il faut donc exprimer $(e^{v\alpha_1}+a_1)^n$ en termes de la forme $A_m(e^{v\alpha}+a)^m$. Soit $e^{v\alpha_1}+a_1 = y$, $e^{v\alpha}+a=z$, on aura
$$e^v = (y-a_1)^{\frac{1}{\alpha_1}} = (z-a)^{\frac{1}{\alpha}};$$
donc
$$y = a_1 + (z-a)^{\frac{\alpha_1}{\alpha}},$$
$$y^n = \left(a_1+(z-a)^{\frac{\alpha_1}{\alpha}}\right)^n,$$
$$y^n = \Sigma A_m z^m,$$
donc
$$\delta_1^n\varphi x = \Sigma A_m\delta^m\varphi x.$$

Soit par exemple $\alpha_1=\alpha$, on a
$$y^n = (a_1-a+z)^n = (a_1-a)^n + n(a_1-a)^{n-1}z+\cdots = z^n + n(a_1-a)z^{n-1}+\cdots,$$
donc
$$\delta_1^n\varphi x = (a_1-a)^n\varphi x + n(a_1-a)^{n-1}\delta\varphi x + \frac{n(n-1)}{2}(a_1-a)^{n-2}\delta^2\varphi x+\cdots,$$

$$\delta_1^n \varphi x = \delta^n \varphi x + n(a_1 - a)\delta^{n-1}\varphi x + \frac{n(n-1)}{2}(a_1 - a)^2 \delta^{n-2}\varphi x + \dots.$$

En faisant $a_1 = 0$, on aura $\delta_1^n \varphi x = \varphi(x + n\alpha)$, donc

$$\varphi(x + n\alpha) = \delta^n \varphi x - na\,\delta^{n-1}\varphi x + \frac{n(n-1)}{2} a^2 \delta^{n-2}\varphi x - \dots;$$

si $a = -1$, on aura

$$\varphi(x + n\alpha) = \Delta_\alpha^n \varphi x + n\,\Delta_\alpha^{n-1}\varphi x + \frac{n(n-1)}{2}\Delta_\alpha^{n-2}\varphi x + \dots.$$

Problème III. Soit $\delta\varphi x = \varphi(x + \alpha) - a\varphi x$ et $\delta_1 \varphi x = c\varphi x + k\frac{d\varphi x}{dx}$ et proposons-nous de déterminer δ_1^m par δ. On a

$$\mathrm{D}\delta_1 \varphi x = (c + kv) f v,$$

donc

$$\mathrm{D}\delta_1^n \varphi x = (c + kv)^n f v;$$

or

$$\mathrm{D}\delta\varphi x = (e^{v\alpha} - a) f v;$$

il faut donc développer $(c + kv)^n$ suivant les puissances de $e^{v\alpha} - a$. Soit $c + kv = y$, $e^{v\alpha} - a = z$, on aura

$$v = \frac{1}{\alpha}\log(z + a), \quad y = c + \frac{k}{\alpha}\log(z + a).$$

$$y = c + \frac{k}{\alpha}\log a + \frac{k}{\alpha}\left(\frac{z}{a} - \tfrac{1}{2}\frac{z^2}{a^2} + \tfrac{1}{3}\frac{z^3}{a^3} - \dots\right),$$

$$y^n = \left[c + \frac{k}{\alpha}\log a + \frac{k}{\alpha}\left(\frac{z}{a} - \tfrac{1}{2}\frac{z^2}{a^2} + \tfrac{1}{3}\frac{z^3}{a^3} - \dots\right)\right]^n = \Sigma A_m z^m,$$

donc

$$\delta_1^n \varphi x = \Sigma A_m \delta^m \varphi x.$$

Soit $c = 0$, $a = 1$, $k = 1$, on aura $\delta_1^n \varphi x = \frac{d^n \varphi x}{dx^n}$; donc

$$\frac{d^n \varphi x}{dx^n} = \Sigma A_m . \Delta_\alpha^m \varphi x,$$

où

$$\Sigma A_m z^m = \frac{1}{\alpha^n}(z - \tfrac{1}{2}z^2 + \tfrac{1}{3}z^3 - \dots)^n;$$

en faisant $n = 1$, on aura

$$\frac{d\varphi x}{dx} = \frac{1}{\alpha}(\Delta\varphi x - \tfrac{1}{2}\Delta^2\varphi x + \tfrac{1}{3}\Delta^3\varphi x - \dots).$$

Problème IV. Développer la fonction $\varphi(x + \alpha)$ en termes de la forme

$$\frac{d^n \varphi(x + n\beta)}{dx^n}.$$

On a $\mathrm{D}\varphi(x+\alpha)=e^{\alpha v}fv$, et $\mathrm{D}\frac{d^n\varphi(x+n\beta)}{dx^n}=e^{n\beta v}v^n fv$. Il s'agit donc de développer $e^{\alpha v}$ suivant les puissances de $v e^{\beta v}$. Or on a (*Legendre* Exerc. de calc. int. t. 2, p. 234)

$$b^v=1+lb\,.\,vc^v+lb(lb-2lc)\frac{(v\,.\,c^v)^2}{2}+lb(lb-3lc)^2\frac{(v\,.\,c^v)^3}{2\,.\,3}+\cdots$$

Soit $b=e^\alpha$, $c=e^\beta$, on aura $lb=\alpha$, $lc=\beta$, donc

$$e^{\alpha v}=1+\alpha v e^{\beta v}+\alpha(\alpha-2\beta)\frac{v^2 e^{2\beta v}}{2}+\alpha(\alpha-3\beta)^2\frac{v^3\,.\,e^{3\beta v}}{2\,.\,3}+\cdots,$$

donc

$$\varphi(x+\alpha)=\varphi x+\alpha\frac{d\varphi(x+\beta)}{dx}+\frac{\alpha(\alpha-2\beta)}{2}\cdot\frac{d^2\varphi(x+2\beta)}{dx^2}+\frac{\alpha(\alpha-3\beta)^2}{2\,.\,3}\cdot\frac{d^3\varphi(x+3\beta)}{dx^3}+\cdots$$
$$+\frac{\alpha(\alpha-n\beta)^{n-1}}{1\,.\,2\,.\,3\ldots n}\cdot\frac{d^n\varphi(x+n\beta)}{dx^n}+\cdots.$$

En posant $x=0$, et écrivant ensuite x au lieu de α, on aura

$$\varphi x=\varphi(0)+x\varphi'(\beta)+\frac{x(x-2\beta)}{2}\varphi''(2\beta)+\frac{x(x-3\beta)^2}{2\,.\,3}\varphi'''(3\beta)+\cdots.$$

Soit $\varphi x=x^m$, on a $\varphi(x+n\beta)=(x+n\beta)^m$, donc

$$\varphi^{(n)}(x+n\beta)=m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)(x+n\beta)^{m-n},$$

et par suite

$$(x+\alpha)^m=x^m+\frac{m}{1}\alpha(x+\beta)^{m-1}+\frac{m(m-1)}{2}\alpha(\alpha-2\beta)(x+2\beta)^{m-2}+\cdots$$
$$\cdots+\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots n}\alpha(\alpha-n\beta)^{n-1}(x+n\beta)^{m-n}+\cdots$$

Soit $\varphi x=\log x$, on aura $\varphi(x+n\beta)=\log(x+n\beta)$; donc

$$\varphi^{(n)}(x+n\beta)=\pm\frac{1\,.\,2\,.\,3\ldots(n-1)}{(x+n\beta)^n};$$

donc

$$\log(x+\alpha)=\log x+\frac{\alpha}{x+\beta}+\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{x+2\beta}\cdot\frac{2\beta-\alpha}{x+2\beta}+\tfrac{1}{3}\cdot\frac{\alpha}{x+3\beta}\cdot\left(\frac{3\beta-\alpha}{x+3\beta}\right)^2+\cdots.$$

Soit $x=1$, on aura

$$\log(1+\alpha)=\frac{\alpha}{1+\beta}+\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{1+2\beta}\cdot\frac{2\beta-\alpha}{1+2\beta}+\tfrac{1}{3}\cdot\frac{\alpha}{1+3\beta}\cdot\left(\frac{3\beta-\alpha}{1+3\beta}\right)^2+\cdots,$$

$$\log(1+\alpha)=\frac{\alpha}{1+\beta}+\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{1+2\beta}\left(1-\frac{1+\alpha}{1+2\beta}\right)+\tfrac{1}{3}\cdot\frac{\alpha}{1+3\beta}\left(1-\frac{1+\alpha}{1+3\beta}\right)^2+\cdots.$$

Soit $\alpha=2\beta$, on aura

$$\log(1+2\beta)=\frac{2\beta}{1+\beta}+\tfrac{2}{3}\cdot\frac{\beta^3}{(1+3\beta)^3}+\tfrac{1}{4}\frac{2\,.\,2^3\,.\,\beta^4}{(1+4\beta)^4}+\cdots,$$

$$\log(3) = 1 + \tfrac{2}{3}\left(\tfrac{1}{4}\right)^3 + \tfrac{2}{4}\cdot\tfrac{1}{5}\cdot\left(\tfrac{2}{5}\right)^3 + \tfrac{2}{5}\cdot\tfrac{1}{6}\cdot\left(\tfrac{3}{6}\right)^4 + \tfrac{2}{6}\cdot\tfrac{1}{7}\cdot\left(\tfrac{4}{7}\right)^5 + \cdots + \frac{2}{n}\,\frac{1}{n+1}\left(\frac{n-2}{n+1}\right)^{n-1} + \cdots.$$

Problème V. Développer $\Delta_\alpha^n \varphi x$ suivant les puissances de n. On a

$$\mathrm{D}\,\Delta_\alpha^n \varphi x = (e^{v\alpha} - 1)^n f v;$$

donc

$$\mathrm{D}\,\Delta_\alpha^n \varphi x = f v\left(1 + n\log(e^{v\alpha} - 1) + \frac{n^2}{2}[\log(e^{v\alpha} - 1)]^2 + \cdots\right),$$

d'où l'on tire, en prenant la fonction génératrice,

$$\Delta_\alpha^n \varphi x = \varphi x + n\,\mathrm{fg}[\log(e^{v\alpha} - 1) f v] + \frac{n^2}{2}\,\mathrm{fg}[(\log(e^{v\alpha} - 1))^2 f v] + \cdots.$$

Soit

$$\mathrm{fg}[\log(e^{v\alpha} - 1) f v] = \delta\varphi x,$$

on aura

$$\mathrm{fg}[(\log(e^{v\alpha} - 1))^n f v] = \delta^n \varphi x;$$

donc

$$\Delta_\alpha^n \varphi x = \varphi x + n\delta\varphi x + \frac{n^2}{2}\delta^2\varphi x + \frac{n^3}{2.3}\delta^3\varphi x + \cdots.$$

Pour déterminer $\delta\varphi x$ il faut développer la quantité $\log(e^{v\alpha} - 1)$. On a

$$\log(e^{v\alpha} - 1) = \log[e^{v\alpha}(1 - e^{-v\alpha})] = v\alpha - e^{-v\alpha} - \tfrac{1}{2}e^{-2v\alpha} - \tfrac{1}{3}e^{-3v\alpha} - \cdots.$$

donc

$$\delta\varphi x = \alpha\frac{d\varphi x}{dx} - \varphi(x-\alpha) - \tfrac{1}{2}\varphi(x-2\alpha) - \tfrac{1}{3}\varphi(x-3\alpha) - \tfrac{1}{4}\varphi(x-4\alpha) - \cdots.$$

En différentiant cette expression par rapport à α, on aura

$$d(\delta\varphi x) = d\alpha\left(\frac{d\varphi x}{dx} + \varphi'(x-\alpha) + \varphi'(x-2\alpha) + \varphi'(x-3\alpha) + \cdots\right).$$

Soit

$$\varphi x + \varphi(x-\alpha) + \varphi(x-2\alpha) + \cdots = \delta_1\varphi x,$$

on aura

$$\mathrm{D}\varphi x + \mathrm{D}\varphi(x-\alpha) + \mathrm{D}\varphi(x-2\alpha) + \cdots = \mathrm{D}\delta_1\varphi x;$$

donc

$$(1 + e^{-\alpha v} + e^{-2\alpha v} + \cdots) f v = \frac{f v}{1 - e^{-\alpha v}} = \mathrm{D}\delta_1\varphi x;$$

donc

$$\mathrm{D}\delta_1\varphi x = \frac{e^{\alpha v} f v}{e^{\alpha v} - 1} = [1 + (e^{\alpha v} - 1)^{-1}] f v;$$

donc

$$\delta_1\varphi x = \varphi x + \Delta_\alpha^{-1}\varphi x;$$

donc

$$\delta_1\varphi' x = \varphi' x + \Delta_\alpha^{-1}\varphi' x;$$

donc

$$\frac{d(\delta\varphi x)}{d\alpha} = \varphi' x + \Sigma_\alpha \varphi' x,$$

et

$$\delta\varphi x = \alpha\varphi' x + \int d\alpha\, \Sigma_\alpha\, \varphi' x.$$

Si l'on veut exprimer $\delta\varphi x$ par $\frac{d^n \varphi x}{dx^n}$, il faut développer $\log(e^{v\alpha}-1)$ suivant les puissances de v. On aura

$$e^{v\alpha} - 1 = v\alpha + \frac{v^2\alpha^2}{2} + \frac{v^3\alpha^3}{2.3} + \cdots,$$

donc en posant

$$\log\left(\alpha v + \frac{\alpha^2}{2}v^2 + \cdots\right) = \log v + \log\alpha + \alpha A_1 v + \alpha^2 A_2 v^2 + \cdots,$$

on aura

$$\delta\varphi x = \text{fg}(\log v . fv) + \log\alpha . \varphi x + \alpha A_1 \varphi' x + \alpha^2 A_2 \varphi'' x + \alpha^3 A_3 \varphi''' x + \cdots.$$

Problème VI. Développer $\frac{d^n \varphi x}{dx^n}$ suivant les puissances de n. On a

$$\text{D}\left(\frac{d^n\varphi x}{dx^n}\right) = v^n fv = fv\left(1 + n\log v + \frac{n^2}{2}(\log v)^2 + \cdots\right);$$

donc

$$\frac{d^n \varphi x}{dx^n} = \varphi x + n . \delta\varphi x + \frac{n^2}{2}\delta^2\varphi x + \frac{n^3}{2.3}\delta^3\varphi x + \cdots,$$

où

$$\text{D}(\delta\varphi x) = \log v . fv;$$

or

$$\log v = -\log\left(1 + \frac{1}{v}\right) + \log(1+v) = v - \frac{1}{v} - \tfrac{1}{2}\left(v^2 - \frac{1}{v^2}\right) + \tfrac{1}{3}\left(v^3 - \frac{1}{v^3}\right) + \cdots,$$

donc

$$\delta\varphi x = \begin{cases} \varphi' x - \tfrac{1}{2}\varphi'' x + \tfrac{1}{3}\varphi''' x - \cdots \\ -\int \varphi x . dx + \tfrac{1}{2}\int^2 \varphi x . dx^2 - \tfrac{1}{3}\int^3 \varphi x . dx^3 + \cdots \end{cases}$$

On peut exprimer $\delta\varphi x$ de plusieurs autres manières. Soit par exemple

$$\log v = \log(1 + v - 1) = v - 1 - \tfrac{1}{2}(v-1)^2 + \tfrac{1}{3}(v-1)^3 - \cdots.$$

on aura

$$\delta\varphi x = \delta_1\varphi x - \tfrac{1}{2}\delta_1^2\varphi x + \tfrac{1}{3}\delta_1^3\varphi x - \cdots,$$

où

$$\delta_1 \varphi x = \varphi' x - \varphi x.$$

Problème VII. Développer $\frac{d^n(e^x\varphi x)}{dx^n}$ suivant les puissances de n. On a

$$\frac{d^n(e^x\varphi x)}{dx^n}=e^x\left(\varphi x+n\varphi' x+\frac{n(n-1)}{2}\varphi'' x+\cdots\right)=e^x\psi x;$$

donc

$$\mathrm{D}\,\psi x=\left(1+nv+\frac{n(n-1)}{2}v^2+\cdots\right)fv=(1+v)^n fv,$$

$$\mathrm{D}\,\psi x=fv\left(1+n\log(1+v)+\frac{n^2}{2}[\log(1+v)]^2+\cdots\right);$$

donc

$$\psi x=\varphi x+n\delta\varphi x+\frac{n^2}{2}\delta^2\varphi x+\frac{n^3}{2.3}\delta^3\varphi x+\cdots,$$

donc

$$\frac{d^n(e^x\varphi x)}{dx^n}=e^x\left(\varphi x+n\delta\varphi x+\frac{n^2}{2}\delta^2\varphi x+\frac{n^3}{2.3}\delta^3\varphi x+\cdots\right),$$

où

$$\mathrm{D}\,\delta\varphi x=\log(1+v).fv=fv\left(v-\tfrac{1}{2}v^2+\tfrac{1}{3}v^3-\cdots\right);$$

donc

$$\delta\varphi x=\varphi' x-\tfrac{1}{2}\varphi'' x+\tfrac{1}{3}\varphi''' x-\cdots.$$

On a

$$\mathrm{D}\,\varphi(x+\alpha)=e^{\alpha v}fv;$$

donc

$$\mathrm{D}\,\varphi(x+\alpha\sqrt{-1})=e^{\alpha v\sqrt{-1}}fv \quad \text{et} \quad \mathrm{D}\,\varphi(x-\alpha\sqrt{-1})=e^{-\alpha v\sqrt{-1}}fv,$$

d'où l'on tire

$$\mathrm{D}\,\frac{\varphi(x+\alpha\sqrt{-1})+\varphi(x-\alpha\sqrt{-1})}{2}=\cos\alpha v.fv,$$

$$\mathrm{D}\,\frac{\varphi(x+\alpha\sqrt{-1})-\varphi(x-\alpha\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}=\sin\alpha v.fv.$$

Or on a, comme on sait,

$$\tfrac{1}{2}=\cos\alpha v-\cos 2\alpha v+\cos 3\alpha v-\cdots,$$

donc en multipliant par fv et prenant la fonction génératrice,

$$\tfrac{1}{2}\varphi x=\frac{\varphi(x+\alpha\sqrt{-1})+\varphi(x-\alpha\sqrt{-1})}{2}-\frac{\varphi(x+2\alpha\sqrt{-1})+\varphi(x-2\alpha\sqrt{-1})}{2}$$
$$+\frac{\varphi(x+3\alpha\sqrt{-1})+\varphi(x-3\alpha\sqrt{-1})}{2}-\frac{\varphi(x+4\alpha\sqrt{-1})+\varphi(x-4\alpha\sqrt{-1})}{2}$$
$$+\text{etc.},$$

ou bien

$$\varphi x = \varphi(x+\alpha) + \varphi(x-\alpha) - \varphi(x+2\alpha) - \varphi(x-2\alpha)$$
$$+ \varphi(x+3\alpha) + \varphi(x-3\alpha) - \varphi(x+4\alpha) - \varphi(x-4\alpha)$$
$$+ \text{etc.}$$

Supposons qu'on ait

(21) $$\psi v = \int f(v,t)\,dt,$$

et soit

$$\psi v . fv = \mathrm{D}\,\delta\varphi x,$$

on aura, d'après la définition de la déterminante,

$$\delta\varphi x = \int e^{vx}\psi v . fv . dv$$

c'est-à-dire

$$\delta\varphi x = \int e^{vx} fv . dv \int f(v,t)\,dt = \int dt \int e^{vx} fv . f(v,t)\,dv.$$

Cela posé, soit

$$fv . f(v,t) = \mathrm{D}\,\delta_1\varphi x,$$

on aura

$$\delta_1\varphi x = \int e^{vx} fv . f(v,t)\,dv,$$

donc

(22) $$\delta\varphi x = \int dt . \delta_1\varphi x;$$

or on a $\mathrm{D}\,\delta\varphi x = \int \mathrm{D}\,\delta_1\varphi x . dt$, donc

(23) $\mathrm{D}\int dt . \delta_1\varphi x = \int \mathrm{D}\,\delta_1\varphi x . dt$, et $\int dt . \mathrm{fg}\,[fv . f(v,t)] = \mathrm{fg}[\int dt fv . f(v,t)]$.

Ces équations peuvent servir à exprimer $\delta\varphi x$ par une autre opération $\delta_1\varphi x$ au moyen d'une intégrale définie.

On a par exemple

$$(e^{v\alpha}-1)^{-1} - (v\alpha)^{-1} + \tfrac{1}{2} = 2\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{dt . \sin(v\alpha t)}{e^{2\pi t}-1};$$

donc en prenant la fonction génératrice,

$$\Sigma_\alpha \varphi x - \frac{1}{\alpha}\int \varphi x\,dx + \tfrac{1}{2}\varphi x = 2\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{dt}{e^{2\pi t}-1} . \frac{\varphi(x+\alpha t\sqrt{-1}) - \varphi(x-\alpha t\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}.$$

On a

$$\int_{a'}^{a} e^{(1-\alpha v)t}\,dt = e^{a}e^{-\alpha a v}\frac{1}{1-\alpha v} - e^{a'}.e^{-\alpha a' v}\frac{1}{1-\alpha v},$$

c'est-à-dire

$$\int_{a'}^{a} e^{t}e^{-\alpha v t}\,dt = e^{a}(e^{-\alpha a v} + \alpha v\,e^{-\alpha a v} + \alpha^2 v^2 e^{-\alpha a v} + \cdots)$$
$$- e^{a'}(e^{-\alpha a' v} + \alpha v\,e^{-\alpha a' v} + \alpha^2 v^2 e^{-\alpha a' v} + \cdots).$$

En multipliant par fv, et prenant la fonction génératrice, on aura en remarquant que $\operatorname{fg}(v^n e^{-\alpha a v} fv) = \frac{d^n\varphi(x-\alpha a)}{dx^n}$, $\operatorname{fg}(e^{-\alpha v t} fv) = \varphi(x-\alpha t)$,

$$\int_{a'}^{a} e^{t}\varphi(x-\alpha t)\,dt$$
$$= e^{a}[\varphi(x-\alpha a) + \alpha\varphi'(x-\alpha a) + \alpha^2\varphi''(x-\alpha a) + \alpha^3\varphi'''(x-\alpha a) + \cdots]$$
$$- e^{a'}[\varphi(x-\alpha a') + \alpha\varphi'(x-\alpha a') + \alpha^2\varphi''(x-\alpha a') + \alpha^3\varphi'''(x-\alpha a') + \cdots];$$

donc en faisant $a=0$ et $a' = -\frac{1}{0}$,

$$\varphi x + \alpha\varphi' x + \alpha^2\varphi'' x + \alpha^3\varphi''' x + \cdots = \int_{-\frac{1}{0}}^{0} e^{t}\varphi(x-\alpha t)\,dt;$$

donc en différentiant par rapport à x et mettant $-\alpha$ à la place de α,

$$\varphi' x - \alpha\varphi'' x + \alpha^2\varphi''' x - \alpha^3\varphi'''' x + \cdots = \int_{-\frac{1}{0}}^{0} e^{t}\varphi'(x+\alpha t)\,dt;$$

en multipliant par $d\alpha$ et intégrant, on aura

$$\alpha\varphi' x - \tfrac{1}{2}\alpha^2\varphi'' x + \tfrac{1}{3}\alpha^3\varphi''' x - \tfrac{1}{4}\alpha^4\varphi'''' x + \cdots = C + \int_{-\frac{1}{0}}^{0} \frac{e^{t}\varphi(x+\alpha t)\,dt}{t}.$$

En faisant $\alpha = 0$, on aura $C = -\int_{-\frac{1}{0}}^{0}\frac{e^{t}\,dt}{t}\varphi x$; donc

$$\alpha\varphi' x - \tfrac{1}{2}\alpha^2\varphi'' x + \tfrac{1}{3}\alpha^3\varphi''' x - \tfrac{1}{4}\alpha^4\varphi'''' x + \cdots = \int_{-\frac{1}{0}}^{0}\frac{e^{t}\,dt}{t}[\varphi(x+\alpha t) - \varphi x],$$

et lorsque $\alpha = 1$,

$$\varphi' x - \tfrac{1}{2}\varphi'' x + \tfrac{1}{3}\varphi''' x - \cdots = \int_{-\frac{1}{0}}^{0}\frac{e^{t}.\,dt}{t}[\varphi(x+t) - \varphi x].$$

De là il suit qu'on aura

$$\frac{d^n(e^x\varphi x)}{dx^n} = e^x\left(\varphi x + n\delta\varphi x + \frac{n^2}{2}\delta^2\varphi x + \frac{n^3}{2.3}\delta^3\varphi x + \cdots\right),$$

$$\text{où}\quad \delta\varphi x = \int_{\frac{1}{0}}^{0}\frac{e^{-t}\,dt}{t}[\varphi(x-t) - \varphi x].$$

On a

$$\frac{e^{\alpha a v}}{a v}-\frac{e^{\alpha a' v}}{a v}=\int_{a'}^{a} e^{\alpha v t}\,dt,$$

donc en prenant la fonction génératrice,

$$\int \varphi(x+\alpha a)\,dx-\int \varphi(x+\alpha a')\,dx=\alpha\int_{a'}^{a}\varphi(x+\alpha t)\,dt.$$

On a (*Legendre* Exerc. de calc. int. t. II, p. 176)

$$\int_0^{\frac{1}{0}}\frac{dt.\cos(avt)}{1+t^2}=\frac{\pi}{2}e^{-av},$$

donc

$$\int_0^{\frac{1}{0}}\frac{dt}{1+t^2}\cdot\frac{\varphi(x+\alpha t\sqrt{-1})+\varphi(x-\alpha t\sqrt{-1})}{2}=\frac{\pi}{2}\varphi(x\pm\alpha).$$

Soit par exemple $\varphi x=\frac{1}{x}$, on aura

$$\int_0^{\frac{1}{0}}\frac{dt}{(1+t^2)(\alpha^2t^2+x^2)}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{x(x\pm\alpha)}.$$

En effet,

$$\int_0^{\frac{1}{0}}\frac{dt}{(1+t^2)(\alpha^2t^2+x^2)}=\frac{1}{x^2-\alpha^2}\left(\int_0^{\frac{1}{0}}\frac{dt}{1+t^2}-\int_0^{\frac{1}{0}}\frac{\alpha^2\,dt}{x^2+\alpha^2t^2}\right)=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{x(x+\alpha)}.$$

Soit $\varphi x=\frac{1}{x^n}$, on aura, en faisant $\alpha t=z\sin\varphi$, $x=z\cos\varphi$,

$$\frac{\varphi(x+\alpha t\sqrt{-1})+\varphi(x-\alpha t\sqrt{-1})}{2}=z^{-n}\cos n\varphi,$$

or $z=\sqrt{x^2+\alpha^2t^2}$, $\varphi=\text{arc tang}\,\frac{\alpha t}{x}$, donc

$$\int_0^{\frac{1}{0}}\frac{dt}{1+t^2}\cdot\frac{\cos\left(n.\text{arc tang}\,\frac{\alpha t}{x}\right)}{(x^2+\alpha^2t^2)^{\frac{n}{2}}}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{(x+\alpha)^n}.$$

Soit par exemple $n=\frac{1}{2}$, on aura $\cos\frac{1}{2}\varphi=\sqrt{\frac{1+\cos\varphi}{2}}=\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+\alpha^2t^2}}\right)}$;
donc

$$\frac{\cos n\varphi}{z^n}=\frac{\cos\frac{1}{2}\varphi}{z^{\frac{1}{2}}}=\frac{\sqrt{\frac{1}{2}(x+\sqrt{x^2+\alpha^2t^2})}}{\sqrt{x^2+\alpha^2t^2}};$$

donc

$$\int_0^{\frac{1}{0}}\frac{dt}{1+t^2}\cdot\frac{\sqrt{x+\sqrt{x^2+\alpha^2t^2}}}{\sqrt{x^2+\alpha^2t^2}}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x+\alpha}}.$$

On a $z=\frac{x}{\cos\varphi}=\frac{\alpha t}{\sin\varphi}$, donc $t=\frac{x}{\alpha}\operatorname{tang}\varphi$; on tire de là

$$\frac{dt}{1+t^2}=\frac{\alpha x\,d\varphi}{\alpha^2\cos^2\varphi+x^2\sin^2\varphi},$$

$$z^{-n}\cos n\varphi=\frac{(\cos\varphi)^n}{x^n}\cos n\varphi;$$

donc

$$\frac{dt}{1+t^2}z^{-n}\cos n\varphi=\frac{\alpha}{x^{n-1}}\cdot\frac{(\cos\varphi)^n\cos n\varphi\,.\,d\varphi}{x^2\sin^2\varphi+\alpha^2\cos^2\varphi};$$

donc

$$\frac{\pi}{2}\cdot\frac{x^{n-1}}{\alpha(x+\alpha)^n}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\cos\varphi)^n\cos n\varphi\,.\,d\varphi}{(x\sin\varphi)^2+(\alpha\cos\varphi)^2}.$$

Soit $\alpha=x$, on aura

$$\frac{\pi}{2^{n+1}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\varphi)^n\cos n\varphi\,.\,d\varphi.$$

On trouve encore chez M. *Legendre* les deux intégrales suivantes:

$$\int_0^{\frac{1}{0}}\frac{dt\,.\sin at}{t(1+t^2)}=\frac{\pi}{2}(1-e^{-a}),$$

$$\int_0^{\frac{1}{0}}\frac{tdt\,.\sin at}{1+t^2}=\frac{\pi}{2}e^{-a};$$

donc on aura, en faisant $a=\alpha v$ et prenant la fonction génératrice,

$$\int_0^{\frac{1}{0}}\frac{dt}{t(1+t^2)}\cdot\frac{\varphi(x+\alpha t\sqrt{-1})-\varphi(x-\alpha t\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}=\frac{\pi}{2}[\varphi x-\varphi(x\pm\alpha)]$$

$$\int_0^{\frac{1}{0}}\frac{tdt}{1+t^2}\cdot\frac{\varphi(x+\alpha t\sqrt{-1})-\varphi(x-\alpha t\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}=\frac{\pi}{2}\varphi(x\pm\alpha).$$

En ajoutant, on aura une troisième formule,

$$\int_0^{\frac{1}{0}}\frac{dt}{t}\cdot\frac{\varphi(x+\alpha t\sqrt{-1})-\varphi(x-\alpha t\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}=\frac{\pi}{2}\varphi x,$$

ou bien en faisant $\alpha=1$:

$$\int_0^{\frac{1}{0}}\frac{dt}{t}\cdot\frac{\varphi(x+t\sqrt{-1})-\varphi(x-t\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}=\frac{\pi}{2}\varphi x.$$

Soit par exemple $\varphi x=\frac{1}{x^n}$, $t=x\,.\operatorname{tang}\varphi$, on aura

$$\frac{dt}{t} = \frac{d\varphi}{\cos\varphi \sin\varphi},$$

$$\frac{\varphi(x + t\sqrt{-1}) - \varphi(x - t\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}} = -\left(\frac{\cos\varphi}{x}\right)^n \sin n\varphi,$$

donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sin\varphi} (\cos\varphi)^{n-1} \sin n\varphi = \frac{\pi}{2}.$$

XII.

SUR QUELQUES INTÉGRALES DÉFINIES.

On a vu précédemment que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos\varphi)^n \cos n\varphi \,.\, d\varphi}{x^2 \sin^2\varphi + \alpha^2 \cos^2\varphi} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{x^{n-1}}{\alpha(x+\alpha)^n};$$

or

$$(\cos\varphi)^n = 1 + n \log\cos\varphi + \frac{n^2}{2}(\log\cos\varphi)^2 + \cdots,$$

$$\cos n\varphi = 1 - \frac{n^2}{2}\varphi^2 + \frac{n^4}{2.3.4}\varphi^4 - \cdots,$$

donc

$$(\cos\varphi)^n \cos n\varphi = 1 + n\log\cos\varphi + \frac{n^2}{2}[(\log\cos\varphi)^2 - \varphi^2]$$

$$+ \frac{n^3}{2.3}[(\log\cos\varphi)^3 - 3\varphi^2 \log\cos\varphi] + \cdots + \frac{n^m}{\Gamma(m+1)} A_m + \cdots.$$

où l'on a, en faisant pour abréger $\log\cos\varphi = t$,

$$\frac{A_m}{\Gamma(m+1)} = \frac{t_m}{\Gamma(m+1)} - \frac{t^{m-2}\varphi^2}{\Gamma(3)\,\Gamma(m-1)} + \frac{t^{m-4}\varphi^4}{\Gamma(5)\,\Gamma(m-3)} - \frac{t^{m-6}\varphi^6}{\Gamma(7)\,\Gamma(m-5)} + \cdots.$$

Or $\frac{x^n}{(x+\alpha)^n} = 1 + n\log\frac{x}{x+\alpha} + \frac{n^2}{2}\left(\log\frac{x}{x+\alpha}\right)^2 + \cdots$, donc on aura

$$\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{x\alpha}\left(\log\frac{x}{x+\alpha}\right)^m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{A_m\, d\varphi}{x^2\sin^2\varphi + \alpha^2\cos^2\varphi}.$$

Ainsi l'on aura

$$\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{x\alpha}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{x^2\sin^2\varphi+\alpha^2\cos^2\varphi}.$$

$$\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{x\alpha}\log\frac{x}{x+\alpha}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\log\cos\varphi\,.\,d\varphi}{x^2\sin^2\varphi+\alpha^2\cos^2\varphi}.$$

$$\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{x\alpha}\left(\log\frac{x}{x+\alpha}\right)^2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{[(\log\cos\varphi)^2-\varphi^2]\,d\varphi}{x^2\sin^2\varphi+\alpha^2\cos^2\varphi}.$$

En faisant $x=\alpha$ on aura

$$\frac{\pi}{2}(\log\tfrac{1}{2})^m=\int_0^{\frac{\pi}{2}}A_m\,d\varphi;$$

par exemple

$$\frac{\pi}{2}\log\tfrac{1}{2}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\,.\log\cos\varphi.$$

Soit $\cos\varphi=y$, on aura $d\varphi=-\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$, donc

$$\frac{\pi}{2}\log 2=\int_1^0\frac{\log y\,.\,dy}{\sqrt{1-y^2}}.$$

En effet on a

$$\int_0^1\frac{x^{p-1}dx\,\log\frac{1}{x}}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}}=\int_0^1\frac{x^{p-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}}\cdot\int_0^1\frac{(x^{p-1}-x^{p+q-1})\,dx}{1-x^n}.$$

donc

$$\int_0^1\frac{\log\frac{1}{y}\,dy}{\sqrt{1-y^2}}=\int_0^1\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}\cdot\int_0^1\frac{1-y}{1-y^2}dy;$$

or

$$\int_0^1\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=\frac{\pi}{2},\quad\text{et}\quad\int_0^1\frac{1-y}{1-y^2}dy=\log 2.$$

On a

$$\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{dt}{1+t^2} \cdot \frac{\varphi(x+\alpha t\sqrt{-1})+\varphi(x-\alpha t\sqrt{-1})}{2} = \frac{\pi}{2}\varphi(x+\alpha).$$

Soit $\varphi x = (\log x)^n$, on aura

$$\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{dt}{1+t^2} \cdot \frac{[\log(x+\alpha t\sqrt{-1})]^n+[\log(x-\alpha t\sqrt{-1})]^n}{2} = \frac{\pi}{2}[\log(x+\alpha)]^n.$$

Or on a

$$\log(x+\alpha t\sqrt{-1}) = \log x + \log\left(1+\frac{\alpha}{x}t\sqrt{-1}\right)$$

$$= \log x + \frac{\log\left(1+\frac{\alpha}{x}t\sqrt{-1}\right)-\log\left(1-\frac{\alpha}{x}t\sqrt{-1}\right)}{2} + \tfrac{1}{2}\log\left(1+\frac{\alpha^2}{x^2}t^2\right)$$

$$= \log x + \tfrac{1}{2}\log\left(1+\frac{\alpha^2}{x^2}t^2\right) + \sqrt{-1}\,.\,\text{arc tang}\left(\frac{\alpha t}{x}\right)$$

$$= \tfrac{1}{2}\log(x^2+\alpha^2t^2) + \sqrt{-1}\,.\,\text{arc tang}\left(\frac{\alpha t}{x}\right).$$

Soit $\frac{\alpha t}{x} = \text{tang}\,\varphi$, on aura

$$\log(x+\alpha t\sqrt{-1}) = \log x - \log\cos\varphi + \varphi\sqrt{-1}$$

$$\frac{dt}{1+t^2} = \frac{\alpha x\,.\,d\varphi}{x^2\sin^2\varphi+\alpha^2\cos^2\varphi};$$

donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{x^2\sin^2\varphi+\alpha^2\cos^2\varphi} \cdot \frac{\left(\log\frac{x}{\cos\varphi}+\varphi\sqrt{-1}\right)^n+\left(\log\frac{x}{\cos\varphi}-\varphi\sqrt{-1}\right)^n}{2} = \frac{\pi}{2x\alpha}[\log(x+\alpha)]^n.$$

En faisant $x=\alpha=1$, on aura

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\left[\left(\log\frac{1}{\cos\varphi}-\varphi\sqrt{-1}\right)^n+\left(\log\frac{1}{\cos\varphi}+\varphi\sqrt{-1}\right)^n\right] = \pi(\log 2)^n.$$

On a aussi en général, en faisant $t = \text{tang}\,u$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} du\,[\varphi(x+\alpha\sqrt{-1}\,\text{tang}\,u)+\varphi(x-\alpha\sqrt{-1}\,\text{tang}\,u)] = \pi\varphi(x+\alpha);$$

donc en faisant $x=\alpha=1$, on aura

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} du\,[\varphi(1+\sqrt{-1}\,\text{tang}\,u)+\varphi(1-\sqrt{-1}\,\text{tang}\,u)] = \pi\varphi(2).$$

Soit $\varphi x = \frac{x^m}{1+\alpha x^n}$, on aura

$$\varphi(1+\sqrt{-1}\tang u) = \frac{(1+\sqrt{-1}\tang u)^m}{1+\alpha(1+\sqrt{-1}\tang u)^n} = \frac{(\cos mu + \sqrt{-1}\sin mu)(\cos u)^{n-m}}{(\cos u)^n + \alpha\cos nu + \alpha\sqrt{-1}\sin nu}$$

$$= \frac{(\cos u)^{n-m}}{[(\cos u)^n + \alpha\cos nu]^2 + \alpha^2\sin^2 nu}[(\cos u)^n\cos mu + \alpha\cos(m-n)u$$

$$+\sqrt{-1}((\cos u)^n \sin mu + \alpha\sin(m-n)u)];$$

on tire de là

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos u)^{n-m}[\cos mu(\cos u)^n + \alpha\cos(n-m)u]}{(\cos u)^{2n} + 2\alpha\cos nu(\cos u)^n + \alpha^2} du = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{2^m}{1+\alpha 2^n}.$$

Soit $m=0$, on aura

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos u)^n[(\cos u)^n + \alpha\cos nu]du}{(\cos u)^{2n} + 2\alpha\cos nu(\cos u)^n + \alpha^2} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{1+\alpha 2^n}.$$

Soit $m=n$, on aura

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos nu(\cos u)^n + \alpha}{(\cos u)^{2n} + 2\alpha\cos nu(\cos u)^n + \alpha^2} du = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{2^n}{1+\alpha 2^n}.$$

Si par exemple $n=1$, on aura

$$\frac{\pi}{1+2\alpha} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos u)^2+\alpha}{(\cos u)^2(1+2\alpha)+\alpha^2} du = \int_0^1 \frac{y^2+\alpha}{y^2(1+2\alpha)+\alpha^2}\cdot\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Reprenons la formule

$$\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2^n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\varphi)^n \cos n\varphi \,.\, d\varphi.$$

Soit $n = \frac{m}{n}$, on aura

$$\frac{\pi}{2}\,\frac{1}{2^{\frac{m}{n}}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\varphi)^{\frac{m}{n}} \cos\frac{m}{n}\varphi \,.\, d\varphi.$$

Soit $\frac{\varphi}{n} = \theta$, on aura

$$\frac{\pi}{2n}\cdot\frac{1}{2^{\frac{m}{n}}} = \int_0^{\frac{\pi}{2n}} (\cos n\theta)^{\frac{m}{n}} \cos m\theta \,.\, d\theta;$$

or

$$\cos n\theta = (\cos\theta)^n - \frac{n(n-1)}{2}(\cos\theta)^{n-2}\sin^2\theta + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.3.4}(\cos\theta)^{n-4}\sin^4\theta - \cdots,$$

donc en faisant $\cos\theta = y$, $d\theta = -\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$,

$$\frac{\pi}{2n}\cdot\frac{1}{2^{\frac{m}{n}}} = -\int_1^{\cos\frac{\pi}{2n}} \sqrt[n]{(\psi y)^m}\, fy \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}},$$

où

$$\psi y = y^n - \frac{n(n-1)}{2} y^{n-2}(1-y^2) + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.3.4} y^{n-4}(1-y^2)^2 - \dots,$$

$$fy = y^m - \frac{m(m-1)}{2} y^{m-2}(1-y^2) + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2.3.4} y^{m-4}(1-y^2)^2 - \dots,$$

Soit par exemple $m=1$, $n=4$, on aura

$$\frac{\pi}{8}\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{2}} = -\int_1^{\cos\frac{\pi}{8}} \sqrt[4]{1-8y^2+8y^4}\, \frac{y\,dy}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Si l'on fait $y^2 = 1 - z^2$, on trouvera

$$\frac{\pi}{8}\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{2}} = \int_0^{\sin\frac{\pi}{8}} dz \sqrt[4]{1-8z^2+8z^4}.$$

XIII.

THÉORIE DES TRANSCENDANTES ELLIPTIQUES.

CHAPITRE I.

Réduction de l'intégrale $\int \frac{Pdx}{\sqrt{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4}}$ *par des fonctions algébriques.*

1. Pour plus de simplicité je désigne le radical par $\sqrt{R}$, on a donc à considérer l'integrale

$$\int \frac{Pdx}{\sqrt{R}},$$

P désignant une fonction algébrique rationnelle de x. On peut, comme on sait, décomposer P en plusieurs termes de la forme

$$Ax^m \text{ et } \frac{A}{(x-a)^m},$$

m étant un nombre entier quelconque. L'intégrale proposée $\int \frac{Pdx}{\sqrt{R}}$ est donc immédiatement décomposable en plusieurs autres intégrales de la forme

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{R}} \text{ et } \int \frac{dx}{(x-a)^m.\sqrt{R}}.$$

Cherchons les réductions qu'on peut faire avec ces deux intégrales, en les considérant d'abord séparément, et puis ensemble.

Réduction de l'intégrale $\int \frac{x^m dx}{\sqrt{R}}$.

2. Pour trouver la réduction générale dont cette intégrale est susceptible au moyen de fonctions algébriques, il s'agit de trouver la fonction algébrique la plus générale, dont la différentielle puisse se décomposer en termes de la forme $\frac{Ax^m dx}{\sqrt{R}}$; car après avoir intégré la différentielle ainsi décomposée, il est clair qu'on obtiendra la relation la plus générale qu'on puisse obtenir entre les intégrales de la forme $\int \frac{x^m dx}{\sqrt{R}}$.

Or on sait par le calcul différentiel qu'en différentiant une fonction qui contient des radicaux, ces mêmes radicaux se trouvent aussi dans la différentielle; il est donc impossible que la fonction cherchée puisse contenir d'autres radicaux que $\sqrt{R}$; elle est donc de la forme $f(x, \sqrt{R})$, f désignant une fonction algébrique rationnelle de x et de $\sqrt{R}$. Une telle fonction est, comme on sait, toujours réductible à la forme $Q' + Q\sqrt{R}$, Q' et Q désignant deux fonctions rationnelles de x. Or il est clair qu'on peut faire abstraction du premier terme Q', puisque sa différentielle ne contient que des quantités rationnelles; on a donc

$$f(x, \sqrt{R}) = Q\sqrt{R}.$$

En différentiant $Q\sqrt{R}$, on voit au premier coup d'oeil que la différentielle contiendra nécessairement des termes de la forme $\frac{A.dx}{(x-a)^m \sqrt{R}}$ si Q est fractionnaire; car supposons que Q contienne un terme $\frac{1}{(x-a)^m}$, on aura, en différentiant $\frac{\sqrt{R}}{(x-a)^m}$:

$$d\left(\frac{\sqrt{R}}{(x-a)^m}\right) = \left\{ \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{dR}{dx}}{(x-a)^m} - \frac{mR}{(x-a)^{m+1}} \right\} \cdot \frac{dx}{\sqrt{R}}.$$

Or, quel que soit m, il est impossible que le coefficient de $\frac{dx}{\sqrt{R}}$ dans l'expression précédente puisse devenir entier, à moins que R ne contienne deux ou plusieurs facteurs égaux; mais ce cas doit être exclu, puisqu'alors l'intégrale proposée serait de la forme $\int \frac{Pdx}{\sqrt{\alpha + \beta x + \gamma x^2}}$; donc, comme la différentielle ne

doit contenir que des termes de la forme $\frac{Ax^m dx}{\sqrt{R}}$, il faut que Q soit une fonction algébrique entière de x; on a donc

$$Q = f(0) + f(1)x + f(2)x^2 + \cdots + f(n)x^n.$$

3. Différentions maintenant la fonction trouvée $Q\sqrt{R}$. On obtiendra d'abord

$$d(Q\sqrt{R}) = dQ.\sqrt{R} + \tfrac{1}{2}.\frac{Q\,dR}{\sqrt{R}},$$

donc

$$d(Q\sqrt{R}) = \frac{R\,dQ + \frac{1}{2}Q\,dR}{dx}.\frac{dx}{\sqrt{R}} = S\frac{dx}{\sqrt{R}},$$

$$\text{où}\quad S = R\frac{dQ}{dx} + \tfrac{1}{2}Q\frac{dR}{dx}.$$

On a

$$R = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4,$$
$$Q = f(0) + f(1)x + f(2)x^2 + \cdots + f(n)x^n,$$

donc en différentiant

$$\frac{dR}{dx} = \beta + 2\gamma x + 3\delta x^2 + 4\varepsilon x^3,$$

$$\frac{dQ}{dx} = f(1) + 2f(2)x + 3f(3)x^2 + \cdots + nf(n)x^{n-1}.$$

En substituant ces valeurs dans l'expression de S, on obtiendra

$$S = (\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4)[f(1) + 2f(2)x + \cdots + nf(n)x^{n-1}]$$
$$+ \tfrac{1}{2}(\beta + 2\gamma x + 3\delta x^2 + 4\varepsilon x^3)[f(0) + f(1)x + \cdots + f(n)x^n].$$

Soit

$$S = \varphi(0) + \varphi(1)x + \cdots + \varphi(m-1)x^{m-1} + \varphi(m)x^m.$$

On obtiendra, en développant et comparant les coefficiens, l'équation générale

$$\varphi(p) = (p+1)f(p+1).\alpha + pf(p).\beta + (p-1)f(p-1).\gamma + (p-2)f(p-2).\delta$$
$$+ (p-3)f(p-3).\varepsilon + \tfrac{1}{2}f(p).\beta + f(p-1).\gamma + \tfrac{3}{2}f(p-2).\delta + 2f(p-3).\varepsilon,$$

c'est-à-dire

$$\text{(a)}\quad \begin{cases} \varphi(p) = (p+1)f(p+1).\alpha + (p+\frac{1}{2})f(p).\beta + pf(p-1).\gamma \\ \qquad + (p-\frac{1}{2})f(p-2).\delta + (p-1)f(p-3).\varepsilon. \end{cases}$$

En faisant successivement $p=0, 1, 2, 3 \ldots m$, on obtiendra toutes les équations qui résultent de l'égalité des deux valeurs de S.

Quant à la valeur de n, on trouvera $n+3=m$, donc

$$n=m-3.$$

4. De l'équation $d(Q\sqrt{R})=S\frac{dx}{\sqrt{R}}$, on tire en intégrant

$$Q\sqrt{R}=\int S\frac{dx}{\sqrt{R}};$$

et en substituant les valeurs de Q et de S,

$$\text{(b)}\quad \begin{cases} \varphi(0)\int\frac{dx}{\sqrt{R}}+\varphi(1)\int\frac{x\,dx}{\sqrt{R}}+\cdots+\varphi(m-1)\int\frac{x^{m-1}.dx}{\sqrt{R}}+\varphi(m)\int\frac{x^m\,dx}{\sqrt{R}} \\ \qquad =\sqrt{R}[f(0)+f(1).x+f(2).x^2+\cdots+f(m-3).x^{m-3}]. \end{cases}$$

Cette équation contient la relation la plus générale qu'on puisse trouver par des fonctions algébriques entre plusieurs intégrales de la forme $\int\frac{x^m\,dx}{\sqrt{R}}$, et c'est de cette équation qu'il faut tirer toutes les réductions dont les intégrales de cette forme sont susceptibles. Le premier membre de cette équation est en même temps l'intégrale la plus générale de la forme $\int\frac{P\,dx}{\sqrt{R}}$, P désignant une fonction entière de x, qui est intégrable par des fonctions algébriques.

5. Considérons maintenant l'équation (b). Comme la fonction multipliée par $\sqrt{R}$ du second membre doit être entière, il faut que m soit égal ou plus grand que 3. Il suit de là qu'il est impossible de trouver une relation entre les intégrales $\int\frac{dx}{\sqrt{R}}$, $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{R}}$, $\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{R}}$, et que par conséquent ces trois intégrales sont irréductibles entre elles par des fonctions algébriques. Si au contraire m est égal ou supérieur à 3, on voit qu'il est toujours possible de réduire l'intégrale $\int\frac{x^m\,dx}{\sqrt{R}}$ à des intégrales de la même forme dans lesquelles m est moindre; et il est évident que les seules intégrales irréductibles sont les trois suivantes

$$\int\frac{dx}{\sqrt{R}}, \int\frac{x\,dx}{\sqrt{R}}, \int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{R}}.$$

Ces intégrales sont donc les seules fonctions transcendantes contenues dans l'intégrale $\int \frac{P dx}{\sqrt{R}}$, P étant une fonction entière.

6. Pour réduire l'intégrale $\int \frac{x^m dx}{\sqrt{R}}$, faisons dans l'équation (b), $\varphi(m) = -1$, nous aurons

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{R}} = \varphi(0)\int \frac{dx}{\sqrt{R}} + \varphi(1)\int \frac{x dx}{\sqrt{R}} + \cdots + \varphi(m-1)\int \frac{x^{m-1} dx}{\sqrt{R}}$$
$$- \sqrt{R}\,[f(0) + f(1)x + f(2)x^2 + \cdots + f(m-3)x^{m-3}].$$

D'après ce qui précède on peut faire

$$\varphi(m-1) = \varphi(m-2) = \cdots = \varphi(3) = 0,$$

on a donc

$$\text{(c)}\quad \begin{cases} \int \frac{x^m dx}{\sqrt{R}} = \varphi(0)\int \frac{dx}{\sqrt{R}} + \varphi(1)\int \frac{x dx}{\sqrt{R}} + \varphi(2)\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{R}} \\ \qquad - \sqrt{R}\,[f(0) + f(1)x + f(2)x^2 + \cdots + f(m-3)x^{m-3}]. \end{cases}$$

Il reste à déterminer les coefficiens

$$\varphi(0),\ \varphi(1),\ \varphi(2),\ f(0),\ f(1),\ f(2) \ldots f(m-3).$$

Pour cela faisons dans l'équation (a) $p = 0$, $p = 1, \ldots p = m$, on obtiendra les équations suivantes, au nombre de $m+1$:

$$\varphi(0) = f(1).\alpha + \tfrac{1}{2} f(0).\beta,$$
$$\varphi(1) = 2f(2).\alpha + \tfrac{3}{2} f(1).\beta + f(0).\gamma,$$
$$\varphi(2) = 3f(3).\alpha + \tfrac{5}{2} f(2).\beta + 2f(1).\gamma + \tfrac{3}{2} f(0).\delta,$$
$$0 = 4f(4).\alpha + \tfrac{7}{2} f(3).\beta + 3f(2).\gamma + \tfrac{5}{2} f(1).\delta + 2f(0).\varepsilon,$$
$$0 = 5f(5).\alpha + \tfrac{9}{2} f(4).\beta + 4f(3).\gamma + \tfrac{7}{2} f(2).\delta + 3f(1).\varepsilon,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$0 = (m-3)f(m-3).\alpha + (m-\tfrac{7}{2})f(m-4).\beta + (m-4)f(m-5).\gamma$$
$$+ (m-\tfrac{9}{2})f(m-6).\delta + (m-5)f(m-7).\varepsilon,$$
$$0 = (m-\tfrac{5}{2})f(m-3).\beta + (m-3)f(m-4).\gamma + (m-\tfrac{7}{2})f(m-5).\delta + (m-4)f(m-6).\varepsilon,$$
$$0 = (m-2)f(m-3).\gamma + (m-\tfrac{5}{2})f(m-4).\delta + (m-3)f(m-5).\varepsilon,$$
$$0 = (m-\tfrac{3}{2})f(m-3).\delta + (m-2)f(m-4).\varepsilon,$$
$$-1 = (m-1)f(m-3).\varepsilon,$$

en remarquant que $\varphi(m) = -1$, $\varphi(3) = \varphi(4) = \cdots = \varphi(m-1) = 0$.

Au moyen des $m-2$ dernières équations on peut déterminer les $m-2$ quantités $f(0)$, $f(1)$, $\ldots f(m-3)$, et les trois premières serviront ensuite à déterminer $\varphi(0)$, $\varphi(1)$, $\varphi(2)$. En éliminant on trouvera

$$f(m-3) = -\frac{1}{m-1}\cdot\frac{1}{\varepsilon},$$

$$f(m-4) = \frac{(m-\frac{3}{2})}{(m-1)(m-2)}\cdot\frac{\delta}{\varepsilon^2},$$

$$f(m-5) = \frac{(m-2)}{(m-1)(m-3)}\cdot\frac{\gamma}{\varepsilon^2} - \frac{(m-\frac{3}{2})(m-\frac{5}{2})}{(m-1)(m-2)(m-3)}\cdot\frac{\delta^2}{\varepsilon^3},$$

$$f(m-6) = \frac{(m-\frac{5}{2})}{(m-1)(m-4)}\cdot\frac{\beta}{\varepsilon^2} - \frac{(m-\frac{3}{2})(m-3)}{(m-1)(m-2)(m-4)}\cdot\frac{\delta\gamma}{\varepsilon^3} - \frac{(m-2)(m-\frac{7}{2})}{(m-1)(m-3)(m-4)}\cdot\frac{\delta\gamma}{\varepsilon^3}$$
$$+ \frac{(m-\frac{3}{2})(m-\frac{5}{2})(m-\frac{7}{2})}{(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}\cdot\frac{\delta^3}{\varepsilon^4},$$

$$f(m-7) = \frac{(m-3)}{(m-1)(m-5)}\cdot\frac{\alpha}{\varepsilon^2} - \frac{(m-\frac{3}{2})(m-\frac{7}{2})}{(m-1)(m-2)(m-5)}\cdot\frac{\beta\delta}{\varepsilon^3} - \frac{(m-\frac{5}{2})(m-\frac{9}{2})}{(m-1)(m-4)(m-5)}\cdot\frac{\beta\delta}{\varepsilon^3}$$
$$- \frac{(m-2)(m-4)}{(m-1)(m-3)(m-5)}\cdot\frac{\gamma^2}{\varepsilon^3} + \frac{(m-\frac{3}{2})(m-\frac{5}{2})(m-4)}{(m-1)(m-2)(m-3)(m-5)}\cdot\frac{\gamma\delta^2}{\varepsilon^4}$$
$$+ \frac{(m-\frac{3}{2})(m-3)(m-\frac{9}{2})}{(m-1)(m-2)(m-4)(m-5)}\cdot\frac{\gamma\delta^2}{\varepsilon^4} + \frac{(m-2)(m-\frac{7}{2})(m-\frac{9}{2})}{(m-1)(m-3)(m-4)(m-5)}\cdot\frac{\gamma\delta^2}{\varepsilon^4}$$
$$- \frac{(m-\frac{3}{2})(m-\frac{5}{2})(m-\frac{7}{2})(m-\frac{9}{2})}{(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)}\cdot\frac{\delta^4}{\varepsilon^5}.$$

7. Pour exprimer en général le coefficient $f(m-p)$, faisons $\varepsilon = \varepsilon^{(0)}$, $\delta = \varepsilon^{(1)}$, $\gamma = \varepsilon^{(2)}$, $\beta = \varepsilon^{(3)}$, $\alpha = \varepsilon^{(4)}$. Cela posé, on peut aisément se convaincre que $f(m-p)$ est composé de termes de la forme

$$(-1)^{n+1}\cdot\frac{\left(m-\frac{k+1}{2}\right)\left(m-\frac{k'+k}{2}\right)\cdots\left(m-\frac{k^{(n)}+k^{(n-1)}}{2}\right)\left(m-\frac{k^{(n)}+p-2}{2}\right)}{(m-1)(m-k)(m-k')\ldots(m-k^{(n-1)})(m-k^{(n)})(m-p+2)}$$
$$\times\frac{\varepsilon^{(k-1)}\cdot\varepsilon^{(k'-k)}\cdot\varepsilon^{(k''-k')}\cdots\varepsilon^{(k^{(n)}-k^{(n-1)})}\cdot\varepsilon^{(p-k^{(n)}-2)}}{\varepsilon^{n+3}},$$

où les quantités k, k', k'', etc. $p-2$ suivent l'ordre de leur grandeur, de manière que $k' > k$, $k'' > k'$, etc. $p-2 > k^{(n)}$.

En donnant avec cette restriction toutes les valeurs entières aux quantités k, k', k'' etc. $k^{(n)}$, et à n toutes les valeurs entières depuis le plus grand nombre entier compris dans $\frac{p}{4}-2$ jusqu'à $p-5$, et en remarquant que chaque dénominateur aura $n+3$ facteurs binomes, on obtiendra tous les termes dont $f(m-p)$ est composé. On a donc

$$\text{(d)}\left\{\begin{aligned} f(m-p) = \Sigma \frac{(-1)^{n+1}}{\varepsilon^{n+3}} \cdot \frac{\left(m-\frac{k+1}{2}\right)\left(m-\frac{k'+k}{2}\right)\cdots\left(m-\frac{k^{(n)}+k^{(n-1)}}{2}\right)\left(m-\frac{k^{(n)}+p-2}{2}\right)}{(m-1)(m-k)(m-k')\ldots(m-k^{(n)})(m-p+2)} \\ \times \varepsilon^{(k-1)} \cdot \varepsilon^{(k'-k)} \cdot \varepsilon^{(k''-k')} \ldots \varepsilon^{(p-k^{(n)}-2)}. \end{aligned}\right.$$

Ayant ainsi trouvé les quantités $f(0)$, $f(1)$, $f(2) \ldots f(m-3)$, on a ensuite

$$\text{(e)} \qquad \left\{\begin{aligned} \varphi(0) &= \alpha . f(1) + \tfrac{1}{2}\beta . f(0), \\ \varphi(1) &= 2\alpha . f(2) + \tfrac{3}{2}\beta . f(1) + \gamma . f(0), \\ \varphi(2) &= 3\alpha . f(3) + \tfrac{5}{2}\beta . f(2) + 2\gamma . f(1) + \tfrac{3}{2}\delta . f(0). \end{aligned}\right.$$

8. Appliquons ce qui précède à un exemple, et proposons-nous de réduire l'intégrale

$$\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{R}}.$$

On a $m = 4$, $n = m - 3 = 1$, donc

$$\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{R}} = \varphi(0)\int \frac{dx}{\sqrt{R}} + \varphi(1)\int \frac{x\,dx}{\sqrt{R}} + \varphi(2)\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{R}}$$
$$- \sqrt{R}\,[f(0) + f(1) . x].$$

Par les équations précédentes on a, en faisant $m = 4$,

$$f(1) = -\frac{1}{3\varepsilon}, \quad f(0) = \frac{5\delta}{12\varepsilon^2}, \quad f(2) = f(3) = \text{etc.} = 0.$$

En substituant ces valeurs dans les équations (e), on aura

$$\varphi(0) = \tfrac{5}{24} \cdot \frac{\beta\delta}{\varepsilon^2} - \tfrac{1}{3} \cdot \frac{\alpha}{\varepsilon},$$

$$\varphi(1) = \tfrac{5}{12} \cdot \frac{\gamma\delta}{\varepsilon^2} - \tfrac{1}{2} \cdot \frac{\beta}{\varepsilon}.$$

$$\varphi(2) = \tfrac{5}{8} \cdot \frac{\delta^2}{\varepsilon^2} - \tfrac{2}{3} \cdot \frac{\gamma}{\varepsilon}.$$

En substituant ces valeurs, on aura

$$\begin{aligned} \int \frac{x^4 dx}{\sqrt{R}} &= \left(\tfrac{5}{24} \cdot \frac{\beta\delta}{\varepsilon^2} - \tfrac{1}{3} \cdot \frac{\alpha}{\varepsilon}\right)\int \frac{dx}{\sqrt{R}} \\ &+ \left(\tfrac{5}{12} \cdot \frac{\gamma\delta}{\varepsilon^2} - \tfrac{1}{2} \cdot \frac{\beta}{\varepsilon}\right)\int \frac{x\,dx}{\sqrt{R}} \\ &+ \left(\tfrac{5}{8} \cdot \frac{\delta^2}{\varepsilon^2} - \tfrac{2}{3} \cdot \frac{\gamma}{\varepsilon}\right)\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{R}} \\ &- \left(\tfrac{5}{12} \cdot \frac{\delta}{\varepsilon^2} - \tfrac{1}{3} \cdot \frac{1}{\varepsilon}\,x\right)\sqrt{R}. \end{aligned}$$

9. Dans le cas où $\beta=\gamma=\delta=0$, la valeur de $f(m-p)$ se simplifie beaucoup, et se réduit à un seul terme. En effet, comme $\varepsilon^{(1)}=\varepsilon^{(2)}=\varepsilon^{(3)}=0$, $\varepsilon^{(4)}=\alpha$, il est clair que tous les termes s'évanouiront dans l'expression de $f(m-p)$, excepté ceux dans lesquels on a $k-1=k'-k=k''-k'=\cdots=p-2-k^{(n)}=4$. On a donc $k=5$, $k'=9$, $k''=13$, $\ldots k^{(n)}=4n+5$, $p=4n+11$, d'où $n=\frac{p-11}{4}$. Chacune de ces quantités n, k, k', $\ldots k^{(n)}$ n'a donc qu'une seule valeur, d'où il suit que $f(m-p)$ ne contient qu'un seul terme. De plus comme on a trouvé $p=4n+11$, il est clair que toutes les quantités $f(m-p)$ s'évanouiront, excepté celles de la forme $f(m-4n-11)$, dont la valeur est

$$(-1)^{n+1}\frac{(m-3)(m-7)(m-11)\ldots(m-4n-7)}{(m-1)(m-5)(m-9)\ldots(m-4n-9)}\cdot\frac{\alpha^{n+2}}{\varepsilon^{n+3}}.$$

ou bien en mettant $n-3$ au lieu de n,

$$f(m-4n+1)=(-1)^n\frac{(m-3)(m-7)(m-11)\ldots(m-4n+5)}{(m-1)(m-5)(m-9)\ldots(m-4n+3)}\cdot\frac{\alpha^{n-1}}{\varepsilon^n}.$$

Pour déterminer $\varphi(0)$, $\varphi(1)$, $\varphi(2)$, il faut distinguer quatre cas:

1) si $m=4r$, 2) si $m=4r+1$, 3) si $m=4r+2$, 4) si $m=4r+3$.

Dans le premier cas on a

$$f(4r-4n+1)=(-1)^n\frac{(4r-3)(4r-7)\ldots(4r-4n+5)}{(4r-1)(4r-5)\ldots(4r-4n+3)}\cdot\frac{\alpha^{n-1}}{\varepsilon^n}.$$

En faisant $n=r$, on a

$$f(1)=(-1)^r\frac{5.9.13\ldots(4r-3)}{3.7.11\ldots(4r-1)}\cdot\frac{\alpha^{r-1}}{\varepsilon^r},$$

$$\varphi(0)=\alpha.f(1),\ \varphi(1)=\varphi(2)=0.$$

Dans le second cas on a

$$f(4r-4n+2)=(-1)^n\frac{(4r-2)(4r-6)\ldots(4r-4n+6)}{4r(4r-4)\ldots(4r-4n+4)}\cdot\frac{\alpha^{n-1}}{\varepsilon^n}.$$

En faisant $n=r$, on a

$$f(2)=(-1)^r\frac{6.10.14\ldots(4r-2)}{4.8.12\ldots4r}\cdot\frac{\alpha^{r-1}}{\varepsilon^r},$$

$$\varphi(1)=2\alpha.f(2),\ \varphi(0)=\varphi(2)=0.$$

Dans le troisième cas on a

$$f(4r-4n+3)=(-1)^n.\frac{(4r-1)(4r-5)\ldots(4r-4n+7)}{(4r+1)(4r-3)\ldots(4r-4n+5)}\cdot\frac{\alpha^{n-1}}{\varepsilon^n}.$$

En faisant $n=r$, on a

$$f(3)=(-1)^r\frac{7.11.15\ldots(4r-1)}{5.\ 9.13\ldots(4r+1)}\cdot\frac{\alpha^{r-1}}{\varepsilon^r},$$

$$\varphi(2)=3\alpha.f(3),\ \varphi(0)=\varphi(1)=0.$$

Dans le quatrième cas on a

$$f(4r-4n+4)=(-1)^n.\frac{4r(4r-4)(4r-8)\ldots(4r-4n+8)}{(4r+2)(4r-2)\ldots(4r-4n+6)}\cdot\frac{\alpha^{n-1}}{\varepsilon^n},$$

donc

$$f(1)=f(2)=f(3)=0,\ \varphi(0)=\varphi(1)=\varphi(2)=0.$$

10. On a vu que trois fonctions transcendantes sont nécessaires pour intégrer la différentielle $\int\frac{Pdx}{\sqrt{R}}$, P étant une fonction entière. Donc si l'on veut réduire ce nombre, il en résultera nécessairement certaines relations entre les quantités α, β, γ, δ, ε. Si l'on veut par exemple que $\int\frac{Pdx}{\sqrt{R}}$ soit intégrable algébriquement, on doit faire $\varphi(0)=\varphi(1)=\varphi(2)=0$, d'où il résultera, entre les cinq quantités α, β, γ, δ, ε, trois relations, par lesquelles on en peut déterminer trois en fonction des deux autres. Déterminons par exemple α, β, γ, δ, ε de manière que $\int\frac{x^4dx}{\sqrt{R}}$ devienne intégrable algébriquement.

On a vu précédemment que dans ce cas

$$\varphi(0)=\tfrac{5}{24}\cdot\frac{\beta\delta}{\varepsilon^2}-\tfrac{1}{3}\cdot\frac{\alpha}{\varepsilon},$$

$$\varphi(1)=\tfrac{5}{12}\cdot\frac{\gamma\delta}{\varepsilon^2}-\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\beta}{\varepsilon},$$

$$\varphi(2)=\tfrac{5}{8}\cdot\frac{\delta^2}{\varepsilon^2}-\tfrac{2}{3}\cdot\frac{\gamma}{\varepsilon}.$$

Comme ces quantités doivent être égalées à zéro, on trouvera

$$\gamma=\tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{5}{8}\cdot\frac{\delta^2}{\varepsilon}=\tfrac{15}{16}\cdot\frac{\delta^2}{\varepsilon},$$

$$\beta=2.\tfrac{5}{12}\cdot\frac{\gamma\delta}{\varepsilon}=\tfrac{5}{6}\cdot\tfrac{15}{16}\cdot\frac{\delta^3}{\varepsilon^2}=\tfrac{25}{32}\cdot\frac{\delta^3}{\varepsilon^2},$$

$$\alpha=\tfrac{5}{8}\cdot\frac{\beta\delta}{\varepsilon}=\tfrac{125}{256}\cdot\frac{\delta^4}{\varepsilon^3},$$

donc

$$R=\tfrac{125}{256}\cdot\frac{\delta^4}{\varepsilon^3}+\tfrac{25}{32}\cdot\frac{\delta^3}{\varepsilon^2}x+\tfrac{15}{16}\cdot\frac{\delta^2}{\varepsilon}x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4;$$

donc lorsque R a cette valeur, on a

$$\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{R}} = -\left(\tfrac{5}{12} \cdot \frac{\delta}{\varepsilon^2} - \tfrac{1}{3} \cdot \frac{1}{\varepsilon} x\right) \sqrt{R}.$$

En faisant $\delta = 4$ et $\varepsilon = 5$, on obtiendra

$$\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4}} = \tfrac{1}{15}(x-1)\sqrt{1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4}.$$

Réduction de l'intégrale $\int \frac{dx}{(x-a)^m \sqrt{R}}$.

11. Pour réduire cette intégrale il faut, d'après ce qu'on a vu précédemment, différentier $Q\sqrt{R}$ en supposant Q fractionnaire. Faisons d'abord

$$Q = \frac{\psi(1)}{x-a} + \frac{\psi(2)}{(x-a)^2} + \frac{\psi(3)}{(x-a)^3} + \cdots + \frac{\psi(m-1)}{(x-a)^{m-1}},$$

d'où l'on déduit en différentiant

$$dQ = -\frac{\psi(1)\,dx}{(x-a)^2} - \frac{2\psi(2)\,dx}{(x-a)^3} - \frac{3\psi(3)\,dx}{(x-a)^4} - \cdots - \frac{(m-1)\psi(m-1)\,dx}{(x-a)^m}.$$

Pour rendre les calculs plus faciles, faisons

$$R = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 = \alpha' + \beta'(x-a) + \gamma'(x-a)^2 + \delta'(x-a)^3 + \varepsilon'(x-a)^4.$$

Pour déterminer α', β', γ', δ', ε', mettons $x+a$ au lieu de x, nous aurons

$$\alpha' + \beta' x + \gamma' x^2 + \delta' x^3 + \varepsilon' x^4 = \alpha + \beta(x+a) + \gamma(x+a)^2 + \delta(x+a)^3 + \varepsilon(x+a)^4.$$

On tire de là

$$\alpha' = \alpha + \beta a + \gamma a^2 + \delta a^3 + \varepsilon a^4,$$
$$\beta' = \beta + 2\gamma a + 3\delta a^2 + 4\varepsilon a^3,$$
$$\gamma' = \gamma + 3\delta a + 6\varepsilon a^2,$$
$$\delta' = \delta + 4\varepsilon a,$$
$$\varepsilon' = \varepsilon.$$

En différentiant R on aura

$$\frac{dR}{dx} = \beta' + 2\gamma'(x-a) + 3\delta'(x-a)^2 + 4\varepsilon'(x-a)^3.$$

Maintenant la différentielle de $Q\sqrt{R}$ donne

$$d(Q\sqrt{R}) = \frac{R\,dQ + \frac{1}{2} Q\,dR}{\sqrt{R}};$$

donc en substituant les valeurs de R, Q, dR et dQ on obtiendra:

$$d(Q\sqrt{R})=[\alpha'+\beta'(x-a)+\gamma'(x-a)^2+\delta'(x-a)^3+\varepsilon'(x-a)^4]\left(-\frac{\psi(1)}{(x-a)^2}-\frac{2\,\psi(2)}{(x-a)^3}-\cdots-\frac{(m-1)\,\psi(m-1)}{(x-a)^m}\right)\frac{dx}{\sqrt{R}}$$

$$+\tfrac{1}{2}[\beta'+2\gamma'(x-a)+3\delta'(x-a)^2+4\varepsilon'(x-a)^3]\left(\frac{\psi(1)}{x-a}+\frac{\psi(2)}{(x-a)^2}+\cdots+\frac{\psi(m-1)}{(x-a)^{m-1}}\right)\frac{dx}{\sqrt{R}}=S\frac{dx}{\sqrt{R}}.$$

Supposons

$$S=\varphi'(0)+\varphi'(1)(x-a)+\varphi'(2)(x-a)^2+\frac{\chi(1)}{x-a}+\frac{\chi(2)}{(x-a)^2}+\cdots+\frac{\chi(m)}{(x-a)^m}.$$

Cela posé, on obtiendra aisément

$$\begin{aligned}\varphi'(0)&=-\tfrac{1}{2}\delta'\psi(2)-\varepsilon'\psi(3),\\ \varphi'(1)&=\tfrac{1}{2}\delta'\psi(1),\\ \varphi'(2)&=\varepsilon'\psi(1),\end{aligned}$$

$$\text{(f)}\quad\left\{\begin{aligned}\chi(p)=&-\alpha'(p-1)\psi(p-1)-\beta'(p-\tfrac{1}{2})\psi(p)-\gamma'p\,\psi(p+1)\\ &-\delta'(p+\tfrac{1}{2})\psi(p+2)-\varepsilon'(p+1)\psi(p+3).\end{aligned}\right.$$

Faisons

$$\varphi'(0)+\varphi'(1)(x-a)+\varphi'(2)(x-a)^2=\varphi(0)+\varphi(1)x+\varphi(2)x^2,$$

nous aurons

$$\begin{aligned}&\varphi(0)=\varphi'(0)-a\varphi'(1)+a^2\varphi'(2)=-\varepsilon'\psi(3)-\tfrac{1}{2}\delta'\psi(2)-(\tfrac{1}{2}a\delta'-\varepsilon'a^2)\psi(1),\\ &\varphi(1)=\varphi'(1)-2a\varphi'(2)=(\tfrac{1}{2}\delta'-2a\varepsilon')\psi(1),\\ &\varphi(2)=\varphi'(2)=\varepsilon\psi(1),\end{aligned}$$

ou bien, en substituant les valeurs de δ' et ε',

$$\text{(g)}\quad\left\{\begin{aligned}&\varphi(0)=-(\tfrac{1}{2}a\delta+\varepsilon a^2)\psi(1)-\tfrac{1}{2}(\delta+4a\varepsilon)\psi(2)-\varepsilon\psi(3),\\ &\varphi(1)=\tfrac{1}{2}\delta\psi(1),\\ &\varphi(2)=\varepsilon\psi(1).\end{aligned}\right.$$

12. Si l'on multiplie la valeur de S par $\frac{dx}{\sqrt{R}}$, et qu'on prenne ensuite l'intégrale de chaque membre, on obtiendra en substituant la valeur de Q,

$$\text{(h)}\quad\left\{\begin{aligned}&\varphi(0)\int\frac{dx}{\sqrt{R}}+\varphi(1)\int\frac{x\,dx}{\sqrt{R}}+\varphi(2)\int\frac{x^2dx}{\sqrt{R}}\\ &+\chi(1)\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}+\chi(2)\int\frac{dx}{(x-a)^2\sqrt{R}}+\cdots+\chi(m)\int\frac{dx}{(x-a)^m\sqrt{R}}\\ &=\sqrt{R}\left(\frac{\psi(1)}{x-a}+\frac{\psi(2)}{(x-a)^2}+\frac{\psi(3)}{(x-a)^3}+\cdots+\frac{\psi(m-1)}{(x-a)^{m-1}}\right).\end{aligned}\right.$$

Il est clair que par cette équation on peut toujours réduire l'intégrale $\int \frac{dx}{(x-a)^m \sqrt{R}}$ si m est différent de 1; car elle suppose évidemment $m>1$. $\int \frac{dx}{(x-a)^m \sqrt{R}}$ peut donc être exprimée par les trois intégrales $\int \frac{dx}{\sqrt{R}}$, $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{R}}$, $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{R}}$ et par l'integrale $\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$; mais celle-ci est en général irréductible. Je dis en général, car on conçoit qu'on pourrait déterminer les quantités a, α, β, γ, δ, ε, de telle sorte qu'elle devînt réductible, ce qui a effectivement lieu, comme on le verra ci-après.

En faisant dans l'équation (h) $\chi(m)=-1$, $\chi(2)=\chi(3)=\chi(4)=\cdots=\chi(m-1)=0$, on obtiendra

$$(\text{i})\quad \left\{\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x-a)^m \sqrt{R}} &= \varphi(0)\int \frac{dx}{\sqrt{R}} + \varphi(1)\int \frac{x\,dx}{\sqrt{R}} + \varphi(2)\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{R}} + \chi(1)\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}} \\ &- \sqrt{R}\left(\frac{\psi(1)}{x-a} + \frac{\psi(2)}{(x-a)^2} + \frac{\psi(3)}{(x-a)^3} + \cdots + \frac{\psi(m-1)}{(x-a)^{m-1}}\right). \end{aligned}\right.$$

13. Pour déterminer les coefficiens, faisons dans l'équation (f) $p=1, 2, 3, \ldots m$, nous aurons les équations suivantes:

$$\begin{aligned} \chi(1) &= -\tfrac{1}{2}\beta'\psi(1) - \gamma'\psi(2) - \tfrac{3}{2}\delta'\psi(3) - 2\varepsilon'\psi(4), \\ 0 &= \alpha'\psi(1) + \tfrac{3}{2}\beta'\psi(2) + 2\gamma'\psi(3) + \tfrac{5}{2}\delta'\psi(4) + 3\varepsilon'\psi(5), \\ 0 &= 2\alpha'\psi(2) + \tfrac{5}{2}\beta'\psi(3) + 3\gamma'\psi(4) + \tfrac{7}{2}\delta'\psi(5) + 4\varepsilon'\psi(6), \\ 0 &= 3\alpha'\psi(3) + \tfrac{7}{2}\beta'\psi(4) + 4\gamma'\psi(5) + \tfrac{9}{2}\delta'\psi(6) + 5\varepsilon'\psi(7), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0 &= (m-3)\alpha'\psi(m-3) + (m-\tfrac{5}{2})\beta'\psi(m-2) + (m-2)\gamma'\psi(m-1), \\ 0 &= (m-2)\alpha'\psi(m-2) + (m-\tfrac{3}{2})\beta'\psi(m-1), \\ 1 &= (m-1)\alpha'\psi(m-1). \end{aligned}$$

En éliminant on trouvera

$$\psi(m-1) = \frac{1}{m-1}\cdot\frac{1}{\alpha'}$$

$$\psi(m-2) = -\frac{(m-\frac{3}{2})}{(m-1)(m-2)}\cdot\frac{\beta'}{\alpha'^2}$$

$$\psi(m-3) = \frac{(m-\frac{3}{2})(m-\frac{5}{2})}{(m-1)(m-2)(m-3)}\cdot\frac{\beta'^2}{\alpha'^3} - \frac{(m-2)}{(m-1)(m-3)}\cdot\frac{\gamma'}{\alpha'^2}.$$

Pour exprimer le coefficient général, faisons $R=fx$. On tire de là

$$\alpha' = fa,\quad \beta' = \frac{d\,fa}{da},\quad \gamma' = \frac{d^2 fa}{2\,.\,da^2},\quad \delta' = \frac{d^3 fa}{2\,.\,3\,.\,da^3},\quad \varepsilon' = \frac{d^4 fa}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,da^4}.$$

Cela posé, on aura en général

$$\text{(k)}\quad \left\{ \begin{aligned} &\psi(m-p) = \Sigma \frac{(-1)^n}{(fa)^{n+3}} \frac{\left(m-\frac{k+1}{2}\right)\left(m-\frac{k'+k}{2}\right)\cdots\left(m-\frac{k^{(n)}+k^{(n-1)}}{2}\right)\left(m-\frac{k^{(n)}+p}{2}\right)}{(m-1)(m-k)(m-k')\ldots(m-k^{(n)})(m-p)} \\ &\times \frac{d^{k-1} fa}{1\,.\,2\ldots(k-1)\,da^{k-1}} \cdot \frac{d^{k'-k} fa}{1\,.\,2\ldots(k'-k)\,da^{k'-k}} \cdots \frac{d^{p-k^{(n)}} fa}{1\,.\,2\ldots(p-k^{(n)})\,da^{p-k^{(n)}}}, \end{aligned} \right.$$

le signe Σ ayant la même signification que dans l'équation (d).

Ayant ainsi trouvé $\psi(m-p)$, on aura $\varphi(0)$, $\varphi(1)$, $\varphi(2)$ par les équations (g), et $\chi(1)$ par l'équation

$$\text{(l)}\qquad \chi(1) = -\tfrac{1}{2} f'a\,\psi(1) - \frac{f''a}{1\,.\,2}\psi(2) - \tfrac{3}{2}\frac{f'''a}{1\,.\,2\,.\,3}\psi(3) - 2\frac{f''''a}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\psi(4).$$

14. Prenons comme exemple $\int \frac{dx}{(x-a)^2\sqrt{R}}$. On a $m=2$, donc

$$\int \frac{dx}{(x-a)^2\sqrt{R}} = \varphi(0)\int\frac{dx}{\sqrt{R}} + \varphi(1)\int\frac{x\,dx}{\sqrt{R}} + \varphi(2)\int\frac{x^2 dx}{\sqrt{R}} + \chi(1)\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}} - \sqrt{R}\,\frac{\psi(1)}{x-a},$$

$$\psi(1) = \frac{1}{fa} = \frac{1}{\alpha+\beta a+\gamma a^2+\delta a^3+\varepsilon a^4},$$

$$\chi(1) = -\tfrac{1}{2} f'a\,.\,\psi(1) = -\tfrac{1}{2}\frac{f'a}{fa} = -\tfrac{1}{2}\frac{\beta+2\gamma a+3\delta a^2+4\varepsilon a^3}{\alpha+\beta a+\gamma a^2+\delta a^3+\varepsilon a^4},$$

$$\varphi(0) = -\left(\tfrac{1}{2}a\delta+\varepsilon a^2\right)\frac{1}{fa},$$

$$\varphi(1) = \tfrac{1}{2}\delta\,\frac{1}{fa},$$

$$\varphi(2) = \frac{\varepsilon}{fa}.$$

En substituant ces valeurs, on obtiendra

$$\int\frac{dx}{(x-a)^2\sqrt{fx}} = -\frac{(\varepsilon a^2+\frac{1}{2}\delta a)}{fa}\int\frac{dx}{\sqrt{fx}} + \frac{\delta}{2fa}\int\frac{x\,dx}{\sqrt{fx}} + \frac{\varepsilon}{fa}\int\frac{x^2 dx}{\sqrt{fx}} - \tfrac{1}{2}\frac{f'a}{fa}\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{fx}} - \frac{\sqrt{fx}}{(x-a)\,fa}.$$

Si $a=0$ on a

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{R}} = \frac{\delta}{2\alpha}\int\frac{x\,dx}{\sqrt{R}} + \frac{\varepsilon}{\alpha}\int\frac{x^2 dx}{\sqrt{R}} - \tfrac{1}{2}\frac{\beta}{\alpha}\int\frac{dx}{x\sqrt{R}} - \frac{\sqrt{R}}{\alpha x}.$$

15. Par la forme qu'on a trouvée pour les quantités $\psi(1)$, $\psi(2)$ etc., il est évident que l'équation (i) peut toujours être employée si $\alpha' \gtrless 0$; mais dans ce cas elle devient illusoire à cause des coefficiens infinis. Il faut donc considérer ce cas séparément. Or α' étant égal à zéro, on a $\chi(m) = 0$, donc l'équation (h) prend la forme suivante:

$$\varphi(0)\int\frac{dx}{\sqrt{R}} + \varphi(1)\int\frac{x\,dx}{\sqrt{R}} + \varphi(2)\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{R}}$$
$$+ \chi(1)\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}} + \chi(2)\int\frac{dx}{(x-a)^2\sqrt{R}} + \cdots + \chi(m)\int\frac{dx}{(x-a)^m\sqrt{R}}$$
$$= \sqrt{R}\left(\frac{\psi(1)}{x-a} + \frac{\psi(2)}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{\psi(m)}{(x-a)^m}\right),$$

où l'on a mis $m+1$ à la place de m. Dans cette équation on peut faire $m = 1$. Donc il est dans ce cas toujours possible d'exprimer l'intégrale $\int\frac{dx}{(x-a)^m\sqrt{R}}$ par les trois intégrales

$$\int\frac{dx}{\sqrt{R}}, \quad \int\frac{x\,dx}{\sqrt{R}}, \quad \int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{R}}.$$

Pour achever la réduction, faisons $\chi(m) = -1$, $\chi(1) = \chi(2) = \cdots = 0$. Par là on obtiendra

$$(\text{l}')\quad \begin{cases} \displaystyle\int\frac{dx}{(x-a)^m\sqrt{R}} = \varphi(0)\int\frac{dx}{\sqrt{R}} + \varphi(1)\int\frac{x\,dx}{\sqrt{R}} + \varphi(2)\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{R}} \\ \displaystyle\qquad - \sqrt{R}\left(\frac{\psi(1)}{x-a} + \frac{\psi(2)}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{\psi(m)}{(x-a)^m}\right). \end{cases}$$

En faisant maintenant dans l'équation (f) $p = 1, 2, 3 \ldots m$, on obtiendra les équations suivantes:

$$0 = \tfrac{1}{2}\beta'\psi(1) + \gamma'\psi(2) + \tfrac{3}{2}\delta'\psi(3) + 2\varepsilon'\psi(4),$$
$$0 = \tfrac{3}{2}\beta'\psi(2) + 2\gamma'\psi(3) + \tfrac{5}{2}\delta'\psi(4) + 3\varepsilon'\psi(5),$$
$$0 = \tfrac{5}{2}\beta'\psi(3) + 3\gamma'\psi(4) + \tfrac{7}{2}\delta'\psi(5) + 4\varepsilon'\psi(6),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$0 = (m-\tfrac{7}{2})\beta'\psi(m-3) + (m-3)\gamma'\psi(m-2) + (m-\tfrac{5}{2})\delta'\psi(m-1) + (m-2)\varepsilon'\psi(m),$$
$$0 = (m-\tfrac{5}{2})\beta'\psi(m-2) + (m-2)\gamma'\psi(m-1) + (m-\tfrac{3}{2})\delta'\psi(m),$$
$$0 = (m-\tfrac{3}{2})\beta'\psi(m-1) + (m-1)\gamma'\psi(m),$$
$$1 = (m-\tfrac{1}{2})\beta'\psi(m).$$

De ces équations on tirera en éliminant:

$$\psi(m) = \frac{1}{(m-\frac{1}{2})\beta'},$$

$$\psi(m-1) = -\frac{(m-1)}{(m-\frac{1}{2})(m-\frac{3}{2})}\cdot\frac{\gamma'}{\beta'^2},$$

$$\psi(m-2) = \frac{(m-1)(m-2)}{(m-\frac{1}{2})(m-\frac{3}{2})(m-\frac{5}{2})}\cdot\frac{\gamma'^2}{\beta'^3} - \frac{(m-\frac{3}{2})}{(m-\frac{1}{2})(m-\frac{5}{2})}\cdot\frac{\delta'}{\beta'^2},$$

etc.

Le coefficient général peut s'exprimer de la manière suivante:

$$(\mathrm{m})\quad \begin{cases} \psi(m-p) = \Sigma\dfrac{(-1)^n}{(f'a)^{n+3}}\cdot\dfrac{\left(m-\frac{k}{2}\right)\left(m-\frac{k'+k-1}{2}\right)\cdots\left(m-\frac{k^{(n)}+k^{(n-1)}-1}{2}\right)\left(m-\frac{k^{(n)}+p}{2}\right)}{(m-\frac{1}{2})(m+\frac{1}{2}-k)(m+\frac{1}{2}-k')\cdots(m+\frac{1}{2}-k^{(n)})(m-p-\frac{1}{2})} \\ \times\dfrac{d^k fa}{1.2\ldots k.da^k}\cdot\dfrac{d^{k'-k+1}fa}{1.2\ldots(k'-k+1)\,da^{k'-k+1}}\cdots\dfrac{d^{p-k^{(n)}+1}fa}{1.2\ldots(p-k^{(n)}+1)\,da^{p-k^{(n)}+1}}. \end{cases}$$

16. L'équation (l') a lieu si $\alpha'=0$, c'est-à-dire si $\alpha+\beta a+\gamma a^2+\delta a^3+\varepsilon a^4=0$. Il suit de là que $x-a$ est facteur de R. Donc:

"Toutes les fois que $x-a$ est facteur de R, on peut exprimer l'intégrale $\int\frac{dx}{(x-a)^m\sqrt{R}}$ par les trois intégrales $\int\frac{dx}{\sqrt{R}}$, $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{R}}$, $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{R}}$. Dans tout autre cas cela est impossible, car l'équation (h) suppose $m>1$."

Proposons-nous de réduire l'intégrale $\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$, $x-a$ étant facteur de R. Comme $m=1$, on a

$$\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}} = \varphi(0)\int\frac{dx}{\sqrt{R}} + \varphi(1)\int\frac{x\,dx}{\sqrt{R}} + \varphi(2)\int\frac{x^2dx}{\sqrt{R}} - \sqrt{R}\,\frac{\psi(1)}{x-a}.$$

L'équation (m) donne $\psi(1)=\frac{1}{\frac{1}{2}f'a}=\frac{2}{f'a}$, et les équations (g) donnent

$$\varphi(0) = -(\varepsilon a^2+\tfrac{1}{2}\delta a)\,\psi(1) = -\frac{(2\varepsilon a^2+\delta a)}{f'a},$$

$$\varphi(1) = \tfrac{1}{2}\,\delta\,\psi(1) = \frac{\delta}{f'a},$$

$$\varphi(2) = \varepsilon\,\psi(1) = \frac{2\varepsilon}{f'a}.$$

En substituant ces valeurs on obtiendra

$$\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}} = -\frac{(2\varepsilon a^2+a\delta)}{f'a}\int\frac{dx}{\sqrt{R}} + \frac{\delta}{f'a}\int\frac{x\,dx}{\sqrt{R}} + \frac{2\varepsilon}{f'a}\int\frac{x^2dx}{\sqrt{R}} - \frac{2}{f'a}\,\frac{\sqrt{R}}{x-a}.$$

Soit

$$R=(x-a)(x-a')(x-a'')(x-a''')=fx,$$

on aura

$$\delta=-(a+a'+a''+a'''),\ \varepsilon=1,\ f'x=(x-a')(x-a'')(x-a''')+\cdots$$
$$f'a=(a-a')(a-a'')(a-a''').$$

En faisant ces substitutions, on aura

$$\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}=-\frac{a^2-a(a'+a''+a''')}{(a-a')(a-a'')(a-a''')}\int\frac{dx}{\sqrt{R}}-\frac{a+a'+a''+a'''}{(a-a')(a-a'')(a-a''')}\int\frac{x\,dx}{\sqrt{R}}$$
$$+\frac{2}{(a-a')(a-a'')(a-a''')}\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{R}}-\frac{2}{(a-a')(a-a'')(a-a''')}\frac{\sqrt{R}}{x-a}.$$

17. Cherchons maintenant à trouver une relation entre des intégrales de la forme $\int\frac{dx}{(x-b)\sqrt{R}}$. Pour cela faisons

$$\varphi(0)\int\frac{dx}{(x-b)\sqrt{R}}+\varphi(1)\int\frac{dx}{(x-b')\sqrt{R}}+\varphi(2)\int\frac{dx}{(x-b'')\sqrt{R}}+\cdots=Q\sqrt{R}.$$

En différentiant, on voit aisément que la forme la plus générale qu'on puisse donner à Q est la suivante

$$Q=\frac{A}{x-a}+\frac{A'}{x-a'}+\frac{A''}{x-a''}+\frac{A'''}{x-a'''},$$

$x-a$, $x-a'$, $x-a''$, $x-a'''$ étant les quatre facteurs de R. On a donc

$$\varphi(0)\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}+\varphi(1)\int\frac{dx}{(x-a')\sqrt{R}}+\varphi(2)\int\frac{dx}{(x-a'')\sqrt{R}}+\varphi(3)\int\frac{dx}{(x-a''')\sqrt{R}}$$
$$=\sqrt{R}\left(\frac{A}{x-a}+\frac{A'}{x-a'}+\frac{A''}{x-a''}+\frac{A'''}{x-a'''}\right),$$

ou bien, en substituant les valeurs de $\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$ etc. trouvées plus haut,

$$-\left(\varphi(0)\frac{2\varepsilon a^2+a\delta}{f'a}+\varphi(1)\frac{2\varepsilon a'^2+a'\delta}{f'a'}+\varphi(2)\frac{2\varepsilon a''^2+a''\delta}{f'a''}+\varphi(3)\frac{2\varepsilon a'''^2+a'''\delta}{f'a'''}\right)\int\frac{dx}{\sqrt{R}}$$
$$+\left(\frac{\delta\varphi(0)}{f'a}+\frac{\delta\varphi(1)}{f'a'}+\frac{\delta\varphi(2)}{f'a''}+\frac{\delta\varphi(3)}{f'a'''}\right)\int\frac{x\,dx}{\sqrt{R}}$$
$$+\left(\frac{2\varepsilon\varphi(0)}{f'a}+\frac{2\varepsilon\varphi(1)}{f'a'}+\frac{2\varepsilon\varphi(2)}{f'a''}+\frac{2\varepsilon\varphi(3)}{f'a'''}\right)\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{R}}$$
$$=\sqrt{R}\left\{\frac{A+\frac{2\varphi(0)}{f'a}}{x-a}+\frac{A'+\frac{2\varphi(1)}{f'a'}}{x-a'}+\frac{A''+\frac{2\varphi(2)}{f'a''}}{x-a''}+\frac{A'''+\frac{2\varphi(3)}{f'a'''}}{x-a'''}\right\}.$$

On a donc

$$A = -\frac{2\varphi(0)}{f'a},\ A' = -\frac{2\varphi(1)}{f'a'},\ A'' = -\frac{2\varphi(2)}{f'a''},\ A''' = -\frac{2\varphi(3)}{f'a'''},$$

$$A(2\varepsilon a^2 + a\delta) + A'(2\varepsilon a'^2 + a'\delta) + A''(2\varepsilon a''^2 + a''\delta) + A'''(2\varepsilon a'''^2 + a'''\delta) = 0,$$

$$A + A' + A'' + A''' = 0.$$

On voit par là qu'on peut faire l'une quelconque des quantités A, A' etc. égale à zéro. Soit par exemple $A''' = 0$, on aura

$$A'' = -A - A',$$

$$A[2\varepsilon(a^2 - a''^2) + \delta(a - a'')] + A'[2\varepsilon(a'^2 - a''^2) + \delta(a' - a'')] = 0;$$

donc

$$A' = -\frac{2\varepsilon(a^2 - a''^2) + \delta(a - a'')}{2\varepsilon(a'^2 - a''^2) + \delta(a' - a'')} A = 2\varepsilon(a^2 - a''^2) + \delta(a - a'') = (a - a'')(a + a'' - a' - a'''),$$

en faisant

$$A = 2\varepsilon(a''^2 - a'^2) + \delta(a'' - a') = (a'' - a')(a'' + a' - a - a'''),$$

et par suite

$$A'' = 2\varepsilon(a'^2 - a^2) + \delta(a' - a) = (a' - a)(a' + a - a'' - a''').$$

On en déduit

$$\varphi(0) = \tfrac{1}{2}(a - a')(a - a'')(a - a''')(a' - a'')(a' + a'' - a - a'''),$$

$$\varphi(1) = \tfrac{1}{2}(a' - a)(a' - a'')(a' - a''')(a'' - a)(a + a'' - a' - a'''),$$

$$\varphi(2) = \tfrac{1}{2}(a'' - a)(a'' - a')(a'' - a''')(a - a')(a + a' - a'' - a'''),$$

$$\text{(n)}\quad \varphi(0)\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}} + \varphi(1)\int\frac{dx}{(x-a')\sqrt{R}} + \varphi(2)\int\frac{dx}{(x-a'')\sqrt{R}} = \sqrt{R}\left(\frac{A}{x-a} + \frac{A'}{x-a'} + \frac{A''}{x-a''}\right).$$

Cette équation contient, comme on le voit, une relation entre trois quelconques des quatre intégrales

$$\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}},\ \int\frac{dx}{(x-a')\sqrt{R}},\ \int\frac{dx}{(x-a'')\sqrt{R}},\ \int\frac{dx}{(x-a''')\sqrt{R}}.$$

d'où il suit qu'on peut en déterminer deux par les deux autres.

18. Proposons-nous maintenant de trouver les relations qui doivent exister entre les quantités $\varphi(0)$, $\varphi(1)$, $\varphi(2)$ pour que l'expression

$$\varphi(0)\int\frac{dx}{\sqrt{R}} + \varphi(1)\int\frac{x\,dx}{\sqrt{R}} + \varphi(1)\int\frac{x^2dx}{\sqrt{R}}$$

soit réductible à des intégrales de la forme $\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$.

On voit aisément par ce qui précède que $x-a$ doit être facteur de R. On peut donc à cause de l'équation (n) faire:

$$\varphi(0)\int\frac{dx}{\sqrt{R}}+\varphi(1)\int\frac{x\,dx}{\sqrt{R}}+\varphi(2)\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{R}}$$
$$=A\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}+A'\int\frac{dx}{(x-a')\sqrt{R}}+\sqrt{R}\left(\frac{B}{x-a}+\frac{B'}{x-a'}\right).$$

En substituant les valeurs de $\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$ et $\int\frac{dx}{(x-a')\sqrt{R}}$ données par l'équation du n° 16, on obtiendra:

$$\left(\varphi(0)+A\frac{2\varepsilon a^2+a\delta}{f'a}+A'\frac{2\varepsilon a'^2+a'\delta}{f'a'}\right)\int\frac{dx}{\sqrt{R}}+\left(\varphi(1)-A\frac{\delta}{f'a}-A'\frac{\delta}{f'a'}\right)\int\frac{x\,dx}{\sqrt{R}}$$
$$+\left(\varphi(2)-A\frac{2\varepsilon}{f'a}-A'\frac{2\varepsilon}{f'a'}\right)\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{R}}-\sqrt{R}\left\{\frac{B+\frac{2A}{f'a}}{x-a}+\frac{B'+\frac{2A'}{f'a'}}{x-a'}\right\}=0.$$

On a donc

$$A=-\tfrac{1}{2}B.f'a,\quad A'=-\tfrac{1}{2}B'.f'a',$$
$$\varphi(0)-\tfrac{1}{2}B(2\varepsilon a^2+a\delta)-\tfrac{1}{2}B'(2\varepsilon a'^2+a'\delta)=0,$$
$$\varphi(1)+\tfrac{1}{2}\delta(B+B')=0,$$
$$\varphi(2)+\varepsilon(B+B')=0.$$

En éliminant $B+B'$ entre les deux dernières équations, on aura

$$2\varepsilon\,\varphi(1)-\delta\,\varphi(2)=0,\quad \text{d'où}\quad \varphi(2)=\frac{2\varepsilon}{\delta}\varphi(1).$$

Voilà donc la relation qui doit avoir lieu entre $\varphi(2)$ et $\varphi(1)$. En faisant $\varphi(1)=0$ et $\varphi(0)=1$, on aura

$$\varphi(2)=0,\quad B'=-B,\quad 1=\tfrac{1}{2}B[2\varepsilon(a^2-a'^2)+\delta(a-a')],$$
$$B=\frac{2}{(a-a')(a+a'-a''-a''')}=-B',$$

donc en substituant,

$$\int\frac{dx}{\sqrt{R}}=\frac{(a-a'')(a-a''')}{(a''+a'''-a-a')}\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}+\frac{(a'-a'')(a'-a''')}{(a''+a'''-a-a')}\int\frac{dx}{(x-a')\sqrt{R}}$$
$$+\frac{2\sqrt{R}}{(a+a'-a''-a''')(x-a)(x-a')}.$$

Si l'on fait $\varphi(0)=0$ et $\varphi(2)=1$, on aura

$$\varphi(1)=\frac{\delta}{2\varepsilon},\quad B'=-B-\frac{1}{\varepsilon}.$$

$$B[2\varepsilon(a^2-a'^2)+\delta(a-a')]-\left(2a'^2+a'\frac{\delta}{\varepsilon}\right)=0,$$

d'où l'on tire

$$B=\frac{a'(a'-a-a''-a''')}{(a+a'-a''-a''')(a-a')}.$$

$$B'=\frac{a(a-a'-a''-a''')}{(a+a'-a''-a''')(a'-a)}.$$

En substituant ces valeurs, on obtiendra

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{R}}+\frac{\delta}{2}\int\frac{xdx}{\sqrt{R}}=\frac{a'(a'-a-a''-a''').f'a}{2(a'-a)(a+a'-a''-a''')}\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$$

$$+\frac{a(a-a'-a''-a''').f'a'}{2(a-a')(a+a'-a''-a''')}\int\frac{dx}{(x-a')\sqrt{R}}$$

$$+\frac{\sqrt{R}}{(a-a')(a+a'-a''-a''')}\left(\frac{a'(a'-a-a''-a''')}{x-a}-\frac{a(a-a'-a''-a''')}{x-a'}\right).$$

19. Par ce qui précède on voit qu'on peut exprimer $\int\frac{dx}{\sqrt{R}}$ par les intégrales $\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$ et $\int\frac{dx}{(x-a')\sqrt{R}}$; mais cela n'a pas lieu pour les intégrales $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{R}}$ et $\int\frac{xdx}{\sqrt{R}}$. C'est seulement l'expression $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{R}}+\frac{\delta}{2}\int\frac{xdx}{\sqrt{R}}$ qu'on peut exprimer de cette manière. Dans le cas où $a+a'=a''+a'''$, les deux équations du numéro précédent deviennent illusoires. Dans ce même cas on peut trouver une relation entre deux des intégrales $\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$ etc. En effet, en multipliant une des équations du numéro précédent par $a+a'-a''-a'''$, on obtiendra

$$(a-a'')(a-a''')\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}+(a'-a'')(a'-a''')\int\frac{dx}{(x-a')\sqrt{R}}=-\frac{2\sqrt{R}}{(x-a)(x-a')};$$

ou bien, puisque $a-a'''=a''-a'$ et $a'-a'''=a''-a$,

$$\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}+\int\frac{dx}{(x-a')\sqrt{R}}=\frac{2\sqrt{R}}{(a''-a)(a''-a')(x-a)(x-a')}.$$

$$R=(x-a)(x-a')(x-a'')(x-a-a'+a'').$$

20. Nous avons maintenant épuisé le sujet de ce chapitre, savoir de réduire l'intégrale $\int\frac{Pdx}{\sqrt{R}}$ autant que possible par des fonctions algébriques, et nous avons donné des équations par lesquelles on peut, avec toute la

facilité possible, réduire une intégrale proposée quelconque de la forme précédente.

Reprenons les résultats généraux:

1. Lorsque P est une fonction entière de x, $\int \frac{P dx}{\sqrt{R}}$ est toujours réductible aux intégrales $\int \frac{dx}{\sqrt{R}}$, $\int \frac{x dx}{\sqrt{R}}$, $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{R}}$.

2. Lorsque P est une fonction fractionnaire de x, l'intégrale $\int \frac{P dx}{\sqrt{R}}$ est réductible aux intégrales $\int \frac{dx}{\sqrt{R}}$, $\int \frac{x dx}{\sqrt{R}}$, $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{R}}$ et à des intégrales de la forme $\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$.

3. Lorsque $x - a$ est un facteur de R, l'intégrale $\int \frac{dx}{(x-a)^m \sqrt{R}}$ est réductible aux intégrales $\int \frac{dx}{\sqrt{R}}$, $\int \frac{x dx}{\sqrt{R}}$, $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{R}}$, mais dans tout autre cas cela est impossible.

4. Il est impossible de trouver une relation entre plusieurs intégrales de la forme $\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$, à moins que $x - a$ ne soit facteur de R, mais alors on peut trouver une relation entre trois intégrales de cette forme; si de plus $a + a' = a'' + a'''$, on peut trouver une relation entre deux d'entre elles.

5. L'intégrale $\int \frac{dx}{\sqrt{R}}$ peut s'exprimer par deux intégrales de la forme $\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$, $x - a$ étant facteur de R, si $a + a'$ diffère de $a'' + a'''$. Les intégrales $\int \frac{x dx}{\sqrt{R}}$ et $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{R}}$ au contraire ne peuvent pas être exprimées de cette manière.

CHAPITRE II.

Réduction de l'intégrale $\int \frac{P dx}{\sqrt{R}}$ par des fonctions logarithmiques.

21. Dans le chapitre précédent nous avons réduit l'intégrale $\int \frac{P dx}{\sqrt{R}}$ par des fonctions algébriques, et nous avons trouvé que son intégration exige les



quatre fonctions suivantes $\int\frac{dx}{\sqrt{R}}$, $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{R}}$, $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{R}}$ et $\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$, qui en général sont irréductibles par des fonctions algébriques. Dans ce chapitre nous chercherons les relations qu'on peut obtenir entre ces quatre intégrales par des fonctions logarithmiques. Pour cela il faut trouver la fonction logarithmique la plus générale dont la différentielle soit décomposable en termes de la forme

$$\frac{Ax^n dx}{\sqrt{R}},\quad \frac{A\,dx}{(x-a)^m\sqrt{R}};$$

car en intégrant la différentielle ainsi décomposée et faisant usage des réductions du chapitre précédent, on obtiendra la relation la plus générale qu'on puisse trouver par des fonctions logarithmiques entre les quatre intégrales proposées.

22. On peut se convaincre aisément que la fonction logarithmique cherchée doit avoir la forme suivante:

$$T' = A\log(P+Q\sqrt{R}) + A'\log(P'+Q'\sqrt{R})$$
$$+ A''\log(P''+Q''\sqrt{R}) + \cdots + A^{(n)}\log(P^{(n)}+Q^{(n)}\sqrt{R}),$$

P, Q, P', Q' etc. étant des fonctions entières de x, et A, A' etc. des coefficiens constants.

Considérons un terme quelconque $T = A\log(P+Q\sqrt{R})$. En différentiant on aura

$$dT = A\,\frac{dP + dQ.\sqrt{R} + \frac{1}{2}\frac{QdR}{\sqrt{R}}}{P+Q\sqrt{R}},$$

ou bien, en multipliant en haut et en bas par $P - Q\sqrt{R}$,

$$dT = A\,\frac{PdP - Q(RdQ + \frac{1}{2}QdR)}{P^2 - Q^2R} + A\,\frac{\frac{1}{2}PQdR + (PdQ - QdP)R}{(P^2-Q^2R)\sqrt{R}},$$

d'où l'on tire

$$T = \frac{A}{2}\log(P^2 - Q^2R) + A\int\frac{\frac{1}{2}PQdR + (PdQ - QdP)R}{(P^2-Q^2R)\sqrt{R}}.$$

Il est aisé de voir qu'on peut faire abstraction du premier terme de dT qui est rationnel, et qui donne, dans la valeur de T, le terme $\frac{A}{2}\log(P^2 - Q^2R)$; en retranchant donc ce terme de T, il restera

$$A\log(P+Q\sqrt{R}) - \frac{A}{2}\log(P^2 - Q^2R) = \frac{A}{2}\log\frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}}.$$

On peut donc faire

$$T' = A \log \frac{P + Q\sqrt{R}}{P - Q\sqrt{R}} + A' \log \frac{P' + Q'\sqrt{R}}{P' - Q'\sqrt{R}} + \cdots.$$

La différentielle de cette expression ne contient aucune partie rationnelle; on aura en différentiant

$$dT' = A \frac{PQdR + 2(PdQ - QdP)R}{(P^2 - Q^2R)\sqrt{R}} + A' \frac{P'Q'dR + 2(P'dQ' - Q'dP')R}{(P'^2 - Q'^2R)\sqrt{R}} + \cdots$$
$$= S' \frac{dx}{\sqrt{R}}.$$

Pour trouver S', considérons le terme

$$A \frac{PQ\,dR + 2(PdQ - QdP)R}{(P^2 - Q^2R)\sqrt{R}} = \frac{M}{N} \cdot \frac{dx}{\sqrt{R}}.$$

De là on tire

$$\frac{M}{N} = A \frac{PQ\frac{dR}{dx} + 2\left(P\frac{dQ}{dx} - Q\frac{dP}{dx}\right)R}{P^2 - Q^2R}.$$

En différentiant $N = P^2 - Q^2R$ on aura

$$dN = 2PdP - 2Q\,dQ\,.\,R - Q^2\,dR,$$

d'où

$$PdN = 2P^2dP - 2PQ\,dQ\,.\,R - Q^2PdR,$$

et en substituant pour P^2 sa valeur $N + Q^2R$,

$$PdN = 2NdP + 2Q^2RdP - 2PQRdQ - Q^2PdR;$$

c'est-à-dire

$$\frac{2N\frac{dP}{dx} - P\frac{dN}{dx}}{Q} = \frac{PQdR + 2(PdQ - QdP)R}{dx};$$

donc

$$M = A \frac{2N\frac{dP}{dx} - P\frac{dN}{dx}}{Q}, \quad N = P^2 - Q^2R.$$

23. Par la valeur qu'on vient de trouver pour M, on voit que si $(x-a)^m$ est un diviseur de N, $(x-a)^{m-1}$ doit être diviseur de M; donc $\frac{M}{N}$ ne peut contenir aucun terme de la forme $\frac{B}{(x-a)^m}$, m étant plus grand que l'unité. Les termes fractionnaires contenus dans la fonction $\frac{M}{N}$ sont donc tous de la forme $\frac{B}{x-a}$. Si de plus $x-a$ était facteur de R, il le serait aussi de P, donc dans ce cas M et N auraient $x-a$ pour facteur commun. Donc

$\frac{M}{N}$ ne peut contenir aucun terme de la forme $\frac{B}{x-a}$, $x-a$ étant facteur de R.

Pour trouver la forme de la partie entière de $\frac{M}{N}$, supposons que P soit un polynome du degré m, et Q du degré n.

Il faut distinguer trois cas:

1) si $m > n+2$, 2) si $m < n+2$, 3) si $m = n+2$.

1) Si $m > n+2$, N est du degré $2m$, et M du degré $m+n+3$, donc $\frac{M}{N}$ est tout au plus du degré 0, donc la seule partie entière qui puisse y être contenue, est une quantité constante.

2) Si $m < n+2$, N est du degré $2n+4$, et M du degré $n+m+3$, donc $\frac{M}{N}$ est tout au plus du degré 0, et par conséquent sa partie entière est une constante.

3) Si $m = n+2$, N peut être d'un degré quelconque moindre que $2m$. Soit donc N du degré μ, on voit que M est du degré $\mu + m - 1 - n = \mu + 1$, si μ n'est pas égal à $2n+4$; car alors M est du degré μ et $\frac{M}{N}$ du degré 0. Donc dans ce cas $\frac{M}{N}$ est tout au plus du degré 1, et sa partie entière est de la forme $Bx + B'$.

De ce qui précède il suit que $\frac{M}{N}$ est toujours de la forme

$$\frac{M}{N} = Bx + B' + \frac{C}{x-a} + \frac{C'}{x-a'} + \frac{C''}{x-a''} + \cdots,$$

$x-a$, $x-a'$, $x-a''$, ... n'étant point des facteurs de R.

De là il suit que l'intégrale $\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{R}}$ est irréductible dans tous les cas; elle constitue donc une fonction transcendante particulière.

D'après la valeur de $\frac{M}{N}$ il est aisé de conclure que $\frac{dT'}{dx}$ a la forme

$$\frac{dT'}{dx} = \left(k + k'x + \frac{L}{x-a} + \frac{L'}{x-a'} + \frac{L''}{x-a''} + \cdots + \frac{L^{(\nu)}}{x-a^{(\nu)}}\right)\frac{dx}{\sqrt{R}},$$

d'où

$$T' = k\int\frac{dx}{\sqrt{R}} + k'\int\frac{x\,dx}{\sqrt{R}} + L\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}} + \cdots + L^{(\nu)}\int\frac{dx}{(x-a^{(\nu)})\sqrt{R}}.$$

Voilà donc la relation la plus générale qu'on puisse trouver entre les intégrales proposées.

24. Pour appliquer l'équation précédente, je vais résoudre les cinq problèmes suivants:

1. Exprimer les deux intégrales $\int \frac{dx}{\sqrt{R}}$ et $\int \frac{(x+c)\,dx}{\sqrt{R}}$ par le plus petit nombre possible d'intégrales de la forme $\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$.

2. Réduire l'intégrale $\int \frac{P\,dx}{\sqrt{R}}$ au plus petit nombre possible d'intégrales de la forme $\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$, P étant une fonction fractionnaire de x, et l'intégrale décomposable en termes de la forme $\int \frac{dx}{(x-c)\sqrt{R}}$.

3. Quel est le nombre le plus petit d'intégrales elliptiques entre lesquelles on peut trouver une relation.

4. Trouver toutes les intégrales de la forme $\int \frac{(k+k'x)\,dx}{\sqrt{R}}$ qui sont intégrables par des logarithmes.

5. Trouver toutes les intégrales de la forme $\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$ qui peuvent s'exprimer par les intégrales $\int \frac{dx}{\sqrt{R}}$ et $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{R}}$ au moyen des logarithmes.

Problème I.

Exprimer l'intégrale $\int \frac{(k+k'x)\,dx}{\sqrt{R}}$ *par le plus petit nombre possible d'intégrales de la forme*

$$\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}.$$

25. Soient $P, Q, P', Q', P'', Q'', \ldots P^{(r)}, Q^{(r)}$, respectivement des degrés $m, n, m', n', m'', n'', \ldots m^{(r)}, n^{(r)}$, ces quantités contiennent $m+n+m'+n' +\cdots+m^{(r)}+n^{(r)}+r+1$ coefficiens indéterminés. De plus les coefficiens $A, A', \ldots A^{(r)}$ sont au nombre de $r+1$. On a donc en tout $m+n+m'+n'+\cdots+m^{(r)}+n^{(r)}+2r+2=\alpha'$ coefficiens indéterminés.



Supposons qu'on ait

$$m = n + 2,\ m' = n' + 2, \dots m^{(p-1)} = n^{(p-1)} + 2,$$

$$m^{(p)} > n^{(p)} + 2,\ m^{(p+1)} > n^{(p+1)} + 2, \dots m^{(p+p'-1)} > n^{(p+p'-1)} + 2,$$

$$m^{(p+p')} < n^{(p+p')} + 2, \dots m^{(r)} < n^{(r)} + 2.$$

Il suit de là que

N est du degré $2m$,
N' . . . . $2m'$,
N'' . . . . $2m''$,
. . . .
$N^{(p-1)}$ . . . . . . $2m^{(p-1)}$,
$N^{(p)}$ . . . . $2m^{(p)}$,
. . . .
$N^{(p+p'-1)}$ est du degré $2m^{(p+p'-1)}$,
$N^{(p+p')}$ . . . . $2n^{(p+p')} + 4$,
$N^{(p+p'+1)}$ . . . . $2n^{(p+p'+1)} + 4$,
. . . .
$N^{(r)}$ . . . . $2n^{(r)} + 4$.

Par là on voit que

$$A\frac{M}{N} + A'\frac{M'}{N'} + A''\frac{M''}{N''} + \dots + A^{(r)}\frac{M^{(r)}}{N^{(r)}}$$

$$= k + k'x + \frac{C + C_1 x + C_2 x^2 + \dots + C_{\nu'} x^{\nu'}}{D + D_1 x + D_2 x^2 + \dots + D_\nu x^\nu} = S,$$

où

$$\nu = 2m + 2m' + 2m'' + \dots + 2m^{(p+p'-1)} + 2n^{(p+p')} + 2n^{(p+p'+1)} + \dots + 2n^{(r)}$$
$$+ 4(r - p - p' + 1), \quad \text{et} \quad \nu' < \nu.$$

Puisqu'on a α' coefficiens indéterminés, on peut faire en sorte que S devienne de la forme:

$$S = k + k'x + \frac{C + C_1 x + \dots + C_{\nu-\alpha'+1} \cdot x^{\nu-\alpha'+1}}{D + D_1 x + \dots + D_{\nu-\alpha'+2} \cdot x^{\nu-\alpha'+2}},$$

k et k' étant quelconques.

On peut donc exprimer $\int \frac{(k + k'x)\,dx}{\sqrt{R}}$ par $\nu - \alpha' + 2$ intégrales de la

forme $\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$. Il faut maintenant déterminer m, n, m', n' etc. et r de manière que la quantité $\nu - \alpha' + 2$ devienne aussi petite que possible.

On a

$$\alpha' = 2m + 2m' + 2m'' + \cdots + 2m^{(p-1)} - 2p$$
$$+ m^{(p)} + n^{(p)} + m^{(p+1)} + n^{(p+1)} + \cdots + n^{(r)} + 2r + 2.$$

Donc

$$\nu - \alpha' + 2 = m^{(p)} + m^{(p+1)} + m^{(p+2)} + \cdots + m^{(p+p'-1)}$$
$$- n^{(p)} - n^{(p+1)} - n^{(p+2)} - \cdots - n^{(p+p'-1)}$$
$$- m^{(p+p')} - m^{(p+p'+1)} - \cdots - m^{(r)}$$
$$+ n^{(p+p')} + n^{(p+p'+1)} + \cdots + n^{(r)}$$
$$+ 4(r - p - p' + 1) - 2r + 2p.$$

On voit sans peine que cette expression devient minimum, en faisant $p'=0$ et $r = p - 1$. On obtiendra donc $\nu - \alpha' + 2 = 2$, r restant arbitraire. Il s'ensuit qu'on peut faire

$$A\frac{M}{N} + A'\frac{M'}{N'} + \cdots + A^{(r)}\frac{M^{(r)}}{N^{(r)}} = k + k'x + \frac{C + C_1 x}{D + D_1 x + D_2 x^2}$$
$$= k + k'x + \frac{L}{x-a} + \frac{L'}{x-a'}.$$

En multipliant par $\frac{dx}{\sqrt{R}}$ et intégrant, on aura

$$\int \frac{(k+k'x)\,dx}{\sqrt{R}} = T' - L\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}} - L'\int \frac{dx}{(x-a')\sqrt{R}}.$$

26. Comme r est arbitraire, il est le plus simple de faire $r=0$, ce qui donne

$$T' = A.\log \frac{P + Q\sqrt{R}}{P - Q\sqrt{R}}.$$

De plus, comme n est arbitraire, soit $n=0$, d'où $m = n + 2 = 2$. Faisons donc

$$P = f + f'x + f''x^2, \text{ et } Q = 1,$$

on aura

$$N = P^2 - Q^2 R = (f + f'x + f''x^2)^2 - R,$$
$$M = A\left(2N\frac{dP}{dx} - P\frac{dN}{dx}\right) = A\left(P\frac{dR}{dx} - 2R\frac{dP}{dx}\right).$$

Soit

$$N = D + D_1 x + D_2 x^2,$$

on aura

$$\begin{aligned}
D &= f^2 - \alpha,\\
D_1 &= 2ff' - \beta,\\
D_2 &= f'^2 + 2ff'' - \gamma,\\
0 &= 2f'f'' - \delta,\\
0 &= f''^2 - \varepsilon.
\end{aligned}$$

De ces équations on tire $f'' = \sqrt{\varepsilon}$, $f' = \frac{\delta}{2\sqrt{\varepsilon}}$. On a de plus

$$\begin{aligned}
M = A\,[2\,(D + D_1 x + D_2 x^2)\,(f' + 2f'' x) - (D_1 + 2D_2 x)\,(f + f'x + f''x^2)]\\
= C + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3.
\end{aligned}$$

On tire de là

$$\begin{aligned}
C &= 2ADf' - AD_1 f,\\
C_1 &= 4ADf'' + AD_1 f' - 2AD_2 f,\\
C_2 &= 3AD_1 f'' = 3AD_1\sqrt{\varepsilon},\\
C_3 &= 2AD_2 f'' = 2AD_2\sqrt{\varepsilon},
\end{aligned}$$

donc

$$\frac{M}{N} = \frac{C + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3}{D + D_1 x + D_2 x^2} = \frac{C_3}{D_2} x + \frac{C_2 D_2 - C_3 D_1}{D_2^2} + \frac{C' + C'_1 x}{D + D_1 x + D_2 x^2},$$

où l'on a fait pour abréger

$$\frac{C_1 D_2 - C_3 D}{D_2} - \frac{D_1 (C_2 D_2 - C_3 D_1)}{D_2^2} = C'_1,$$

$$\text{et} \quad C - \frac{D\,(C_2 D_2 - C_3 D_1)}{D_2^2} = C'.$$

Soit

$$\frac{C_3}{D_2} = k', \quad \frac{C_2 D_2 - C_3 D_1}{D_2^2} = k.$$

On aura, en substituant les valeurs de C_3, C_2, D_2 et D_1,

$$\frac{2AD_2\sqrt{\varepsilon}}{D_2} = 2A\sqrt{\varepsilon} = k', \quad \text{donc} \quad A = \frac{k'}{2\sqrt{\varepsilon}},$$

$$k = \frac{AD_1\sqrt{\varepsilon}}{D_2} = \frac{k'}{2}\,\frac{D_1}{D_2} = \frac{k'}{2}\cdot\frac{2ff' - \beta}{f'^2 + 2ff'' - \gamma}.$$

En substituant les valeurs de f' et de f'', on en tirera

$$f = \frac{k\,(\delta^2 - 4\varepsilon\gamma) + 2k'\varepsilon\beta}{2\,(\delta k' - 4\varepsilon k)\sqrt{\varepsilon}}.$$

Connaissant f, on aura

$$D = f^2 - \alpha,$$

$$D_1 = \frac{\delta}{\sqrt{\varepsilon}} f - \beta,$$

$$D_2 = \frac{\delta^2}{4\varepsilon} + 2f\sqrt{\varepsilon} - \gamma,$$

$$C'_1 = k\beta - k'\alpha - \frac{k'\delta\beta}{4\varepsilon} - \frac{k\delta - k'\gamma}{\sqrt{\varepsilon}} f - k'f^2,$$

$$C' = \alpha k - \frac{\alpha\delta}{2\varepsilon} k' + \frac{k'\beta}{2\sqrt{\varepsilon}} f - kf^2.$$

Soit maintenant

$$\frac{C' + C'_1 x}{D + D_1 x + D_2 x^2} = \frac{L}{x - a} + \frac{L'}{x - a'},$$

on obtiendra

$$\int \frac{(k + k'x)\,dx}{\sqrt{R}} = -L \int \frac{dx}{(x - a)\sqrt{R}} - L' \int \frac{dx}{(x - a')\sqrt{R}}$$

$$+ \frac{k'}{2\sqrt{\varepsilon}} \log \left\{ \frac{f + \frac{\delta}{2\sqrt{\varepsilon}}.x + \sqrt{\varepsilon}.x^2 + \sqrt{R}}{f + \frac{\delta}{2\sqrt{\varepsilon}}.x + \sqrt{\varepsilon}.x^2 - \sqrt{R}} \right\},$$

ce qui est la réduction demandée.

27. Appliquons cette équation au cas où $k = 0$ et $k' = 1$. Dans ce cas on aura

$$f = \frac{\beta}{\delta} \sqrt{\varepsilon},$$

$$D = \frac{\varepsilon\beta^2 - \alpha\delta^2}{\delta^2},$$

$$D_1 = 0,$$

$$D_2 = \frac{\delta^2}{4\varepsilon} + \frac{2\beta\varepsilon}{\delta} - \gamma,$$

$$C' = \frac{\beta^2}{2\delta} - \frac{\alpha\delta}{2\varepsilon},$$

$$C'_1 = -\alpha - \frac{\beta\delta}{4\varepsilon} - \frac{\beta^2\varepsilon}{\delta^2} + \frac{\beta\gamma}{\delta};$$

donc

$$\frac{C' + C'_1 x}{D + D_1 x + D_2 x^2} = \frac{\frac{C'_1}{D_2} x + \frac{C'}{D_2}}{x^2 + \frac{D}{D_2}} = \frac{L}{x - \sqrt{-\frac{D}{D_2}}} + \frac{L'}{x + \sqrt{-\frac{D}{D_2}}},$$

où l'on trouvera

$$L=\tfrac{1}{2}\frac{C''_1}{D_2}+\tfrac{1}{2}C'\sqrt{-\frac{1}{DD_2}},$$

$$L'=\tfrac{1}{2}\frac{C''_1}{D_2}-\tfrac{1}{2}C'\sqrt{-\frac{1}{DD_2}}.$$

En substituant ces valeurs, on obtiendra

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{R}}=(G+H\sqrt{K})\int\frac{dx}{(x-\sqrt{K})\sqrt{R}}+(G-H\sqrt{K})\int\frac{dx}{(x+\sqrt{K})\sqrt{R}}$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}.\log\frac{\frac{\beta}{\delta}\sqrt{\varepsilon}+\frac{\delta}{2\sqrt{\varepsilon}}.x+\sqrt{\varepsilon}.x^2+\sqrt{R}}{\frac{\beta}{\delta}\sqrt{\varepsilon}+\frac{\delta}{2\sqrt{\varepsilon}}.x+\sqrt{\varepsilon}.x^2-\sqrt{R}},$$

où

$$G=-\frac{4\alpha\delta^2\varepsilon+\beta\delta^3+4\beta^2\varepsilon^2-4\beta\gamma\delta\varepsilon}{2(\delta^4+8\beta\delta\varepsilon^2-4\gamma\delta^2\varepsilon)},$$

$$H=-\frac{\delta}{4\varepsilon},$$

$$K=\frac{4\varepsilon}{\delta}.\frac{\varepsilon\beta^2-\alpha\delta^2}{4\gamma\delta\varepsilon-8\beta\varepsilon^2-\delta^3}.$$

28. Il faut considérer séparément les cas dans lesquels quelques-uns des coefficiens K, G, H deviennent infinis. Si $D_2=0$, on aura

$$\frac{M}{N}=\frac{C+C_1x+C_2x^2}{D+D_1x}=\frac{C_2}{D_1}x+\frac{C_1D_1-DC_2}{D_1^2}+\frac{C-D\frac{C_1D_1-C_2D}{D_1^2}}{D+D_1x},$$

$$C=2ADf'-AD_1f=A\left(\frac{D\delta}{\sqrt{\varepsilon}}-D_1f\right),$$

$$C_1=4ADf''+AD_1f'=A\left(4D\sqrt{\varepsilon}+\frac{D_1\delta}{2\sqrt{\varepsilon}}\right).$$

$$\frac{\delta^2}{4\varepsilon}+2f\sqrt{\varepsilon}-\gamma=0,\ \text{donc}\ f=\frac{4\varepsilon\gamma-\delta^2}{8\varepsilon\sqrt{\varepsilon}},$$

$$\frac{C_2}{D_1}=k',\ \frac{C_1D_1-C_2D}{D_1^2}=k,\ \text{donc}\ k'=3A\sqrt{\varepsilon},\ A=\frac{k'}{3\sqrt{\varepsilon}}.$$

On trouvera $k=\frac{k'}{6}\frac{\delta}{\varepsilon}+\frac{k'}{3}\frac{D}{D_1}$. Soit $\frac{D}{D_1}=\mu$, on aura

$$\mu=\frac{6k\varepsilon-k'\delta}{2k'\varepsilon},$$

$$\frac{M}{N}=k'x+k+\frac{C-Dk}{D+D_1x}=k'x+k+\frac{\frac{C}{D_1}-\frac{D}{D_1}k}{\frac{D}{D_1}+x};$$

or $\frac{C}{D_1} = -Af + \frac{A\delta}{\sqrt{\varepsilon}}$, $\frac{D}{D_1} = -\frac{k'f}{3\sqrt{\varepsilon}} + \frac{k'\delta}{3\varepsilon}\cdot\mu$, donc

$$\frac{M}{N} = k'x + k + \frac{\left(\frac{k'\delta}{3\varepsilon} - k\right)\mu - \frac{k'}{3\sqrt{\varepsilon}}f}{x+\mu};$$

on trouvera de plus

$$\mu = \frac{f^2 - \alpha}{f\delta - \beta\sqrt{\varepsilon}}\cdot\sqrt{\varepsilon}.$$

De la valeur de $\frac{M}{N}$ il suit qu'on a

$$\int \frac{(k+k'x)\,dx}{\sqrt{R}} = \left[\frac{k'}{3\sqrt{\varepsilon}}f - \left(\frac{k'\delta}{3\varepsilon} - k\right)\mu\right]\int \frac{dx}{(x+\mu)\sqrt{R}}$$

$$+ \frac{k'}{3\sqrt{\varepsilon}}\log\left\{\frac{f + \frac{\delta}{2\sqrt{\varepsilon}}x + \sqrt{\varepsilon}\,x^2 + \sqrt{R}}{f + \frac{\delta}{2\sqrt{\varepsilon}}x + \sqrt{\varepsilon}\,x^2 - \sqrt{R}}\right\},$$

où l'on a

$$f = \frac{4\varepsilon\gamma - \delta^2}{8\varepsilon\sqrt{\varepsilon}},$$

$$\mu = \frac{6k\varepsilon - k'\delta}{2k'\varepsilon} = \frac{(f^2-\alpha)\sqrt{\varepsilon}}{f\delta - \beta\sqrt{\varepsilon}}.$$

Si l'on fait $k=0$, $k'=1$, on aura

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{R}} = \frac{1}{3\varepsilon}(\mu' - \mu\delta)\int \frac{dx}{(x+\mu)\sqrt{R}}$$

$$+ \frac{1}{3\sqrt{\varepsilon}}\log\left\{\frac{\frac{\mu'}{\sqrt{\varepsilon}} + \frac{\delta}{2\sqrt{\varepsilon}}x + \sqrt{\varepsilon}\,x^2 + \sqrt{R}}{\frac{\mu'}{\sqrt{\varepsilon}} + \frac{\delta}{2\sqrt{\varepsilon}}x + \sqrt{\varepsilon}\,x^2 - \sqrt{R}}\right\},$$

où

$$\mu' = \frac{4\varepsilon\gamma - \delta^2}{8\varepsilon},\quad \mu = -\frac{\delta}{2\varepsilon} = \frac{\mu'^2 - \alpha\varepsilon}{\mu'\delta - \beta\varepsilon}.$$

On a donc la relation suivante entre les coefficiens α, β, γ, δ, ε:

$$(4\varepsilon\gamma - \delta^2)^2 + 4\delta^2(4\varepsilon\gamma - \delta^2) - 32\beta\delta\varepsilon^2 - 64\alpha\varepsilon^3 = 0.$$

29. Dans ce qui précède nous avons réduit $\frac{M}{N}$ à la forme $\frac{C + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3}{D + D_1x + D_2x^2}$, en faisant $P^2 - Q^2R = D + D_1x + D_2x^2$. On peut aussi le faire de la manière suivante. Soit

$$R = (p + qx + rx^2)(p' + q'x + x^2)$$

$$P = f(p' + q'x + x^2),\quad Q = 1,$$

on aura

$$N = P^2 - Q^2R = f^2(p' + q'x + x^2)^2 - (p' + q'x + x^2)(p + qx + rx^2),$$

ou bien

$$N = (p' + q'x + x^2)[f^2(p' + q'x + x^2) - (p + qx + rx^2)].$$

Soit

$$N = (p' + q'x + x^2)(D + D_1 x + D_2 x^2),$$

on aura

$$D = f^2 p' - p,$$
$$D_1 = f^2 q' - q,$$
$$D_2 = f^2 - r.$$

Or $M = A\left(P\frac{dR}{dx} - 2R\frac{dP}{dx}\right)$; donc

$$M = A(p' + q'x + x^2)\left(f\frac{dR}{dx} - 2(p + qx + rx^2)\frac{dP}{dx}\right),$$

c'est-à-dire

$$M = A(p' + q'x + x^2)[f\beta + 2f\gamma x + 3f\delta x^2 + 4f\varepsilon x^3 - 2(p + qx + rx^2)(fq' + 2fx)].$$

Soit

$$M = (p' + q'x + x^2)(C + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3),$$

on en tirera

$$C = A(f\beta - 2fpq'),$$
$$C_1 = A(2f\gamma - 4fp - 2fqq'),$$
$$C_2 = A(3f\delta - 4fq - 2frq'),$$
$$C_3 = A(4f\varepsilon - 4fr) = 0, \text{ à cause de } r = \varepsilon.$$

Puisque $C_3 = 0$, on voit qu'il est impossible de réduire l'intégrale $\int\frac{(k+x)dx}{\sqrt{R}}$ de cette manière, mais comme f par là devient arbitraire, on peut le déterminer de manière que $\int\frac{dx}{\sqrt{R}}$ soit réductible à une seule intégrale de la forme $\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$. Pour cela faisons

$$D + D_1 x + D_2 x^2 = D_2(x - a)^2,$$

d'où il suit que

$$D_1^2 = 4DD_2.$$

En substituant les valeurs de D, D_1, D_2, on obtiendra

$$(f^2q' - q)^2 = 4(f^2p' - p)(f^2 - r),$$

c'est-à-dire

$$f^4(q'^2-4p')-f^2(2qq'-4p-4p'r)+q^2-4pr=0.$$

Cette équation servira à déterminer f. Connaissant f, on aura aussi D, D_1, D_2 et a.

Comme M doit être divisible par $x-a$, soit

$$C+C_1x+C_2x^2=(x-a)(k+k'x);$$

de là on tire

$$C=-ak,\quad C_1=k-ak',\quad C_2=k',$$

et en éliminant les quantités k et k',

$$C_1=-\frac{C}{a}-aC_2,\quad \text{ou}\quad C_2a^2+C_1a+C=0,$$

d'où l'on tire la valeur de a, savoir

$$a=-\frac{C_1}{2C_2}\pm\sqrt{\frac{C_1^2}{4C_2^2}-\frac{C}{C_2}}.$$

On a

$$\frac{M}{N}=\frac{C+C_1x+C_2x^2}{D+D_1x+D_2x^2}=\frac{(k+k'x)(x-a)}{D_2(x-a)^2};$$

donc

$$\frac{M}{N}=\frac{k+k'x}{D_2(x-a)}=\frac{k'}{D_2}+\frac{k+ak'}{D_2(x-a)}.$$

Soit $\frac{k'}{D_2}=1$, on aura $k'=D_2$, donc $D_2=C_2$; ou bien, en substituant les valeurs de ces quantités,

$$f^2-r=A(3f\delta-4fq-2frq'),$$

d'où l'on tire

$$A=\frac{f^2-r}{f(3\delta-4q-2rq')};$$

or $\delta=rq'+q$, donc

$$A=\frac{f^2-r}{f(rq'-q)}.$$

Nous avons trouvé $k=-\frac{C}{a}$, donc en substituant,

$$k=-\frac{Af}{a}(\beta-2pq'),$$

or $\beta=pq'+p'q$, donc

$$k=\frac{Af}{a}(pq'-qp')=\frac{(f^2-r)(pq'-qp')}{a(rq'-q)},$$

$$D_2=f^2-r,$$

donc

$$\frac{k}{D_2} = \frac{pq' - qp'}{a(rq' - q)},$$

et

$$\left(\frac{k}{D_2} + a\frac{k'}{D_2}\right) = a + \frac{pq' - qp'}{a(rq' - q)} = \frac{pq' - qp' + (rq' - q)a^2}{(rq' - q)a} = L.$$

En substituant cette valeur dans l'expression de $\frac{M}{N}$, on obtiendra

$$\frac{M}{N} = 1 + L\frac{1}{x - a},$$

donc

$$\int\frac{dx}{\sqrt{R}} = -L\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}} + A\,.\log\frac{f(p' + q'x + x^2) + \sqrt{R}}{f(p' + q'x + x^2) - \sqrt{R}},$$

où

$$R = (p + qx + rx^2)(p' + q'x + x^2),$$

$$L = \frac{pq' - qp' + (rq' - q)a^2}{(rq' - q)a},$$

$$A = \frac{f^2 - r}{f(rq' - q)}, \quad a = \frac{q - q'f^2}{2(f^2 - r)},$$

$$f^4(q'^2 - 4p') - f^2(2qq' - 4p - 4p'r) + q^2 - 4pr = 0.$$

30. Appliquons cette formule au cas où $r = 1$, $q' = -q$ et $p' = p$. On aura

$$R = (p + qx + x^2)(p - qx + x^2),$$

$$f^4(q^2 - 4p) + f^2(2q^2 + 8p) + q^2 - 4p = 0.$$

On tire de là

$$f = \frac{q \pm 2\sqrt{p}}{\sqrt{4p - q^2}}.$$

On a

$$a = \frac{q - q'f^2}{2(f^2 - r)} = -\frac{1 + f^2}{1 - f^2}\cdot\frac{q}{2}.$$

En substituant ici la valeur de f, et réduisant, on trouvera

$$a = \pm\sqrt{p}.$$

On aura de même

$$A = \frac{f^2 - r}{f(rq' - q)} = \frac{1 - f^2}{2fq} = -\frac{1}{\sqrt{4p - q^2}}.$$

La valeur de L donne

$$L = \frac{p}{a} + a = \pm 2\sqrt{p}.$$

En substituant les valeurs trouvées, on obtiendra

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(p+qx+x^2)(p-qx+x^2)}} = -2\sqrt{p}\int \frac{dx}{(x-\sqrt{p})\sqrt{(p+qx+x^2)(p-qx+x^2)}}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{4p-q^2}} \cdot \log \frac{\frac{q+2\sqrt{p}}{\sqrt{4p-q^2}}\sqrt{p-qx+x^2}+\sqrt{p+qx+x^2}}{\frac{q+2\sqrt{p}}{\sqrt{4p-q^2}}\sqrt{p-qx+x^2}-\sqrt{p+qx+x^2}}.$$

32. On peut par la supposition de $P=f+f'x+f''x^2$ réduire l'intégrale $\int \frac{dx}{\sqrt{R}}$ de plusieurs autres manières, savoir en faisant les suppositions suivantes:

$$R=\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4,$$
$$P=f+f'x+f''x^2.$$

1. $N=P^2-R=k(x-a)^4$.
2. $N=P^2-R=k(x+p)(x-a)^3$, $x+p$ étant facteur de R.
3. $N=P^2-R=k(x^2+px+q)(x-a)^2$, x^2+px+q étant facteur de R.

Le troisième cas est celui que nous avons traité; considérons encore le premier. On a

$$(f+f'x+f''x^2)^2-(\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4)=k(x-a)^4,$$

donc

$$f^2-\alpha=ka^4,$$
$$2ff'-\beta=-4ka^3,$$
$$f'^2+2ff''-\gamma=6ka^2,$$
$$2f'f''-\delta=-4ka,$$
$$f''^2-\varepsilon=k.$$

Par ces équations on peut déterminer les cinq quantités k, a, f, f', f''; mais on peut les trouver plus facilement de la manière suivante. Soit

$$R=\varepsilon(x-p)(x-p')(x-p'')(x-p''').$$

En substituant dans l'équation

$$f+f'x+f''x^2=\sqrt{k(x-a)^4+R}$$

pour x les valeurs p, p', p'', p''', on obtiendra

$$f+pf'+p^2f''=(p-a)^2\sqrt{k},$$
$$f+p'f'+p'^2f''=i(p'-a)^2\sqrt{k},$$
$$f+p''f'+p''^2f''=i'(p''-a)^2\sqrt{k},$$
$$f+p'''f'+p'''^2f''=i''(p'''-a)^2\sqrt{k},$$

i, i' et i'' désignant le double signe $\pm$. De là on tire

$$(p-p')f'+(p^2-p'^2)f''=[(p-a)^2-i(p'-a)^2]\sqrt{k}.$$

En divisant par $p-p'$, on aura

$$f'+(p+p')f''=\frac{(p-a)^2-i(p'-a)^2}{p-p'}\sqrt{k}.$$

De la même manière

$$f'+(p+p'')f''=\frac{(p-a)^2-i'(p''-a)^2}{p-p''}\sqrt{k}.$$

$$f'+(p+p''')f''=\frac{(p-a)^2-i''(p'''-a)^2}{p-p'''}\sqrt{k}.$$

De ces équations on tire de même

$$(p'-p'')f''=(p-a)^2\left(\frac{1}{p-p'}-\frac{1}{p-p''}\right)\sqrt{k}-\left(\frac{i(p'-a)^2}{p-p'}-\frac{i'(p''-a)^2}{p-p''}\right)\sqrt{k},$$

d'où

$$f''=\left(\frac{(p-a)^2}{(p-p')(p-p'')}-\frac{i(p'-a)^2}{(p-p')(p'-p'')}+\frac{i'(p''-a)^2}{(p-p'')(p'-p'')}\right)\sqrt{k}.$$

De la même manière

$$f''=\left(\frac{(p-a)^2}{(p-p')(p-p''')}-\frac{i(p'-a)^2}{(p-p')(p'-p''')}+\frac{i''(p'''-a)^2}{(p-p''')(p'-p''')}\right)\sqrt{k}.$$

Donc enfin

$$\left.\begin{aligned}&(p-a)^2\left(\frac{1}{(p-p')(p-p'')}-\frac{1}{(p-p')(p-p''')}\right)\\&-i(p'-a)^2\left(\frac{1}{(p-p')(p'-p'')}-\frac{1}{(p-p')(p'-p''')}\right)\\&+\frac{i'(p''-a)^2}{(p-p'')(p'-p'')}-\frac{i''(p'''-a)^2}{(p-p''')(p'-p''')}\end{aligned}\right\}=0,$$

ou bien

$$\left.\begin{aligned}&\frac{(p-a)^2}{(p-p')(p-p'')(p-p''')}+\frac{i\,.(p'-a)^2}{(p'-p)(p'-p'')(p'-p''')}\\&+\frac{i'.(p''-a)^2}{(p''-p)(p''-p')(p''-p''')}+\frac{i''.(p'''-a)^2}{(p'''-p)(p'''-p')(p'''-p'')}\end{aligned}\right\}=0.$$

Donc

$$C-2C_1a+C_2a^2=0,$$

où

$$C=\frac{p^2}{(p-p')(p-p'')(p-p''')}+\frac{ip'^2}{(p'-p)(p'-p'')(p'-p''')}+\cdots,$$

$$C_1=\frac{p}{(p-p')(p-p'')(p-p''')}+\frac{ip'}{(p'-p)(p'-p'')(p'-p''')}+\cdots,$$

$$C_2=\frac{1}{(p-p')(p-p'')(p-p''')}+\frac{i}{(p'-p)(p'-p'')(p'-p''')}+\cdots.$$

Quant à la valeur de i, de i' et de i'', on ne peut faire que $i=1$, $i'=-1$, $i''=-1$, car dans tout autre cas on aura $f''=\sqrt{k}$, ce qui donne $\varepsilon=0$. Soit donc $i=1$, $i'=-1$ et $i''=-1$, on trouvera sans peine

$$C=-2\,\frac{pp'(p''+p''')-p''p'''(p+p')}{(p-p'')(p-p''')(p'-p'')(p'-p''')},$$

$$C_1=-2\,\frac{pp'-p''p'''}{(p-p'')(p-p''')(p'-p'')(p'-p''')},$$

$$C_2=-2\,\frac{p+p'-p''-p'''}{(p-p'')(p-p''')(p'-p'')(p'-p''')};$$

donc

$$(p+p'-p''-p''')a^2-2(pp'-p''p''')a+pp'(p''+p''')-p''p'''(p+p')=0.$$

Connaissant a, on aura

$$f''=\frac{p+p'-p''-p'''-4a}{p+p'-p''-p'''}\sqrt{k};$$

donc l'équation $f''^2-\varepsilon=k$ devient, en faisant $\varepsilon=1$,

$$\left[\left(\frac{p+p'-p''-p'''-4a}{p+p'-p''-p'''}\right)^2-1\right]k=\varepsilon=1,$$

donc

$$k=\frac{(p+p'-p''-p''')^2}{[2(p''+p''')-4a][2(p+p')-4a]},$$

$$f''=\sqrt{1-k}=\frac{p+p'-p''-p'''-4a}{\sqrt{[2(p+p')-4a][2(p''+p''')-4a]}},$$

$$f=\sqrt{pp'p''p'''+ka^4},$$

$$f'=-\frac{p+p'+p''+p'''+4ka}{2\sqrt{1+k}}.$$

Il reste maintenant à déterminer A et L. On a

$$M=A\left(2N\frac{dP}{dx}-P\frac{dN}{dx}\right),$$

donc

$$M=-Ak(x-a)^3[2af'+4f+(2f'+4af'')x],$$

et par suite

$$\frac{M}{N}=-\frac{A(2af'+4f)+A(2f'+4af'')x}{x-a}$$

$$=-A(2f'+4af'')-\frac{A(2af'+4f)+Aa(2f'+4af'')}{x-a}$$

$$=1-\frac{L}{x-a};$$

donc

$$A = -\frac{1}{2(f'+2af'')},$$

$$L = -\frac{2(f+af'+a^2f'')}{f'+2af''},$$

ou bien

$$A = \frac{1}{2\sqrt{(p+p'-2a)(p''+p'''-2a)}},$$

$$L = 2\sqrt{\frac{(a-p)(a-p')(a-p'')(a-p''')}{[2a-(p+p')][2a-(p''+p''')]}}.$$

Connaissant ces valeurs, on aura

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(x-p)(x-p')(x-p'')(x-p''')}} = L\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{(x-p)(x-p')(x-p'')(x-p''')}}$$

$$+A.\log\frac{f+f'x+f''x^2+\sqrt{(x-p)(x-p')(x-p'')(x-p''')}}{f+f'x+f''x^2-\sqrt{(x-p)(x-p')(x-p'')(x-p''')}}.$$

32. Appliquons cette équation aux cas suivans:

1. $p' = -p,\ p''' = -p''.$

2. $p'' = -p,\ p''' = -p'.$

Dans le premier cas on aura

$$A = -\frac{1}{4a},\quad L = \frac{\sqrt{(a^2-p^2)(a^2-p''^2)}}{a},$$

$$f'' = -1,\ f' = 0,\ f = pp'',\quad a = 0.$$

Donc A et L sont infinis. Dans le second cas, on aura

$$a = \sqrt{pp'},$$

$$A = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{4a^2-(p+p')^2}} = -\frac{1}{2(p-p')\sqrt{-1}},\quad L = -2\sqrt{pp'},$$

$$f'' = \frac{2\sqrt{pp'}}{(p-p')\sqrt{-1}},\ f' = -\frac{(p+p')^2}{(p-p')\sqrt{-1}},\ f = \frac{2pp'\sqrt{pp'}}{(p-p')\sqrt{-1}}.$$

Donc

$$P = \frac{1}{(p-p')\sqrt{-1}}[2pp'\sqrt{pp'}-(p+p')^2x+2\sqrt{pp'}\,x^2].$$

Donc

$$A.\log\frac{P+\sqrt{R}}{P-\sqrt{R}} = \frac{1}{p-p'}.\operatorname{arc\,tang}\frac{\sqrt{R}}{P\sqrt{-1}},$$

et enfin

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-p^2)(x^2-p'^2)}} = -2\sqrt{pp'}\int \frac{dx}{(x-\sqrt{pp'})\sqrt{(x^2-p^2)(x^2-p'^2)}}$$
$$-\frac{1}{p-p'}\cdot \text{arc tang}\,\frac{(p-p')\sqrt{(x^2-p^2)(x^2-p'^2)}}{2\,pp'\sqrt{pp'}-(p+p')^2x+2\sqrt{pp'}\,.\,x^2}.$$

On a

$$(x^2-p^2)(x^2-p'^2)=(x-p)(x-p')(x+p)(x+p')$$
$$=[x^2-(p+p')x+pp'][x^2+(p+p')x+pp'].$$

Soit $p+p'=q$, et $pp'=r$, on aura

$$p^2-qp+r=0,$$
$$p=\tfrac{1}{2}q+\tfrac{1}{2}\sqrt{q^2-4r},\;\; p'=\tfrac{1}{2}q-\tfrac{1}{2}\sqrt{q^2-4r}$$
$$p-p'=\sqrt{q^2-4r},\;\; \sqrt{pp'}=\sqrt{r}.$$

Donc

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+qx+r)(x^2-qx+r)}} = -2\sqrt{r}\int \frac{dx}{(x-\sqrt{r})\sqrt{(x^2+qx+r)(x^2-qx+r)}}$$
$$-\frac{1}{\sqrt{q^2-4r}}\,.\,\text{arc tang}\,\frac{\sqrt{q^2-4r}\sqrt{(x^2+qx+r)(x^2-qx+r)}}{2r\sqrt{r}-q^2x+2\sqrt{r}\,.\,x^2},$$

la même formule qu'on a trouvée plus haut, mais sous une autre forme.

33. Il est à remarquer qu'on peut toujours supposer que P n'ait aucun facteur commun avec R; car soit $R=R'r$ et $P=P'r$, on aura

$$\log\frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}}=\log\frac{P'r+Q\sqrt{R'r}}{P'r-Q\sqrt{R'r}}$$
$$=\log\frac{P'\sqrt{r}+Q\sqrt{R'}}{P'\sqrt{r}-Q\sqrt{R'}}=\tfrac{1}{2}\log\frac{(P'\sqrt{r}+Q\sqrt{R'})^2}{(P'\sqrt{r}-Q\sqrt{R'})^2}$$
$$=\tfrac{1}{2}\log\frac{P'^2r+Q^2R'+2\,P'Q\sqrt{rR'}}{P'^2r+Q^2R'-2\,P'Q\sqrt{rR'}}=\tfrac{1}{2}\log\frac{P''+Q'\sqrt{R}}{P''-Q'\sqrt{R}},$$

expression dans laquelle $P''=P'^2r+Q^2R'$ et $Q'=2\,P'Q$; et il est évident que P'' n'a point de facteurs communs avec R; donc etc.

Voilà la raison par laquelle nous avons trouvé la même formule de réduction pour l'intégrale $\int\frac{dx}{\sqrt{R}}$, soit en supposant P facteur de R, soit non. Néanmoins il est utile de supposer P facteur de R, car les calculs deviennent par là plus simples.

Problème II.

Trouver les conditions nécessaires pour que

$$\int \frac{x^m + k^{(m-1)} x^{m-1} + \cdots + k'x + k}{x^m + l^{(m-1)} x^{m-1} + \cdots + l'x + l} \cdot \frac{dx}{\sqrt{R}} = A \cdot \log \frac{P + Q\sqrt{R}}{P - Q\sqrt{R}}.$$

34. On peut se convaincre aisément par un raisonnement analogue à celui qu'on a employé dans le problème précédent, qu'on doit faire

$$Q = e + e'x + e''x^2 + \cdots + e^{(n-1)} x^{n-1} + x^n,$$
$$P = f + f'x + f''x^2 + \cdots + f^{(n+1)} x^{n+1} + f^{(n+2)} x^{n+2},$$

n étant un nombre entier quelconque qui satisfait à la condition:

$$2n + 4 \geqq m.$$

Soit

$$x^m + l^{(m-1)} x^{m-1} + \cdots + l'x + l = (x-a)(x-a')(x-a'') \ldots (x-a^{(m-1)}).$$

Pour que $\frac{M}{N}$ soit réductible à la forme:

$$\frac{x^m + k^{(m-1)} x^{m-1} + \cdots + k}{x^m + l^{(m-1)} x^{m-1} + \cdots + l} = \frac{M'}{(x-a)(x-a')(x-a'') \ldots (x-a^{(m-1)})},$$

il est clair, selon ce qu'on a vu précédemment, qu'on doit faire

$$(1) \qquad N = P^2 - Q^2 R = C(x-a)^{\mu} (x-a')^{\mu'} \ldots (x-a^{(m-1)})^{\mu^{(m-1)}} = CS,$$

$$\text{où} \quad 2n + 4 = \mu + \mu' + \mu'' + \cdots + \mu^{(m-1)}.$$

Il s'agit maintenant de satisfaire à cette équation.

35. *Première méthode.* Supposons que

$$(x-a)^{\mu}(x-a')^{\mu'} \ldots (x-a^{(m-1)})^{\mu^{(m-1)}} = g + g'x + g''x^2 + \cdots + g^{(2n+3)} x^{2n+3} + x^{2n+4},$$

on aura

$$P^2 - Q^2R = C(g + g'x + g''x^2 + \cdots + g^{(2n+3)}x^{2n+3} + x^{2n+4})$$
$$= (f + f'x + f''x^2 + \cdots + f^{(n+2)}x^{n+2})^2$$
$$-(e + e'x + \cdots + e^{(n-1)}x^{n-1} + x^n)^2(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4).$$

En développant et comparant les coefficiens, on trouvera l'équation générale:

$$(2)\quad \left.\begin{array}{l} ff^{(p)} + f'f^{(p-1)} + f''f^{(p-2)} + f'''f^{(p-3)} + \cdots \\ -\alpha(ee^{(p)} + e'e^{(p-1)} + e''e^{(p-2)} + e'''e^{(p-3)} + \cdots) \\ -\beta(ee^{(p-1)} + e'e^{(p-2)} + e''e^{(p-3)} + e'''e^{(p-4)} + \cdots) \\ -\gamma(ee^{(p-2)} + e'e^{(p-3)} + e''e^{(p-4)} + e'''e^{(p-5)} + \cdots) \\ -\delta(ee^{(p-3)} + e'e^{(p-4)} + e''e^{(p-5)} + e'''e^{(p-6)} + \cdots) \\ -\varepsilon(ee^{(p-4)} + e'e^{(p-5)} + e''e^{(p-6)} + e'''e^{(p-7)} + \cdots) \end{array}\right\} = \tfrac{1}{2}Cg^{(p)}.$$

En faisant dans cette équation successivement $p = 0, 1, 2, 3, 4 \ldots 2n+3, 2n+4$, on obtiendra $2n+5$ équations, et ces $2n+5$ équations contiennent les conditions qui résultent de l'équation (1).

On peut par ces équations déterminer les coefficiens e, e' etc. f, f', f'', etc. en fonction de C, a, a', a'', etc.

Déterminons maintenant la valeur de $g^{(p)}$. En prenant le logarithme on a

$$\log(g + g'x + g''x^2 + \cdots + x^{2n+4}) = \mu\log(x-a) + \mu'\log(x-a') + \cdots,$$

donc en différentiant

$$\frac{g' + 2g''x + \cdots + (2n+4)x^{2n+3}}{g + g'x + g''x^2 + \cdots + x^{2n+4}} = \frac{\mu}{x-a} + \frac{\mu'}{x-a'} + \cdots,$$

donc

$$g' + 2g''x + \cdots + (2n+4)x^{2n+3} = \mu\,\frac{x^{2n+4} + g^{(2n+3)}x^{2n+3} + \cdots + g'x + g}{x-a}$$
$$+\mu'\,\frac{x^{2n+4} + g^{(2n+3)}x^{2n+3} + \cdots + g'x + g}{x-a'}$$
$$+\mu''\,\frac{x^{2n+4} + g^{(2n+3)}x^{2n+3} + \cdots + g'x + g}{x-a''}$$
$$+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Le coefficient de x^p dans $\dfrac{S}{x-a}$ est $-\left(\dfrac{g^{(p)}}{a} + \dfrac{g^{(p-1)}}{a^2} + \cdots + \dfrac{g}{a^{p+1}}\right)$. Donc il est aisé de voir qu'on aura

$$(3)\quad \left.\begin{array}{l} \quad g^{(p)}\left(\frac{\mu}{a}+\frac{\mu'}{a'}+\frac{\mu''}{a''}+\cdots\right) \\ +g^{(p-1)}\left(\frac{\mu}{a^2}+\frac{\mu'}{a'^2}+\frac{\mu''}{a''^2}+\cdots\right) \\ +g^{(p-2)}\left(\frac{\mu}{a^3}+\frac{\mu'}{a'^3}+\frac{\mu''}{a''^3}+\cdots\right) \\ +\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ +\quad g'\left(\frac{\mu}{a^p}+\frac{\mu'}{a'^p}+\frac{\mu''}{a''^p}+\cdots\right) \\ +g\left(\frac{\mu}{a^{p+1}}+\frac{\mu'}{a'^{p+1}}+\frac{\mu''}{a''^{p+1}}+\cdots\right) \end{array}\right\} = -(p+1)g^{(p+1)}.$$

En faisant $p=0$, 1, 2, 3 etc., on déterminera aisément les quantités g', g'', etc. en fonction de g, et celle-ci est égale à $a^{\mu}a'^{\mu'}a''^{\mu''}\ldots(a^{(m-1)})^{\mu^{(m-1)}}$.

36. *Seconde méthode.* Soit $P=Fx$, $Q=fx$, $R=\varphi x$, on aura d'abord, en faisant $x=a$, a', a'' etc., les m équations suivantes:

$$\begin{array}{l} (Fa)^2 \;-(fa)^2\;\varphi a\;=0, \\ (Fa')^2 -(fa')^2\;\varphi a'\;=0, \\ (Fa'')^2-(fa'')^2\varphi a''=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (Fa^{(m-1)})^2-(fa^{(m-1)})^2\varphi a^{(m-1)}=0. \end{array}$$

De ces équations on tire

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{l} Fa \;=\pm fa\;\sqrt{\varphi a}\;=i\;fa\;\sqrt{\varphi a}, \\ Fa' =\pm fa'\sqrt{\varphi a'}=i' fa'\sqrt{\varphi a'}, \\ Fa'' =\pm fa''\sqrt{\varphi a''}=i'' fa''\sqrt{\varphi a''}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ Fa^{(m-1)}=\pm fa^{(m-1)}.\sqrt{\varphi a^{(m-1)}}=i^{(m-1)}.fa^{(m-1)}.\sqrt{\varphi a^{(m-1)}}. \end{array}\right.$$

En différentiant la première $\mu-1$ fois, la seconde $\mu'-1$ fois etc. par rapport à a, on obtiendra des équations qui deviennent toutes de la forme:

$$(5)\quad d^pFa=\pm\left(d^pfa\sqrt{\varphi a}+pd^{p-1}fa.d\sqrt{\varphi a}+\frac{p(p-1)}{2}d^{p-2}fa.d^2\sqrt{\varphi a}+\cdots+fa.d^p\sqrt{\varphi a}\right).$$

On aura des équations semblables par rapport à a', a'' etc., et en faisant dans ces équations

$$p=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\ldots\mu-1,$$
$$p=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\ldots\mu'-1,$$
$$p=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\ldots\mu''-1,$$
etc.

on obtiendra les équations nécessaires pour déterminer e, e', e'', etc. f, f', f'', etc.

Ces équations ont l'avantage d'être linéaires par rapport à $e, e', e'', \ldots$ $f, f', f'' \ldots$, ce qui facilite beaucoup la détermination de ces quantités.

37. Il reste maintenant à trouver les coefficiens k, k', k'', ... et A. On a

$$M=A\frac{\left(2N\frac{dP}{dx}-P\frac{dN}{dx}\right)}{Q}$$

et

$$\frac{M}{N}=A\frac{\left(2\frac{dP}{dx}-P\frac{dN}{Ndx}\right)}{Q};$$

or $\frac{dN}{Ndx}=\frac{\mu}{x-a}+\frac{\mu'}{x-a'}+\frac{\mu''}{x-a''}+\cdots$, donc

$$\frac{dN}{Ndx}=\frac{h+h'x+h''x^2+\cdots+h^{(m-1)}x^{m-1}}{l+l'x+l''x^2+\cdots+l^{(m-1)}x^{m-1}+x^m}=\frac{t}{S'},$$

et

$$\frac{M}{N}=A\frac{\left(2\frac{dP}{Qdx}S'-\frac{Pt}{Q}\right)}{S'}=\frac{k+k'x+k''x^2+\cdots+k^{(m-1)}x^{m-1}+x^m}{S'};$$

donc

$$k+k'x+\cdots+k^{(m-1)}x^{m-1}+x^m=A\,\frac{2\frac{dP}{dx}S'-Pt}{Q}. \tag{6}$$

En développant le second membre, on aura aisément les valeurs des coefficiens k, k', k'', etc. et A.

Ces coefficiens peuvent aussi être déterminés comme il suit. Soit $x=a$, on aura $S'=0$ et $t=\mu(a-a')(a-a'')(a-a''')\ldots$, donc

$$k+k'a+k''a^2+\cdots+a^m=-\mu A\frac{Fa}{fa}(a-a')(a-a'')(a-a''')\ldots,$$

or $\frac{Fa}{fa}=\pm\sqrt{\varphi a}=i\sqrt{\varphi a}$; donc

$$k+k'a+k''a^2+\cdots+a^m=-i\mu A\sqrt{\varphi a}.(a-a')(a-a'')\ldots,$$

ou bien, en faisant $t = \psi x$,

$$k + k'a + k''a^2 + k'''a^3 + \cdots + a^m = -iA\sqrt{\varphi a}\,.\,\psi a.$$

En mettant au lieu de a successivement a, a', a'' etc., on aura les équations suivantes:

$$(7)\left\{\begin{array}{l} k + k'a + k''a^2 + \cdots + k^{(m-1)}a^{m-1} + a^m = -iA\sqrt{\varphi a}\,.\,\psi a, \\ k + k'a' + k''a'^2 + \cdots + k^{(m-1)}a'^{(m-1)} + a'^m = -i'A\sqrt{\varphi a'}\,.\,\psi a', \\ k + k'a'' + k''a''^2 + \cdots + k^{(m-1)}a''^{(m-1)} + a''^m = -i''A\sqrt{\varphi a''}\,.\,\psi a'', \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ k + k'a^{(m-1)} + k''a^{(m-1)^2} + \cdots + k^{(m-1)}a^{(m-1)^{(m-1)}} + a^{(m-1)^m} = -i^{(m-1)}A\sqrt{\varphi a^{(m-1)}}\,.\,\psi a^{(m-1)}. \end{array}\right.$$

Au moyen de ces équations il est aisé de déterminer k, k', k'', k''', etc. en fonction de A, a, a', a'', etc. On trouvera

$$A = \frac{1}{f^{(n+2)}[(2n+4)\,l^{(m-1)} - h^{(m-2)}] + f^{(n+1)}(2n + 2 - h^{(m-1)})};$$

or

$$h^{(m-1)} = \mu + \mu' + \mu'' + \cdots = 2n + 4,$$

$$h^{(m-2)} = \left.\begin{array}{l} -\ \mu(a' + a'' + a''' + \cdots) \\ -\ \mu'(a + a'' + a''' + \cdots) \\ -\ \mu''(a + a' + a''' + \cdots) \\ -\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} \mu(l^{(m-1)} + a) \\ +\ \mu'(l^{(m-1)} + a') \\ +\ \mu''(l^{(m-1)} + a'') \\ +\ \cdots\cdots\cdots \end{array}\right.$$

donc

$$h^{(m-2)} = (2n+4)\,l^{(m-1)} + \mu a + \mu'a' + \mu''a'' + \cdots;$$

on tire de là

$$(8)\qquad A = -\frac{1}{(\mu a + \mu'a' + \mu''a'' + \cdots)\,f^{(n+2)} + 2f^{(n+1)}}.$$

38. Appliquons ce qui précède au cas où $\mu = \mu' = \mu'' = \cdots = 1$. Dans ce cas on a $m = 2n + 4$. Les seules équations qui sont nécessaires dans ce cas, sont les équations (4) et (7). Considérons d'abord les équations (4)

$$\begin{array}{l} f + f'a + f''a^2 + \cdots + f^{(n+2)}a^{n+2} = ifa\sqrt{\varphi a}, \\ f + f'a' + f''a'^2 + \cdots + f^{(n+2)}a'^{n+2} = i'fa'\sqrt{\varphi a'}, \\ f + f'a'' + f''a''^2 + \cdots + f^{(n+2)}a''^{n+2} = i''fa''\sqrt{\varphi a''}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f + f'a^{(m-1)} + f''a^{(m-1)^2} + \cdots + f^{(n+2)}a^{(m-1)^{(n+2)}} = i^{(m-1)}fa^{(m-1)}\sqrt{\varphi a^{(m-1)}}. \end{array}$$

On peut aisément éliminer les quantités f, f', f'' etc. de la manière suivante:

On a, comme on sait,

$$\frac{a^{m-p-2}}{(a-a')(a-a'')(a-a''')\ldots}+\frac{a'^{m-p-2}}{(a'-a)(a'-a'')\ldots}+\frac{a''^{m-p-2}}{(a''-a)(a''-a')\ldots}+\cdots=0,$$

p étant un nombre entier positif; ou bien

$$\frac{a^p}{\psi a}+\frac{a'^p}{\psi a'}+\frac{a''^p}{\psi a''}+\cdots+\frac{a^{(m-1)p}}{\psi a^{(m-1)}}=0,$$

lorsque $p<m-1$, c'est-à-dire $p<2n+3$. Donc si l'on multiplie la première des équations précédentes par $\frac{a^p}{\psi a}$, la seconde par $\frac{a'^p}{\psi a'}$ etc., et qu'on les ajoute ensuite, il est aisé de voir que la somme des premiers membres devient égale à zéro si $p<n+1$. On a donc

$$(9) \qquad i\frac{a^p\sqrt{\varphi a}}{\psi a}fa+i'\frac{a'^p\sqrt{\varphi a'}}{\psi a'}fa'+\cdots=0.$$

En faisant dans cette équation successivement $p=0, 1, 2, 3, \ldots n$, on obtiendra $n+1$ équations par lesquelles on déterminera les n quantités $e, e', e'', \ldots e^{(n-1)}$, et on trouvera de plus la relation qui doit avoir lieu entre les quantités a, a', a'', a''' etc.

39. Supposons que $n=0$. Dans ce cas on aura

$$fa=fa'=fa''=\cdots=1;$$

donc l'équation précédente devient

$$\frac{i\sqrt{\varphi a}}{(a-a')(a-a'')(a-a''')}+\frac{i'\sqrt{\varphi a'}}{(a'-a)(a'-a'')(a'-a''')}$$
$$+\frac{i''\sqrt{\varphi a''}}{(a''-a)(a''-a')(a''-a''')}+\frac{i'''\sqrt{\varphi a'''}}{(a'''-a)(a'''-a')(a'''-a'')}=0.$$

C'est la relation qui existe entre les quatre quantités a, a', a'', a'''.

Les équations (4) deviennent

$$f+f'a+f''a^2=i\sqrt{\varphi a},$$
$$f+f'a'+f''a'^2=i'\sqrt{\varphi a'},$$
$$f+f'a''+f''a''^2=i''\sqrt{\varphi a''},$$
$$f+f'a'''+f''a'''^2=i'''\sqrt{\varphi a'''}.$$

En multipliant la première par $\frac{1}{a(a-a')(a-a'')(a-a''')}$ etc., et en ajoutant ensuite, on aura

$$f.\left(\frac{1}{a(a-a')(a-a'')(a-a''')}+\frac{1}{a'(a'-a)(a'-a'')(a'-a''')}+\cdots\right)$$
$$=\frac{i\sqrt{\varphi a}}{a(a-a')(a-a'')(a-a''')}+\frac{i'\sqrt{\varphi a'}}{a'(a'-a)(a'-a'')(a'-a''')}+\cdots,$$

d'où

$$-f=i\frac{a'a''a'''}{(a-a')(a-a'')(a-a''')}\sqrt{\varphi a}+i'\frac{aa''a'''}{(a'-a)(a'-a'')(a'-a''')}\sqrt{\varphi a'}$$
$$+i''\frac{aa'a'''}{(a''-a)(a''-a')(a''-a''')}\sqrt{\varphi a''}+i'''\frac{aa'a''}{(a'''-a)(a'''-a')(a'''-a'')}\sqrt{\varphi a'''}.$$

De la même manière

$$f''=\frac{i\sqrt{\varphi a}}{(a-a')(a-a'')}+\frac{i'\sqrt{\varphi a'}}{(a'-a)(a'-a'')}+\frac{i''\sqrt{\varphi a''}}{(a''-a)(a''-a')},$$

et ensuite

$$f'=\frac{i\sqrt{\varphi a}}{a-a'}+\frac{i'\sqrt{\varphi a'}}{a'-a}-(a+a')f''.$$

Connaissant f, f', f'', on aura aisément la valeur de A par l'équation (8), qui devient dans ce cas

$$A=-\frac{1}{(a+a'+a''+a''')f''+2f'};$$

k, k', k'' et k''' se déterminent par les équations (7).

On peut aussi déterminer les coefficiens de la manière suivante. Soit

$$R=(x-p)(x-p')(x-p'')(x-p''');$$

si dans les équations

$$P=\sqrt{R+C.S},\quad S=l+l'x+l''x^2+l'''x^3+x^4=\theta x,$$

on fait $x=p, p', p'', p'''$, on obtiendra

$$f+p\,f'+p^2\,f''=\sqrt{C}.\sqrt{\theta p},$$
$$f+p'\,f'+p'^2\,f''=\sqrt{C}.\sqrt{\theta p'},$$
$$f+p''f'+p''^2f''=\sqrt{C}.\sqrt{\theta p''},$$
$$f+p'''f'+p'''^2f''=\sqrt{C}.\sqrt{\theta p'''}.$$

En éliminant f, f' et f'', il restera l'équation:

$$0=\frac{\sqrt{(p-a)(p-a')(p-a'')(p-a''')}}{(p-p')(p-p'')(p-p''')}+\frac{\sqrt{(p'-a)(p'-a')(p'-a'')(p'-a''')}}{(p'-p)(p'-p'')(p'-p''')}$$
$$+\frac{\sqrt{(p''-a)(p''-a')(p''-a'')(p''-a''')}}{(p''-p)(p''-p')(p''-p''')}+\frac{\sqrt{(p'''-a)(p'''-a')(p'''-a'')(p'''-a''')}}{(p'''-p)(p'''-p')(p'''-p'')},$$

qui exprime la relation entre a, a', a'', a''', et qui est plus simple que celle trouvée plus haut.

40. Supposons maintenant que $m=2$. Dans ce cas on peut faire les suppositions suivantes:

$$1)\quad P^2-Q^2R=C(x-a)(x-a')^{2n+3},$$
$$2)\quad P^2-Q^2R=C(x-a)^2(x-a')^{2n+2},$$
$$3)\quad P^2-Q^2R=C(x-a)^3(x-a')^{2n+1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$n+2)\quad P^2-Q^2R=C(x-a)^{n+2}.(x-a')^{n+2}.$$

Dans tous ces cas les équations (7) deviennent

$$k+k'a+a^2=-A\mu\,(a-a').\sqrt{\varphi a},$$
$$k+k'a'+a'^2=-A\mu'(a'-a).\sqrt{\varphi a'},$$

d'où l'on tire

$$k'=-(a+a')-A(\mu\sqrt{\varphi a}+\mu'\sqrt{\varphi a'}),$$
$$k=aa'+A(a'\mu\sqrt{\varphi a}+a\mu'\sqrt{\varphi a'}).$$

Les autres coefficiens se déterminent par l'équation (5). Je vais les évaluer dans les cas où $n=0$ et $n=1$.

1. Lorsque $n=0$, on peut faire

$$a)\quad P^2-R=C(x-a)(x-a')^3,$$
$$b)\quad P^2-R=C(x-a)^2(x-a')^2.$$

a) Si $P^2-R=C(x-a)(x-a')^3$. Dans ce cas l'équation (5) donne

$$Fa=\sqrt{\varphi a},$$
$$Fa'=\sqrt{\varphi a'},$$
$$d(Fa')=\tfrac{1}{2}\frac{d\,\varphi a'}{\sqrt{\varphi a'}},$$
$$d^2(Fa')=\tfrac{1}{2}\frac{d^2\varphi a'}{\sqrt{\varphi a'}}-\tfrac{1}{4}\frac{(d\,\varphi a')^2}{\sqrt{(\varphi a')^3}},$$

ou bien

$$f+f'a+f''a^2=\sqrt{\varphi a},$$
$$f+f'a'+f''a'^2=\sqrt{\varphi a'},$$
$$f'+2f''a'=\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\varphi' a'}{\sqrt{\varphi a'}},$$
$$2f''=\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\varphi'' a'}{\sqrt{\varphi a'}}-\tfrac{1}{4}\cdot\frac{(\varphi' a')^2}{\sqrt{(\varphi a')^3}};$$

donc

$$f''=\tfrac{1}{8}\cdot\frac{2\,\varphi a'.\varphi'' a'-(\varphi' a')^2}{\varphi a'\sqrt{\varphi a'}},$$
$$f'=\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\varphi' a'}{\sqrt{\varphi a'}}-\frac{a'}{4}\cdot\frac{2\varphi a'.\varphi'' a'-(\varphi' a')^2}{\varphi a'\sqrt{\varphi a'}},$$
$$f=\sqrt{\varphi a}-\frac{a'}{2}\cdot\frac{\varphi' a'}{\sqrt{\varphi a'}}+\frac{a'^2}{8}\cdot\frac{2\,\varphi a'.\varphi'' a'-(\varphi' a')^2}{\varphi a'\sqrt{\varphi a'}},$$

et la relation entre a et a' devient

$$\sqrt{\varphi a}-\sqrt{\varphi a'}-\tfrac{1}{2}(a-a')\frac{\varphi' a'}{\sqrt{\varphi a'}}-\tfrac{1}{8}(a-a')^2\frac{2\varphi a'.\varphi'' a'-(\varphi' a')^2}{\varphi a'\sqrt{\varphi a'}}=0,$$

ou

$$\sqrt{\varphi a}.\sqrt{\varphi a'}=\varphi a'+\tfrac{1}{2}(a-a')\varphi' a'+\tfrac{1}{8}(a-a')^2\frac{2\varphi a'.\varphi'' a'-(\varphi' a')^2}{\varphi a'}.$$

On aura ensuite A par l'équation

$$A=-\frac{1}{(a+3a')f''+2f'}.$$

41. On peut aussi trouver ces équations de la manière suivante. On a

$$P=\sqrt{R}+C(x-a)(x-a')^3.$$

Soit

$$R=(x-p)(x-p')(x-p'')(x-p''');$$

si nous faisons $x=p,\ p',\ p'',\ p'''$, nous aurons

$$f+f'p\ \ +f''p^2\ \ =\sqrt{C}.\sqrt{(p-a)(p-a')}.(p-a'),$$
$$f+f'p'\ +f''p'^2\ =\sqrt{C}.\sqrt{(p'-a)(p'-a')}.(p'-a'),$$
$$f+f'p''\ +f''p''^2=\sqrt{C}.\sqrt{(p''-a)(p''-a')}.(p''-a'),$$
$$f+f'p'''+f''p'''^2=\sqrt{C}.\sqrt{(p'''-a)(p'''-a')}.(p'''-a').$$

En éliminant f, f' et f'', on aura entre a et a' la relation suivante:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{(p-a')\sqrt{(p-a)(p-a')}}{(p-p')(p-p'')(p-p''')}+\dfrac{(p'-a')\sqrt{(p'-a)(p'-a')}}{(p'-p)(p'-p'')(p'-p''')}\\ +\dfrac{(p''-a')\sqrt{(p''-a)(p''-a')}}{(p''-p)(p''-p')(p''-p''')}+\dfrac{(p'''-a')\sqrt{(p'''-a)(p'''-a')}}{(p'''-p)(p'''-p')(p'''-p'')}\end{array}\right\}=0.$$

b) Si $P^2-R=C(x-a)^2(x-a')^2$. Dans ce cas l'équation (5) donne

$$f+f'a+f''a^2=\sqrt{\varphi a},$$
$$f+f'a'+f''a'^2=\sqrt{\varphi a'},$$
$$f'+2f''a=\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\varphi' a}{\sqrt{\varphi a}},$$
$$f'+2f''a'=\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\varphi' a'}{\sqrt{\varphi a'}}.$$

Des deux dernières équations on tire

$$f''=\tfrac{1}{4}\cdot\frac{\varphi' a}{(a-a')\sqrt{\varphi a}}+\tfrac{1}{4}\cdot\frac{\varphi' a'}{(a'-a)\sqrt{\varphi a'}},$$
$$f'=\tfrac{1}{2}\cdot\frac{a'\cdot\varphi' a}{(a'-a)\sqrt{\varphi a}}+\tfrac{1}{2}\cdot\frac{a\varphi'.a'}{(a-a')\sqrt{\varphi a'}}.$$

En substituant ces valeurs dans les deux premières équations, on en tirera

$$f=\tfrac{1}{4}\cdot\frac{aa'}{a-a'}\cdot\frac{\varphi' a}{\sqrt{\varphi a}}+\tfrac{1}{4}\cdot\frac{aa'}{a'-a}\cdot\frac{\varphi' a'}{\sqrt{\varphi a'}}-\frac{a'\sqrt{\varphi a}-a\sqrt{\varphi a'}}{a-a'},$$

et

$$\sqrt{\varphi a}-\sqrt{\varphi a'}-\tfrac{1}{4}(a-a')\left(\frac{\varphi' a}{\sqrt{\varphi a}}+\frac{\varphi' a'}{\sqrt{\varphi a'}}\right)=0.$$

On a ensuite

$$A=-\frac{1}{2(a+a')f''+2f'}=-\frac{2}{\frac{\varphi' a}{\sqrt{\varphi a}}+\frac{\varphi' a'}{\sqrt{\varphi a'}}}.$$

En substituant ces valeurs dans les expressions de k et k', on obtiendra:

$$k=aa'-4\frac{a'\sqrt{\varphi a}+a\sqrt{\varphi a'}}{\frac{\varphi' a}{\sqrt{\varphi a}}+\frac{\varphi' a'}{\sqrt{\varphi a'}}}=aa'+2b,$$

$$k'=-(a+a')+4\frac{\sqrt{\varphi a}+\sqrt{\varphi a'}}{\frac{\varphi' a}{\sqrt{\varphi a}}+\frac{\varphi' a'}{\sqrt{\varphi a'}}}=-(a+a')+2b'.$$

Par ces valeurs on a

$$\frac{k+k'x+x^2}{(x-a)(x-a')}=\frac{aa'-(a+a')x+x^2+2b+2b'x}{(x-a)(x-a')}$$
$$=1+\frac{2b+2b'x}{(x-a)(x-a')}.$$

Donc on aura

$$\int\frac{dx}{\sqrt{\varphi x}}=-\int\frac{(2b+2b'x)}{(x-a)(x-a')}\cdot\frac{dx}{\sqrt{\varphi x}}+A.\log\frac{P+\sqrt{\varphi x}}{P-\sqrt{\varphi x}}.$$

La relation entre a et a' peut aussi s'exprimer de la manière suivante:

$$-\frac{(p-a)(p-a')}{(p-p')(p-p'')(p-p''')}+\frac{(p'-a)(p'-a')}{(p'-p)(p'-p'')(p'-p''')}-\frac{(p''-a)(p''-a')}{(p''-p)(p''-p')(p''-p''')}-\frac{(p'''-a)(p'''-a')}{(p'''-p)(p'''-p')(p'''-p'')}=0,$$

ou

$$(p+p'-p''-p''')aa'-(pp'-p''p''')(a+a')+pp'(p''+p''')-p''p'''(p+p')=0,$$

d'où l'on tire

$$a'=\frac{(pp'-p''p''')a+(p+p')p''p'''-(p''+p''')pp'}{(p+p'-p''-p''')a-pp'+p''p'''}.$$

42. Supposons maintenant que

$$P^2-R=C(x-p)(x-a)(x-a')^2,$$

$x-p$ étant facteur de R. On a donc

$$P=(x-p)(f+f'x),$$

donc

$$(f+f'x)^2=\frac{(x-p')(x-p'')(x-p''')}{x-p}+C.\frac{(x-a)(x-a')^2}{x-p}.$$

Faisons $x=p'\ p'',\ p'''$, on aura

$$f+f'p'=\frac{(p'-a')}{\sqrt{p'-p}}\sqrt{C}.\sqrt{p'-a},$$

$$f+f'p''=\frac{p''-a'}{\sqrt{p''-p}}\sqrt{C}.\sqrt{p''-a},$$

$$f+f'p'''=\frac{p'''-a'}{\sqrt{p'''-p}}\sqrt{C}.\sqrt{p'''-a}.$$

En éliminant f et f', on aura

$$\frac{(p'-a')\sqrt{p'-a}}{(p'-p'')(p'-p''')\sqrt{p'-p}}+\frac{(p''-a')\sqrt{p''-a}}{(p''-p')(p''-p''')\sqrt{p''-p}}+\frac{(p'''-a')\sqrt{p'''-a}}{(p'''-p')(p'''-p'')\sqrt{p'''-p}}=0,$$

d'où l'on tirera

$$a'=\frac{Bp'\sqrt{p'-a}+B'p''\sqrt{p''-a}+B''p'''\sqrt{p'''-a}}{B\sqrt{p'-a}+B'\sqrt{p''-a}+B''\sqrt{p'''-a}},$$

en faisant pour abréger

$$B = \frac{1}{(p'-p'')(p'-p''')\cdot\sqrt{p'-p}}, \quad B' = \frac{1}{(p''-p')(p''-p''')\cdot\sqrt{p''-p}},$$

$$B'' = \frac{1}{(p'''-p')(p'''-p'')\sqrt{p'''-p}}.$$

43. Dans les trois numéros précédens nous avons considéré le cas où $m=2$. Supposons maintenant $m=1$. Dans ce cas on a

$$P^2 - Q^2R = C(x-a)^{2n+4},$$

$$\int \frac{x+k}{x-a}\cdot\frac{dx}{\sqrt{R}} = A\cdot\log\frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}}.$$

k se détermine immédiatement par l'équation (7), qui donne

$$k = -a - \mu A\cdot\sqrt{\varphi a}.$$

Les quantités A, a, f, f', etc. e, e' e'', etc. se déterminent par l'équation (5), qui donne les suivantes:

$$Fa = fa\cdot\sqrt{\varphi a},$$

$$dFa = dfa\cdot\sqrt{\varphi a} + fa\cdot d\sqrt{\varphi a},$$

$$d^2Fa = d^2fa\cdot\sqrt{\varphi a} + 2dfa\cdot d\sqrt{\varphi a} + fa\cdot d^2\sqrt{\varphi a},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$d^{2n+3}Fa = d^{2n+3}fa\cdot\sqrt{\varphi a} + (2n+3)d^{2n+2}fa\cdot d\sqrt{\varphi a} + \frac{(2n+3)(2n+2)}{2}\cdot d^{2n+1}fa\cdot d^2\sqrt{\varphi a} + \cdots$$

Par ces équations, qui sont toutes linéaires par rapport à f, f', f'', etc. e, e', e'' etc., on peut déterminer ces quantités et a, mais par des calculs assez longs. Je donnerai dans la suite une méthode sûre et directe de déterminer ces quantités dans tous les cas. Pour le moment je vais résoudre le problème en supposant

$$Q=1, \text{ et } P^2 - R = C(x-p)(x-a)^3,$$

$x-p$ étant facteur de R, et $R=(x-p)(x-p')(x-p'')(x-p''')$. Soit

$$P = (x-p)(f+f'x),$$

d'où

$$(f+f'x)^2 = \frac{(x-p')(x-p'')(x-p''')}{x-p} + C\frac{(x-a)^3}{x-p}.$$

En faisant successivement $x = p', p'', p'''$, il viendra

$$f + f'p' = \sqrt{C}.(p'-a)\sqrt{\frac{p'-a}{p'-p}},$$

$$f + f'p'' = \sqrt{C}.(p''-a)\sqrt{\frac{p''-a}{p''-p}},$$

$$f + f'p''' = \sqrt{C}.(p'''-a)\sqrt{\frac{p'''-a}{p'''-p}}.$$

On a de plus, en faisant $x = 0$,

$$f^2 = \frac{p'p''p'''}{p} + \frac{C.a^3}{p}.$$

En éliminant f et f' entre les trois premières équations il viendra

$$\frac{(p'-a)\sqrt{\frac{p'-a}{p'-p}}}{(p'-p'')(p'-p''')} + \frac{(p''-a)\sqrt{\frac{p''-a}{p''-p}}}{(p''-p')(p''-p''')} + \frac{(p'''-a)\sqrt{\frac{p'''-a}{p'''-p}}}{(p'''-p')(p'''-p'')} = 0.$$

De cette équation on peut tirer la valeur de a, et celle-ci étant connue, on aura aisément les valeurs de f, f' et C, que je me dispenserai d'écrire.

44. De l'équation $\int \frac{x+k}{x-a} \cdot \frac{dx}{\sqrt{R}} = A.\log \frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}}$ on tire, en substituant la valeur de $k = -a - \mu A\sqrt{\varphi a}$,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{R}} - \mu A\sqrt{\varphi a}\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}} = A.\log \frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}};$$

donc

$$\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}} = \frac{1}{\mu A\sqrt{\varphi a}}.\int \frac{dx}{\sqrt{R}} - \frac{1}{\mu\sqrt{\varphi a}}.\log \frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}}.$$

De cette manière on trouvera donc toutes les intégrales de la forme $\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$ qui peuvent se réduire à l'intégrale $\int \frac{dx}{\sqrt{R}}$ à l'aide d'une fonction logarithmique de la forme $A.\log \frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}}$. Je donnerai dans la suite la résolution de ce problème dans toute sa généralité. Elle dépend, comme nous venons de le voir, de la résolution de l'équation

$$P^2 - Q^2R = C(x-a)^{2n+4}.$$

Pour le moment je remarque qu'on peut lui donner la forme

$$P'^2 - Q'^2.R' = C.$$

En effet, soit

$$P = f_1 + f_1'(x-a) + f_1''(x-a)^2 + \cdots,$$
$$Q = e_1 + e_1'(x-a) + e_1''(x-a)^2 + \cdots,$$
$$R = \alpha' + \beta'(x-a) + \gamma'(x-a)^2 + \delta'(x-a)^3 + \varepsilon'(x-a)^4,$$

et faisons $y = \frac{1}{x-a}$, on aura, $x - a = \frac{1}{y}$; donc

$$P = f_1 + f_1'\frac{1}{y} + f_1''\frac{1}{y^2} + \cdots = \frac{P'}{y^{n+2}},$$
$$Q = e_1 + e_1'\frac{1}{y} + e_1''\frac{1}{y^2} + \cdots = \frac{Q'}{y^n},$$
$$R = \alpha' + \frac{\beta'}{y} + \frac{\gamma'}{y^2} + \frac{\delta'}{y^3} + \frac{\varepsilon'}{y^4} = \frac{R'}{y^4},$$

et en substituant et multipliant par y^{2n+4},

$$P'^2 - Q'^2 R' = C.$$

Donc si l'on peut résoudre cette équation, on peut aussi résoudre la proposée.

La résolution de l'équation précédente sera donnée dans le cours du problème suivant, qui consiste à déterminer k et R de la manière que l'intégrale $\int \frac{(x+k)\,dx}{\sqrt{R}}$ devienne intégrable par la fonction logarithmique $A.\log\frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}}$.

45. Nous avons vu, dans ce qui précède, que si l'on a

$$\int \frac{x^m + k^{(m-1)}x^{m-1} + \cdots + k'x + k}{(x-a)(x-a')\ldots(x-a^{(m-1)})}\cdot\frac{dx}{\sqrt{R}} = A.\log\frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}},$$

il en résulte nécessairement $m+1$ conditions entre les $2m$ quantités $a, a', a'', \ldots a^{(m-1)}, k, k' \ldots k^{(m-1)}$; on peut donc prendre $m-1$, mais non pas un plus grand nombre de ces quantités, à volonté, et puis déterminer les autres. Il suit de là qu'on peut faire

$$\frac{x^m + k^{(m-1)}x^{m-1} + \cdots + k'x + k}{(x-a)(x-a')\ldots(x-a^{(m-1)})} = \frac{x^n + k_1^{(n-1)}x^{n-1} + \cdots + k_1'x + k_1}{(x-a)(x-a')\ldots(x-a^{(n-1)})}$$
$$+ \frac{L}{x-c} + \frac{L'}{x-c'} + \cdots + \frac{L^{(n-1)}}{x-c^{(n-1)}} + \frac{L^{(n)}}{x-c^{(n)}},$$

$k_1^{(n-1)}, k_1^{(n-2)}, \ldots k_1', k_1, a, a', a'', \ldots a^{(n-1)}$ étant quelconques, d'où il résulte qu'on peut exprimer l'intégrale

$$\int \frac{x^n + k_1^{(n-1)}x^{n-1} + \cdots + k_1'x + k_1}{(x-a)(x-a')\ldots(x-a^{(n-1)})}\cdot\frac{dx}{\sqrt{R}}$$

par $n+1$ intégrales de la forme $\int \frac{dx}{(x-c)\sqrt{R}}$.

On voit de même qu'on peut exprimer l'intégrale $\int \frac{dx}{\sqrt{R}}$ par n intégrales de la forme $\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$, dont $n-1$ sont arbitraires par rapport à a.

Problème III.

Trouver toutes les intégrales de la forme $\int \frac{(k+x)\,dx}{\sqrt{R}}$ *qui peuvent être exprimées par la fonction* $A.\log \frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}}$.

46. Puisque $\int \frac{(x+k)\,dx}{\sqrt{R}} = A.\log \frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}}$, on aura en différentiant

$$x+k=\frac{M}{N},\quad M=A\frac{\left(2N\frac{dP}{dx}-P\frac{dN}{dx}\right)}{Q},$$

$$N=P^2-Q^2R.$$

Pour que l'équation $\frac{M}{N}=x+k$ puisse avoir lieu, il faut que $N=\text{const.}=c$; on a donc les deux équations:

$$c(x+k)=2Ac\frac{dP}{Q.dx},$$

$$c=P^2-Q^2R;$$

ou bien en supposant $c=1$,

$$x+k=2A\frac{dP}{Q.dx},$$

$$1=P^2-Q^2R.$$

La première équation n'a aucune difficulté. Elle donne aisément les valeurs de A et k, quand P et Q sont connus. En effet, soit

$$P=f+f'x+\cdots+f^{(n+2)}x^{n+2},$$

$$Q=e+e'x+\cdots+e^{(n)}x^n,$$

on a en substituant

$$x+k=2A\frac{(n+2)f^{(n+2)}x^{n+1}+(n+1)f^{(n+1)}x^{n}+\cdots}{e^{(n)}x^{n}+e^{(n-1)}x^{n-1}+\cdots},$$

d'où l'on tire

$$1=\frac{2A(n+2)f^{(n+2)}}{e^{(n)}},$$

$$k=\frac{2Af'}{e};$$

donc

$$(1)\qquad \begin{cases} A=\dfrac{e^{(n)}}{(2n+4)f^{(n+2)}} \\ k=\dfrac{f'e^{(n)}}{(n+2)ef^{(n+2)}}. \end{cases}$$

Considérons maintenant l'équation

$$P^2-Q^2R=1,$$

et cherchons à trouver les valeurs de P et Q.

Première méthode.

47. La méthode la plus simple qui s'offre est celle des coefficiens indéterminés. Substituant les valeurs de P et Q on obtiendra

$$(f+f'x+f''x^2+\cdots+f^{(n+2)}x^{n+2})^2$$
$$-(e+e'x+\cdots+e^{(n)}x^n)^2(\alpha+\beta x+\cdots+\varepsilon x^4)=1.$$

En développant et comparant les coefficiens, on aura les équations suivantes au nombre de $2n+5$:

$$f^2-\alpha e^2=1,$$

$$(2)\qquad \left.\begin{array}{l} \quad ff^{(p)}+f'f^{(p-1)}+f''f^{(p-2)}+f'''f^{(p-3)}+\cdots \\ -\alpha(ee^{(p)}\quad+e'e^{(p-1)}+e''e^{(p-2)}+\cdots) \\ -\beta(ee^{(p-1)}+e'e^{(p-2)}+e''e^{(p-3)}+\cdots) \\ -\gamma(ee^{(p-2)}+e'e^{(p-3)}+e''e^{(p-4)}+\cdots) \\ -\delta(ee^{(p-3)}+e'e^{(p-4)}+e''e^{(p-5)}+\cdots) \\ -\varepsilon(ee^{(p-4)}+e'e^{(p-5)}+e''e^{(p-6)}+\cdots) \end{array}\right\}=0.$$

En faisant dans cette équation successivement $p=1,\ 2,\ 3$, etc. jusqu'à $2n+4$, on aura les équations nécessaires pour satisfaire à l'équation $P^2-Q^2R=1$. Ayant $2n+5$ équations mais seulement $2n+4$ coefficiens

indéterminés, il est clair qu'on obtiendra une relation entre les cinq quantités α, β, γ, δ, ε.

En faisant dans l'équation (2) $p = 2n + 4$, on obtiendra

$$f^{(n+2)2} - \varepsilon e^{(n)2} = 0,$$

donc

$$f^{(n+2)} = e^{(n)} \sqrt{\varepsilon}.$$

En substituant cette valeur dans les expressions de A et de k, elles deviennent

$$(3) \quad \begin{cases} A = \dfrac{1}{(2n+4)\sqrt{\varepsilon}}, \\ k = \dfrac{1}{(n+2)\sqrt{\varepsilon}} \cdot \dfrac{f'}{e}. \end{cases}$$

48. Avant d'aller plus loin je vais appliquer la méthode précédente en supposant $n = 0$. On a dans ce cas $Q = e$, $P = f + f'x + f''x^2$. Les équations (2) deviennent donc

$$\begin{aligned} f^2 - \alpha e^2 &= 1, \\ 2ff' - \beta e^2 &= 0, \\ f'^2 + 2ff'' - \gamma e^2 &= 0, \\ 2f'f'' - \delta e^2 &= 0, \\ f''^2 - \varepsilon e^2 &= 0. \end{aligned}$$

On tire de ces équations

$$f'' = e\sqrt{\varepsilon} = \frac{\delta\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\beta^2\varepsilon - \alpha\delta^2}},$$

$$f' = \frac{\delta e}{2\sqrt{\varepsilon}} = \frac{\delta^2}{2\sqrt{\beta^2\varepsilon^2 - \alpha\varepsilon\delta^2}},$$

$$f = \frac{\beta e}{\delta}\sqrt{\varepsilon} = \frac{\beta\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\beta^2\varepsilon - \alpha\delta^2}},$$

$$e = \frac{\delta}{\sqrt{\beta^2\varepsilon - \alpha\delta^2}}.$$

En substituant ces valeurs dans l'équation $f'^2 + 2ff'' - \gamma e^2 = 0$, il viendra

$$\frac{\delta^2}{4\varepsilon} + \frac{2\beta\varepsilon}{\delta} - \gamma = 0, \quad \gamma = \frac{\delta^2}{4\varepsilon} + \frac{2\beta\varepsilon}{\delta}.$$

Celle-ci est donc la relation qui doit avoir lieu entre les quantités β, γ, δ et ε. Il est remarquable que α ne s'y trouve point.

Par les équations (3) on a ensuite

$$A=\frac{1}{4\sqrt{\varepsilon}}, \quad k=\frac{\delta}{4\varepsilon}.$$

On a donc

$$\int\frac{\left(x+\frac{\delta}{4\varepsilon}\right)dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\left(\frac{\delta^2}{4\varepsilon}+2\frac{\beta\varepsilon}{\delta}\right)x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4}}=\frac{1}{4\sqrt{\varepsilon}}\log\frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}}.$$

Au reste cette intégrale est facile à trouver; car en faisant $x+\frac{\delta}{4\varepsilon}=y$, on aura

$$\int\frac{ydy}{\sqrt{\alpha^1+\gamma^1y^2+\varepsilon y^4}},$$

intégrale facile à trouver par les méthodes connues.

49. Les équations (2) ont l'inconvénient de ne pas être linéaires. On peut trouver un système d'équations linéaires qui les remplacent de la manière suivante. En mettant $\frac{1}{y}$ au lieu de x dans l'équation

$$P^2-Q^2R=1,$$

on obtiendra une équation de la forme

$$(Fy)^2-(fy)^2\varphi y=y^{2n+4},$$

dans laquelle

$$\begin{aligned}Fy&=fy^{n+2}+f'y^{n+1}+\cdots+f^{(n+2)},\\ fy&=ey^n+e'y^{n-1}+\cdots+e^{(n)},\\ \varphi y&=\alpha y^4+\beta y^3+\gamma y^2+\delta y+\varepsilon.\end{aligned}$$

Il est clair que l'équation

$$Fy=fy.\sqrt{\varphi y}$$

aura lieu dans la supposition de $y=0$, en la différentiant $2n+3$ fois de suite. On a donc les équations suivantes:

$$\begin{aligned}Fy&=fy.\sqrt{\varphi y},\\ dFy&=dfy.\sqrt{\varphi y}+fy.d\sqrt{\varphi y},\\ d^2Fy&=d^2fy.\sqrt{\varphi y}+2dfy.d\sqrt{\varphi y}+fy.d^2\sqrt{\varphi y},\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ d^{2n+3}Fy&=d^{2n+3}fy.\sqrt{\varphi y}+(2n+3)\,d^{2n+2}fy.d\sqrt{\varphi y}\\ &\quad+\frac{(2n+3)(2n+2)}{2}d^{2n+1}fy.d^2\sqrt{\varphi y}+\cdots\end{aligned}$$

En faisant dans ces équations $y=0$, on aura

$$Fy=f^{(n+2)},$$
$$\frac{dFy}{dy}=f^{(n+1)},$$
$$\frac{d^2Fy}{dy^2}=1.2.f^{(n)},$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{d^pFy}{dy^p}=1.2.3\ldots p.f^{(n+2-p)},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{d^{n+2}Fy}{dy^{n+2}}=1.2.3\ldots(n+2).f,$$
$$\frac{d^{n+2+p}Fy}{dy^{n+p+2}}=0.$$

De même

$$fy=e^{(n)},$$
$$\frac{dfy}{dy}=e^{(n-1)},$$
$$\frac{d^2fy}{dy^2}=1.2.e^{(n-2)},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{d^nfy}{dy^n}=1.2.3\ldots n.e,$$
$$\frac{d^{n+p}fy}{dy^{n+p}}=0,$$
$$\sqrt{\varphi y}=\sqrt{\varepsilon},$$
$$\frac{d\sqrt{\varphi y}}{dy}=\frac{d\varphi y}{2dy.\sqrt{\varphi y}}=\frac{\delta}{2\sqrt{\varepsilon}},$$
$$\frac{d^2\sqrt{\varphi y}}{dy^2}=\frac{d^2\varphi y}{2dy^2.\sqrt{\varphi y}}-\frac{(d\varphi y)^2}{4dy^2\varphi y\sqrt{\varphi y}}=\frac{\gamma}{\sqrt{\varepsilon}}-\frac{\delta^2}{4\varepsilon\sqrt{\varepsilon}},$$
$$\frac{d^3\sqrt{\varphi y}}{dy^3}=\frac{1}{dy^3}\left(\frac{d^3\varphi y}{2\sqrt{\varphi y}}-\frac{3d\varphi y.d^2\varphi y}{4\varphi y\sqrt{\varphi y}}+\frac{3(d\varphi y)^3}{8(\varphi y)^2\sqrt{\varphi y}}\right),$$
$$\frac{d^3\sqrt{\varphi y}}{dy^3}=\frac{3\beta}{\sqrt{\varepsilon}}-\frac{3\gamma\delta}{2\varepsilon\sqrt{\varepsilon}}+\frac{3\delta^3}{8\varepsilon^2\sqrt{\varepsilon}}.$$

De la même manière on trouvera $\frac{d^4\sqrt{\varphi y}}{dy^4}$ etc. en supposant $y=0$. Pour plus de simplicité, je désigne par $c^{(p)}$ la valeur de $\frac{d^p\sqrt{\varphi y}}{dy^p}$ en y faisant $y=0$.

En substituant les valeurs trouvées, on obtiendra les équations suivantes:

$$f^{(n+2)} = ce^{(n)},$$

$$f^{(n+1)} = ce^{(n-1)} + c'e^{(n)},$$

$$f^{(n)} = ce^{(n-2)} + c'e^{(n-1)} + \tfrac{1}{2}c''e^{(n)},$$

$$f^{(n-1)} = ce^{(n-3)} + c'e^{(n-2)} + \tfrac{1}{2}c''e^{(n-1)} + \frac{1}{2.3}c'''e^{(n)},$$

. . . .

$$f^{(n-p+2)} = ce^{(n-p)} + c'e^{(n-p+1)} + \frac{c''}{2}e^{(n-p+2)} + \frac{c'''}{2.3}e^{(n-p+3)} + \cdots$$
$$\cdots + \frac{c^{(k)}}{.2.3\ldots k}.e^{(n-p+k)} + \cdots + \frac{c^{(p)}}{.2.3\ldots p}e^{(n)},$$

. . . .

$$f'' = ce + c'e' + \frac{c''}{2}e'' + \frac{c'''}{2.3}e''' + \cdots + \frac{c^{(n)}}{2.3\ldots n}e^{(n)},$$

$$f' = c'e + \frac{c''}{2}e' + \frac{c'''}{2.3}e'' + \cdots + \frac{c^{(n+1)}}{2.3\ldots(n+1)}.e^{(n)},$$

$$f = \frac{c''}{2}e + \frac{c'''}{2.3}e' + \frac{c''''}{2.3.4}e'' + \cdots + \frac{c^{(n+2)}}{2.3\ldots(n+2)}e^{(n)},$$

$$0 = \frac{c'''}{2.3}e + \frac{c''''}{2.3.4}e' + \frac{c'''''}{2.3.4.5}e'' + \cdots + \frac{c^{(n+3)}}{2.3\ldots(n+3)}e^{(n)},$$

$$0 = \frac{c''''}{2.3.4}e + \frac{c'''''}{2.3.4.5}e' + \cdots + \frac{c^{(n+4)}}{2.3\ldots(n+4)}e^{(n)},$$

. . . .

$$0 = \frac{c^{(p)}}{2.3\ldots p}e + \frac{c^{(p+1)}}{2.3\ldots(p+1)}e' + \cdots + \frac{c^{(n+p)}}{2.3\ldots(n+p)}e^{(n)},$$

. . . .

$$0 = \frac{c^{(n+3)}}{2.3\ldots(n+3)}e + \frac{c^{(n+4)}}{2.3\ldots(n+4)}e' + \cdots + \frac{c^{(2n+3)}}{2.3\ldots(2n+3)}e^{(n)}.$$

50. Ces équations sont, comme on le voit, très commodes pour déterminer les coefficiens e, e', e'' etc. et f, f', f'' etc. Les $n+1$ dernières donnent les coefficiens e', e'', ... $e^{(n)}$ en e, et de plus une relation entre les quantités c''', c'''' etc. Les $n+2$ premières donnent ensuite immédiatement les coefficiens f, f', f'' etc. en e. Celui-ci est arbitraire et disparaît du résultat, comme il est aisé de le voir. Si l'on fait $k=0$, on aura $f'=0$, d'où il résultera une seconde relation entre les quantités c', c'' etc. Au reste cette supposition ne diminue pas la généralité du problème; car en faisant dans le résultat $x = y + k$, on aura la même intégrale que si l'on n'avait pas supposé $k=0$. Soit donc $f'=0$, on voit que

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4}}$$

peut s'exprimer par des logarithmes, toutes les fois qu'on a entre les quantités α, β, γ, δ, ε les deux relations qui résultent de l'élimination des quantités e, e', e'' etc. des $n+2$ équations

$$0=c'e+\frac{c''}{2}e'+\cdots+\frac{c^{(n+1)}}{1.2..(n+1)}e^{(n)},$$

$$0=\frac{c'''}{2.3}e+\frac{c''''}{2.3.4}e'+\cdots+\frac{c^{(n+3)}}{1.2...(n+3)}e^{(n)},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$0=\frac{c^{(n+3)}}{2.3...(n+3)}e+\cdots+\frac{c^{(2n+3)}}{1.2.3...(2n+3)}e^{(n)}.$$

51. Appliquons ce qui précède aux cas où $n=0$ et $n=1$. Dans le premier cas on aura

$$f''=ce,\ f'=c'e,\ f=\frac{c''}{2}e,\ 0=c'''.$$

La dernière équation donne

$$0=\frac{3\beta}{\sqrt{\varepsilon}}-\frac{3\gamma\delta}{2\varepsilon\sqrt{\varepsilon}}+\frac{3\delta^3}{8\varepsilon^2\sqrt{\varepsilon}},$$

d'où $\gamma=\frac{2\varepsilon\beta}{\delta}+\frac{\delta^2}{4\varepsilon}$, comme nous avons trouvé plus haut.

Soit maintenant $n=1$. Dans ce cas on a

$$0=c'e+\frac{c''}{2}e',\ \text{d'où}\ 0=2c'\ +c''\frac{e'}{e},$$

$$0=\frac{c'''}{2.3}e+\frac{c''''}{2.3.4}e',\qquad 0=4c'''\ +c''''\frac{e'}{e},$$

$$0=\frac{c''''}{2.3.4}e+\frac{c'''''}{2.3.4.5}e',\qquad 0=5c''''+c'''''\frac{e'}{e}.$$

En éliminant $\frac{e'}{e}$ il viendra:

$$c'c''''\ -2c''c'''\ =0,$$

$$2c'c'''''-5c''c''''=0.$$

De ces deux équations on tirera, en faisant $\varepsilon=1$ et $\beta=-\alpha$, ce qui est permis:

$$\delta=2\ \text{ et }\ \gamma=-3.$$

On a donc

$$R=x^4+2x^3-3x^2-\alpha x+\alpha.$$

On trouvera de même

$$c=1,\ c'=1,\ c''=-4,\ c'''=-3\alpha+12,$$

donc $e'=-\frac{2c'}{c''}e=\frac{1}{2}e=1$, en faisant $e=2$,

$$f'''=e'=1,\ f''=e+e'=3,\ f'=e-2e'=0,$$

$$f=\tfrac{1}{2}c''.e+\frac{1}{2.3}c'''.e'=-\frac{\alpha}{2}-2,\ k=0,\ A=\tfrac{1}{6};$$

donc

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{x^4+2x^3-3x^2-\alpha x+\alpha}}=\tfrac{1}{6}\log\frac{x^3+3x^2-2-\frac{\alpha}{2}+(x+2)\sqrt{x^4+2x^3-3x^2-\alpha x+\alpha}}{x^3+3x^2-2-\frac{\alpha}{2}-(x+2)\sqrt{x^4+2x^3-3x^2-\alpha x+\alpha}}.$$

52. De l'équation $P^2-1=Q^2R$ on tire

$$(P+1)(P-1)=Q^2R=P'^2Q'^2R'R'',$$

en faisant $Q=P'Q'$ et $R=R'R''$. On aura donc

$$P+1=P'^2R',$$
$$P-1=Q'^2R'',$$

d'où l'on tire

$$P=\tfrac{1}{2}(P'^2R'+Q'^2R''),\quad 2=P'^2R'-Q'^2R''.$$

Cette équation est plus simple que l'équation $P^2-Q^2R=1$.

En multipliant par R' on aura

$$(P'R')^2-Q'^2R=2R'.$$

On peut donc mettre $P'R'$ et Q' à la place de P et Q dans l'expression $\log\frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}}$; mais il faut observer que A change de valeur.

Pour montrer l'usage de l'équation

$$2=P'^2R'-Q'^2R'',$$

soit

$$R'=x^2+2qx+p,\quad R''=x^2+2q'x+p',$$

et P' et Q' deux constantes. On aura

$$2=pP'^2-p'Q'^2+2(qP'^2-q'Q'^2)x+(P'^2-Q'^2)x^2,$$

$$P'^2=Q'^2,\ q=q',\ 2=pP'^2-p'Q'^2,$$

$$P'=Q'=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{p-p'}},$$

$$P = P'^2 R' - 1 = \frac{2}{p-p'}(x^2+2qx+p) - 1 = \frac{2x^2+4qx+p+p'}{p-p'},$$

$$Q = P'Q' = P'^2 = \frac{2}{p-p'}, \quad k = \tfrac{1}{2}\frac{f'}{e} = \tfrac{1}{2}\frac{\frac{4q}{p-p'}}{\frac{2}{p-p'}} = q, \quad A = \tfrac{1}{4};$$

donc

$$\int \frac{(x+q)dx}{\sqrt{(x^2+2qx+p)(x^2+2qx+p')}} = \tfrac{1}{4}\log\frac{2x^2+4qx+p+p'+2\sqrt{R}}{2x^2+4qx+p+p'-2\sqrt{R}},$$

ce qu'on peut aisément vérifier en faisant $x+q=y$.

Soit maintenant

$$P' = \frac{x+m}{c}, \quad Q' = \frac{x+m'}{c}.$$

On aura

$$2c^2 = (x^2+2mx+m^2)(x^2+2qx+p) - (x^2+2m'x+m'^2)(x^2+2q'x+p'),$$

d'où l'on tire

$$2c^2 = m^2p - m'^2p',$$
$$0 = m^2q - m'^2q' + mp - m'p',$$
$$0 = p - p' + 4mq - 4m'q' + m^2 - m'^2,$$
$$0 = q - q' + m - m'.$$

Soit $q+q'=r$, on aura

$$2q = r + m' - m,$$
$$2q' = r + m - m',$$
$$p = \tfrac{1}{2}r(3m'-m) + \tfrac{1}{2}m^2 - \tfrac{1}{2}m'^2 - mm',$$
$$p' = \tfrac{1}{2}r(3m-m') + \tfrac{1}{2}m'^2 - \tfrac{1}{2}m^2 - mm',$$
$$2c^2 = \tfrac{1}{2}r(m'-m)^3 + \tfrac{1}{2}(m-m')(m^3 - m^2m' - m'^2m + m'^3).$$

Par là on obtiendra

$$P = P'^2R' - 1 = \frac{(x^2+2mx+m^2)(x^2+2qx+p) - c^2}{c^2},$$

$$Q = P'Q' = \frac{x^2+(m+m')x+mm'}{c^2},$$

donc

$$e = \frac{mm'}{c^2}, \; f' = \frac{2mp+2m^2q}{c^2}, \quad n = 2,$$

d'où

$$k = \frac{1}{(n+2)\sqrt{\varepsilon}} \cdot \frac{f'}{e} = \tfrac{1}{4} \cdot \frac{2mp+2m^2q}{mm'};$$

or

$$2mp = r(3mm' - m^2) + m^3 - m'^2 m - 2m^2 m',$$

$$2m^2 q = rm^2 + m'm^2 - m^3,$$

donc

$$2mp + 2m^2 q = 3rmm' - m'^2 m - m^2 m',$$

$$k = \tfrac{1}{4}(3r - m' - m).$$

L'intégrale cherchée a donc la forme

$$\int \frac{(x+k)\,dx}{\sqrt{R}}.$$

Soit $k=0$, on aura $r = \frac{m+m'}{3}$, donc

$$2q = \tfrac{4}{3}m' - \tfrac{2}{3}m, \quad 2q' = \tfrac{4}{3}m - \tfrac{2}{3}m',$$

d'où

$$m = 2q' + q, \quad m' = 2q + q',$$

$$3m' - m = 5q + q', \quad 3m - m' = 5q' + q,$$

$$\tfrac{1}{2}m^2 = 2q'^2 + 2qq' + \tfrac{1}{2}q^2, \quad \tfrac{1}{2}m'^2 = 2q^2 + 2qq' + \tfrac{1}{2}q'^2,$$

$$mm' = 5qq' + 2q^2 + 2q'^2, \quad r = q + q';$$

donc

$$p = \frac{q+q'}{2}(5q + q') - \tfrac{1}{2}q'^2 - \tfrac{5}{2}q^2 - 5qq',$$

c'est-à-dire

$$p = -q^2 - 2qq';$$

de même

$$p' = -q'^2 - 2qq'.$$

On a donc en substituant

$$R = (x^2 + 2qx - q^2 - 2qq')(x^2 + 2q'x - q'^2 - 2qq'),$$

$$\int \frac{x\,.\,dx}{\sqrt{(x^2 + 2qx - q^2 - 2qq')(x^2 + 2q'x - q'^2 - 2qq')}} = \tfrac{1}{4}\log\frac{P + Q\sqrt{R}}{P - Q\sqrt{R}},$$

où $P = (x^2 + 2qx - q^2 - 2qq')(x + q + 2q')$,

$Q = x + q' + 2q$;

ou bien

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{(x^2 + 2qx - q^2 - 2qq')(x^2 + 2q'x - q'^2 - 2qq')}}$$

$$= \tfrac{1}{4}\log\frac{(x + q + 2q')\sqrt{x^2 + 2qx - q^2 - 2qq'} + (x + q' + 2q)\sqrt{x^2 + 2q'x - q'^2 - 2qq'}}{(x + q + 2q')\sqrt{x^2 + 2qx - q^2 - 2qq'} - (x + q' + 2q)\sqrt{x^2 + 2q'x - q'^2 - 2qq'}}.$$

53. *Seconde méthode.*

Dans ce qui précède nous avons réduit la résolution de l'équation

$$P^2 - Q^2 R = 1$$

à la résolution d'un système d'équations linéaires; mais comme l'élimination des inconnues entre ces équations est assez laborieuse, et qu'on a de la peine à en déduire un résultat général, je vais donner une autre méthode pour la résolution de cette équation, qui n'ait pas les inconvéniens de la précédente, et qui donne une relation générale qui doit avoir lieu entre les quantités constantes dans R, pour que l'équation proposée soit résoluble.

Soit r^2 le plus grand carré parfait contenu dans R, on peut faire

$$R = r^2 + s,$$

où r est du second degré et s du premier. En substituant cette valeur de R dans l'équation proposée, elle deviendra

$$P^2 - Q^2 r^2 - Q^2 s = 1.$$

Il est clair que le premier coefficient de P doit être le même que le premier coefficient de Qr; on peut donc faire

$$P = Qr + Q_1,$$

le degré de Q_1 étant moindre qui celui de P. En substituant cette valeur de P on aura

$$Q_1^2 + 2QQ_1 r - Q^2 s = 1.$$

Soit Q du degré n, il est clair que Q_1 est du degré $n-1$. Soit maintenant v la plus grande fonction entière contenue dans $\frac{r}{s}$, il est clair qu'on a

$$r = sv + u,$$

v étant du premier degré et u une constante. En mettant cette valeur au lieu de r dans l'équation ci-dessus, on obtiendra

$$Q_1^2 + 2QQ_1 u + Qs(2vQ_1 - Q) = 1.$$

On voit sans peine qu'en faisant

$$Q = 2vQ_1 + Q_2,$$

le degré de Q_2 devient moindre que celui de Q.

En substituant on aura

$$(1 + 4uv)Q_1^2 + 2Q_1 Q_2(u - sv) - sQ_2^2 = 1,$$

ou bien

$$s_1 Q_1^2 - 2r_1 Q_1 Q_2 - s Q_2^2 = 1,$$

en faisant

$$s_1 = 1 + 4uv, \quad r_1 = r - 2u.$$

Puisque le degré de Q_2 est moindre que n, il est aisé de voir que Q_2 est du degré $n-2$.

Cela posé, soit

$$r_1 = s_1 v_1 + u_1,$$

u_1 étant une constante, on aura

$$s_1 Q_1 (Q_1 - 2v_1 Q_2) - 2Q_1 Q_2 u_1 - s Q_2^2 = 1;$$

donc en faisant

$$Q_1 = 2v_1 Q_2 + Q_3,$$

Q_3 sera d'un degré moindre que celui de Q_1. En substituant on aura

$$s_1 Q_3^2 + 2r_2 Q_2 Q_3 - s_2 Q_2^2 = 1,$$

en faisant $s_2 = s + 4u_1 v_1$, $r_2 = r_1 - 2u_1$, Q_3 étant du degré $n-3$.

Cette équation est semblable à la précédente, d'où il suit qu'on peut la réduire de la même manière à l'équation

$$s_3 Q_3^2 - 2r_3 Q_3 Q_4 - s_2 Q_4^2 = 1,$$

dans laquelle on a

$$r_2 = v_2 s_2 + u_2, \quad u_2 \text{ étant constant},$$

$$Q_2 = 2v_2 Q_3 + Q_4, \quad Q_4 \text{ étant du degré } n-4,$$

$$s_3 = s_1 + 4u_2 v_2,$$

$$r_3 = r_2 - 2u_2.$$

En réduisant cette équation de la même manière, et ainsi de suite, on parviendra enfin à une équation qui, dans le cas où n est un nombre pair 2α, sera de la forme:

$$s_{2\alpha-1} Q_{2\alpha+1}^2 + 2r_{2\alpha} Q_{2\alpha} Q_{2\alpha+1} - s_{2\alpha} Q_{2\alpha}^2 = 1;$$

si n est un nombre impair $2\alpha'+1$, elle sera de la forme:

$$s_{2\alpha'+1} Q_{2\alpha'+1}^2 - 2r_{2\alpha'+1} Q_{2\alpha'+1} Q_{2\alpha'+2} - s_{2\alpha'} Q_{2\alpha'+2}^2 = 1.$$

$Q_{2\alpha+1}$ est d'un degré moindre que celui de $Q_{2\alpha}$, et $Q_{2\alpha'+2}$ est d'un degré moindre que celui de $Q_{2\alpha'+1}$. Maintenant $Q_{2\alpha}$ est du degré $n - 2\alpha = 0$, donc $Q_{2\alpha}$ est une quantité constante; donc $Q_{2\alpha+1} = 0$; on a donc

$$-s_{2\alpha} Q_{2\alpha}^2 = 1.$$

Si $n = 2\alpha' + 1$, on aura de même

$$s_{2\alpha'+1} Q^2_{2\alpha'+1} = 1;$$

donc en général

$$s_n Q^2_n = (-1)^{n+1},$$

Q_n étant une quantité constante. De là il suit aussi que s_n est une quantité constante. Donc

"Toutes les fois que l'équation

$$P^2 - Q^2 R = 1$$

est résoluble en fonctions entières, il faut que l'une des quantités

$$s,\ s_1,\ s_2,\ s_3,\ s_4,\ \text{etc.}$$

soit constante, et réciproquement. De plus, si s_n est la première des quantités s, s_1, s_2, etc. qui est constante, P est du degré $n+2$ et Q du degré n".

Il suit de là que pour trouver toutes les valeurs que R peut avoir, il faut faire successivement s, s_1, s_2, s_3, etc. égal à une quantité constante.

54. Il s'agit maintenant de déterminer les quantités s_1, s_2, s_3 etc. r_1, r_2, r_3, etc. v_1, v_2, v_3, etc. u_1, u_2, u_3, etc. Les équations desquelles on doit les déduire, ont, comme on le voit par ce qui précède, les formes suivantes:

(1) $$s_m = s_{m-2} + 4u_{m-1} v_{m-1},$$

(2) $$r_m = r_{m-1} - 2u_{m-1},$$

(3) $$r_m = s_m v_m + u_m.$$

On peut de ces équations en déduire une autre qui est de la plus grande utilité dans cette recherche.

En multipliant la première des équations précédentes par s_{m-1}, on aura

$$s_{m-1} s_m = s_{m-2} s_{m-1} + 4u_{m-1} v_{m-1} s_{m-1}.$$

De la seconde équation on tire

$$2u_{m-1} = r_{m-1} - r_m;$$

donc en substituant

$$s_{m-1} s_m = s_{m-2} s_{m-1} + (r_{m-1} - r_m) 2v_{m-1} s_{m-1}.$$

De l'équation (3) on tire en mettant $m-1$ au lieu de m, et en multipliant par 2,

$$2r_{m-1} = 2s_{m-1} v_{m-1} + 2u_{m-1}.$$

En ajoutant cette équation à l'équation (2), on aura

$$2v_{m-1} s_{m-1} = r_{m-1} + r_m.$$

On aura donc

$$s_{m-1}s_m = s_{m-1}s_{m-2} + (r_{m-1}+r_m)(r_{m-1}-r_m);$$

c'est-à-dire

$$s_{m-1}s_m + r_m^2 = s_{m-1}s_{m-2} + r_{m-1}^2.$$

Il suit de là que la quantité

$$s_{m-1}s_m + r_m^2$$

est indépendante de m; donc on aura

$$s_{m-1}s_m + r_m^2 = ss_1 + r_1^2;$$

mais $s_1 = 1 + 4uv$, et $r_1 = r - 2u$; donc

$$ss_1 + r_1^2 = s + r^2 + 4u(vs - r + u);$$

mais $vs = r - u$, donc

$$ss_1 + r_1^2 = r^2 + s = R.$$

Donc on aura quel que soit m

(4) $$s_{m-1}s_m + r_m^2 = r^2 + s = R,$$

ce qui est bien remarquable.

55. Faisons dans l'équation précédente $m = n$, on aura

$$\mu \cdot s_{n-1} + r_n^2 = r^2 + s,$$

en supposant $s_n = \text{const.} = \mu$. De cette équation on tire

$$r_n = r, \quad s_{n-1} = \frac{s}{\mu}.$$

On a de même

$$s_{n-1} \cdot s_{n-2} + r_{n-1}^2 = r_1^2 + ss_1 = r^2 + s;$$

donc

$$\frac{s}{\mu}(s_{n-2} - \mu s_1) = r_1^2 - r_{n-1}^2;$$

donc

$$s_{n-2} = \mu s_1, \quad \text{si} \quad r_{n-1} = r_1.$$

Cela a effectivement lieu, car on a

$$r_n = s_n v_n + u_n = \mu v_n + u_n,$$

d'où

$$v_n = \frac{r_n}{\mu}, \quad \text{et} \quad u_n = 0.$$

Maintenant

$$r_{n-1} = s_{n-1}v_{n-1} + u_{n-1} = \frac{s}{\mu}v_{n-1} + u_{n-1},$$

or $r_{n-1} = r_n + 2u_{n-1} = r + 2u_{n-1}$, donc

$$r = \frac{s}{\mu} v_{n-1} - u_{n-1};$$

mais $r = sv + u$, donc

$$v_{n-1} = \mu v, \quad u_{n-1} = -u,$$

donc

$$r_{n-1} = sv - u = r - 2u = r_1,$$

et par conséquent

$$s_{n-2} = \mu s_1.$$

On démontre de la même manière que

$$r_{n-k} = r_k,$$
$$s_{n-k} = s_{k-1} \mu^{\pm 1},$$
$$v_{n-k} = v_{k-1} \mu^{\mp 1},$$
$$u_{n-k} = -u_{k-1}.$$

Le signe supérieur a lieu si k est pair, et l'inférieur si k est impair.

Soit n un nombre impair $2\alpha + 1$, on aura, en faisant $k = \alpha + 1$,

$$r_\alpha = r_{\alpha+1},$$
$$s_\alpha = s_\alpha \mu^{\pm 1},$$
$$v_\alpha = v_\alpha \mu^{\mp 1},$$
$$u_\alpha = -u_\alpha,$$

donc $\mu = 1$. Donc, si n est un nombre impair, on a

$$s_{n-k} = s_{k-1},$$
$$v_{n-k} = v_{k-1}.$$

On a aussi $u_\alpha = 0$. Donc:

> "Toutes les fois que l'équation $P^2 - Q^2 R = 1$ est résoluble en supposant Q une fonction d'un degré impair $2\alpha + 1$, on a $u_\alpha = 0$".

L'inverse a aussi lieu, ce qu'il est aisé de voir.

Lorsque n est un nombre pair 2α, on a

$$u_{\alpha-1} + u_\alpha = 0$$

pour condition de la résolubilité de l'équation $P^2 - Q^2 R = 1$. On voit aisément que ces conditions sont bien plus simples que la condition mentionnée plus haut que s_n doit être une quantité constante.

56. Connaissant la valeur de Q_n par l'équation

$$s_n Q_n^2 = (-1)^{n+1},$$

on aura les valeurs de P et Q par les équations suivantes:

$$Q_{n-1} = 2v_{n-1} Q_n,$$
$$Q_{n-2} = 2v_{n-2} Q_{n-1} + Q_n,$$
$$Q_{n-3} = 2v_{n-3} Q_{n-2} + Q_{n-1},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$Q_1 = 2v_1 Q_2 + Q_3,$$
$$Q = 2v Q_1 + Q_2,$$
$$P = rQ + Q_1.$$

La forme de ces équations conduit à exprimer la quantité $\frac{P}{Q}$ par une fraction continue.

En effet il est aisé de voir qu'on a

$$\frac{P}{Q} = r + \cfrac{1}{2v + \cfrac{1}{2v_1 + \cfrac{1}{2v_2 + \cfrac{1}{2v_3 + \cdots + \cfrac{1}{2v_{n-2} + \cfrac{1}{2v_{n-1}}}}}}}.$$

On a donc P et Q en transformant cette fraction en fraction ordinaire.

De cette expression on peut aussi déduire la valeur de $\sqrt{R}$ en fraction continue. En effet, en posant n infini, on a $\frac{P}{Q} = \sqrt{R}$, donc

$$\sqrt{R} = r + \cfrac{1}{2v + \cfrac{1}{2v_1 + \cfrac{1}{2v_2 + \cfrac{1}{2v_3 + \cdots}}}}$$

Dans le cas où l'équation $P^2 - Q^2 R = 1$ est résoluble, cette fraction prend une forme remarquable, car elle devient dans ce cas périodique; ce dont il est aisé de se convaincre par ce qu'on a vu précédemment.

On voit aussi que si Q est du degré n, les quantités v, v_1, v_2, v_3 etc. sont du premier degré, excepté

$$v_n,\ v_{2n+1},\ v_{3n+2},\ \ldots\ v_{kn-k+1}\ \text{etc.},$$

qui sont toutes du second degré. En effet

$$v_n = v_{3n+2} = \cdots = v_{(2k+1)n+2k} = \frac{r}{\mu},$$
$$v_{2n+1} = v_{4n+3} = \cdots = v_{2kn+2k-1} = r.$$

57. Je vais maintenant déterminer les quantités v_m, u_m, s_m et r_m pour toute valeur de m. Soit pour cela

$$r_m = x^2 + ax + b_m,$$
$$s_m = c_m + p_m x,$$
$$v_m = (g_m + x)\frac{1}{p_m}.$$

a est le même pour toute valeur de m, ce qu'il est aisé de voir. En substituant ces valeurs de r_m, s_m, et v_m dans les équations (1), (2) et (3), on aura

$$c_m + p_m x = c_{m-2} + p_{m-2}x + 4u_{m-1}(x + g_{m-1})\frac{1}{p_{m-1}},$$
$$x^2 + ax + b_m = x^2 + ax + b_{m-1} - 2u_{m-1},$$
$$x^2 + ax + b_m = (c_m + p_m x)(g_m + x)\frac{1}{p_m} + u_m.$$

De ces équations on tire sans peine

$$c_m = c_{m-2} + 4\frac{u_{m-1}g_{m-1}}{p_{m-1}},$$
$$p_m = p_{m-2} + 4\frac{u_{m-1}}{p_{m-1}},$$
$$b_m = b_{m-1} - 2u_{m-1},$$
$$g_m = a - \frac{c_m}{p_m},$$
$$u_m = b_m - \frac{c_m g_m}{p_m},$$
$$b_m = -b_{m-1} + 2\frac{c_{m-1}}{p_{m-1}}\left(a - \frac{c_{m-1}}{p_{m-1}}\right).$$

Au moyen de ces équations on peut successivement déterminer toutes les quantités

$$c_m,\ u_m,\ g_m,\ p_m \text{ et } b_m;$$

mais en les combinant avec l'équation (4) on les déterminera de la plus simple manière. Cette équation donne

$$(c_{m-1} + p_{m-1}x)(c_m + p_m x) + (x^2 + ax + b_m)^2 = (x^2 + ax + b)^2 + c + px,$$

d'où l'on tire

$$c_{m-1}\cdot c_m = c + b^2 - b_m^2,$$
$$p_{m-1}\cdot p_m = 2(b - b_m),$$
$$c_{m-1}\cdot p_m + c_m\cdot p_{m-1} = p + 2a(b - b_m);$$

en multipliant la dernière équation par $c_{m-1}p_{m-1}$, on aura

$$c_{m-1}^2 p_m p_{m-1} + p_{m-1}^2 c_m c_{m-1} = [p + 2a(b - b_m)]\, c_{m-1}p_{m-1};$$

en substituant dans cette équation la valeur de $p_m p_{m-1}$ et de $c_m c_{m-1}$, il vient

$$2c_{m-1}^2 (b - b_m) + p_{m-1}^2 (c + b^2 - b_m^2) = [p + 2a(b - b_m)]\, c_{m-1}p_{m-1},$$

et en divisant par p_{m-1}^2,

$$2\,\frac{c_{m-1}^2}{p_{m-1}^2}(b - b_m) + c + b^2 - b_m^2 = [p + 2a(b - b_m)]\,\frac{c_{m-1}}{p_{m-1}},$$

c'est-à-dire

$$2\,\frac{c_{m-1}}{p_{m-1}}\left(a - \frac{c_{m-1}}{p_{m-1}}\right)(b - b_m) = c + b^2 - b_m^2 - p\,\frac{c_{m-1}}{p_{m-1}};$$

mais on a

$$2\,\frac{c_{m-1}}{p_{m-1}}\left(a - \frac{c_{m-1}}{p_{m-1}}\right) = b_m + b_{m-1};$$

donc

$$(b_m + b_{m-1})(b - b_m) = c + b^2 - b_m^2 - p\,\frac{c_{m-1}}{p_{m-1}},$$

ou bien

$$p\,\frac{c_{m-1}}{p_{m-1}} = c + b^2 - b\,b_{m-1} - b\,b_m + b_m b_{m-1};$$

d'où

$$p\,\frac{c_{m-1}}{p_{m-1}} = c + (b - b_{m-1})(b - b_m).$$

En substituant cette valeur dans l'équation

$$p^2(b_m + b_{m-1}) = 2p\,\frac{c_{m-1}}{p_{m-1}}\left(ap - p\,\frac{c_{m-1}}{p_{m-1}}\right),$$

on obtiendra

$$p^2(b_m + b_{m-1}) = 2[c + (b - b_{m-1})(b - b_m)]\,[ap - c - (b - b_{m-1})(b - b_m)].$$

Cette équation donne une relation entre b_m et b_{m-1} et des quantités constantes. On peut donc déterminer b_m par b_{m-1}, et ainsi trouver la valeur de b_m par des substitutions successives; mais comme b_m dans cette équation monte au second degré, il est plus facile de se servir de la methode suivante.

En mettant $m-1$ au lieu de m, on aura

$$p^2(b_{m-1} + b_{m-2}) = 2[c + (b - b_{m-2})(b - b_{m-1})]\,[ap - c - (b - b_{m-2})(b - b_{m-1})],$$

ou en développant

$$p^2(b_{m-1} + b_{m-2}) = 2(ap - 2c)(b - b_{m-2})(b - b_{m-1}) + 2c(ap - c) - 2(b - b_{m-2})^2(b - b_{m-1})^2;$$

en retranchant cette équation de celle-ci

$$p^2(b_m+b_{m-1})=2(ap-2c)(b-b_m)(b-b_{m-1})+2c(ap-c)-2(b-b_m)^2(b-b_{m-1})^2,$$

on obtiendra

$$p^2(b_m-b_{m-2})=2(ap-2c)(b-b_{m-1})(b_{m-2}-b_m)-2(b-b_{m-1})^2(b_m-b_{m-2})(b_m+b_{m-2}-2b),$$

et en divisant par b_m-b_{m-2},

$$p^2=-2(ap-2c)(b-b_{m-1})-2(b-b_{m-1})^2(b_m+b_{m-2}-2b),$$

d'où l'on tire

$$b_m=2b-b_{m-2}-\frac{(ap-2c)}{b-b_{m-1}}-\frac{\frac{1}{2}p^2}{(b-b_{m-1})^2}.$$

Voilà l'équation qui détermine b_m.

Si l'on fait $b-b_m=q_m$, on aura

$$q_m=-q_{m-2}+\frac{ap-2c}{q_{m-1}}+\frac{\frac{1}{2}p^2}{q_{m-1}^2},$$

ou bien

$$q_m=\frac{\frac{1}{2}p^2+(ap-2c)q_{m-1}-q_{m-2}q_{m-1}^2}{q_{m-1}^2}.$$

58. Avant de donner l'expression explicite de q_m, je vais montrer comment on peut exprimer les quantités u_m, p_m, c_m, et g_m par q_m, q_{m-1} etc.

On a d'abord

$$u_m=\frac{b_m-b_{m+1}}{2}=\frac{1}{2}(q_{m+1}-q_m);$$

on a de même

$$\frac{c_{m-1}}{p_{m-1}}=\frac{c+q_{m-1}q_m}{p},$$

donc

$$\frac{c_m}{p_m}=\frac{c+q_m q_{m+1}}{p};$$

mais $g_m=a-\frac{c_m}{p_m}$, donc

$$g_m=a-\frac{c+q_m q_{m+1}}{p}.$$

On a de plus $p_m p_{m-1}=2(b-b_m)=2q_m$, d'où l'on tire

$$p_m=\frac{2q_m}{p_{m-1}}=\frac{2q_m}{2q_{m-1}}p_{m-2},$$

donc

$$p_{2\alpha}=\frac{q_{2\alpha}}{q_{2\alpha-1}}\cdot\frac{q_{2\alpha-2}}{q_{2\alpha-3}}\cdot\frac{q_{2\alpha-4}}{q_{2\alpha-5}}\cdots\frac{q_2}{q_1}\cdot p,$$

$$p_{2\alpha+1}=2\,\frac{q_{2\alpha+1}}{q_{2\alpha}}\cdot\frac{q_{2\alpha-1}}{q_{2\alpha-2}}\cdot\frac{q_{2\alpha-3}}{q_{2\alpha-4}}\cdots\frac{q_3}{q_2}\cdot\frac{q_1}{p}.$$

Ayant p_m on a aussi c_m, car

$$c_m = (c + q_m q_{m-1}) \frac{p_m}{p}.$$

Reprenons maintenant l'équation

$$q_m = \frac{\frac{1}{2} p^2 + (ap - 2c) q_{m-1} - q_{m-2} q_{m-1}^2}{q_{m-1}^2}.$$

On peut par cette équation déterminer q_m, si l'on connaît q et q_1. Cherchons donc d'abord ces quantités. On a $q_m = b - b_m$, donc $q = b - b = 0$, et $q_1 = b - b_1$. Maintenant on a

$$b_m = -b_{m-1} + 2 \frac{c_{m-1}}{p_{m-1}} \left(a - \frac{c_{m-1}}{p_{m-1}} \right),$$

donc en faisant $m = 1$,

$$b_1 = -b + 2 \frac{c}{p} \left(a - \frac{c}{p} \right);$$

donc

$$q_1 = 2 \left[b - a \frac{c}{p} + \left(\frac{c}{p} \right)^2 \right] = 2 \frac{bp^2 - acp + c^2}{p^2}.$$

Déterminons maintenant q_m. On voit que q_m est une fonction rationnelle fractionnaire de a, b, c et p. Soit donc

$$q_m = \frac{y_m}{z_m},$$

y_m et z_m étant deux fonctions entières des quantités a, b, c et p. En substituant cette valeur on aura

$$\frac{y_m}{z_m} = \frac{\frac{1}{2} p^2 z_{m-2} z_{m-1}^2 + (ap - 2c) y_{m-1} z_{m-2} z_{m-1} - y_{m-2} y_{m-1}^2}{y_{m-1}^2 z_{m-2}}.$$

Donc on aura

$$z_m = z_{m-2} y_{m-1}^2$$

$$y_m = \frac{1}{2} p^2 z_{m-2} z_{m-1}^2 + (ap - 2c) y_{m-1} z_{m-1} z_{m-2} - y_{m-2} y_{m-1}^2.$$

Au moyen de ces équations on déterminera sans peine z_m et y_m par des substitutions successives. De la première équation on tire

$$z_m^2 = y_{m-1}^2 y_{m-3}^2 y_{m-5}^2 \dots y_{m-2k+1}^2 z_{m-2k},$$

donc

$$z_{2\alpha} = y_{2\alpha-1}^2 y_{2\alpha-3}^2 y_{2\alpha-5}^2 \dots y_3^2 \cdot y_1^2,$$

$$z_{2\alpha+1} = y_{2\alpha}^2 y_{2\alpha-2}^2 y_{2\alpha-4}^2 \dots y_2^2 \cdot z_1,$$

deux équations qui donnent z_m en fonction de y_2, y_3, ... y_{m-1}.

Développons les valeurs de quelques-unes des quantités z, z_1, z_2, etc. y, y_1, y_2 etc. En faisant $m = 2$, 3 etc., on aura



$$z_2 = y_1^2,$$
$$y_2 = \frac{1}{2} p^2 z_1^2 + (ap - 2c) y_1 z_1,$$
$$z_2 = 4(bp^2 - acp + c^2)^2,$$
$$y_2 = \frac{1}{2} p^6 + 2(ap - 2c) p^2 (bp^2 - acp + c^2),$$
$$z_3 = z_1 y_2^2 = p^2 y_2^2,$$
$$y_3 = \frac{1}{2} p^2 z_1 z_2^2 + (ap - 2c) y_2 z_1 z_2 - y_1 y_2^2,$$
etc.

Lorsque $c = 0$ ces valeurs se simplifient beaucoup, et on aura alors

$$b_1 = -b,$$
$$q_1 = 2b = \frac{y_1}{z_1},$$
$$z_2 = y_1^2 = 4b^2,$$
$$y_2 = \frac{1}{2} p^2 + 2abp = \frac{1}{2} p(p + 4ab),$$
$$z_3 = y_2^2 = \frac{1}{4} p^2 (p + 4ab)^2,$$
$$y_3 = \frac{1}{2} p^2 z_2^2 + apy_2 z_2 - 2by_2^2,$$
$$y_3 = \frac{1}{2} bp^2 [16b^3 - p(p + 4ab)],$$
$$z_4 = z_2 y_3^2 = b^4 p^4 [16b^3 - p(p + 4ab)]^2,$$
$$y_4 = \frac{1}{2} p^2 z_2 z_3^2 + apy_3 z_3 z_2 - y_2 y_3^2,$$
$$y_4 = 4b^5 p^5 (p + 4ab)[(p + 2ab)(p + 4ab) - 8b^3],$$
etc.

Au lieu de faire $c = 0$, supposons maintenant $ap - 2c = 0$, on aura

$$q_m = \frac{\frac{1}{2} p^2 - q_{m-2} q_{m-1}^2}{q_{m-1}^2}.$$

Si l'on fait $m = 2$, 3, 4 etc. on aura

$$q_2 = \frac{\frac{1}{2} p^2}{q_1^2},$$
$$q_3 = \frac{\frac{1}{2} p^2 - q_1 q_2^2}{q_2^2} = \frac{\frac{1}{2} p^2 - \frac{1}{4} \frac{p^4}{q_1^4} q_1}{\frac{\frac{1}{4} p^4}{q_1^4}},$$
$$q_3 = \frac{2q_1^4 - q_1 p^2}{p^2} = q_1 \frac{2q_1^3 - p^2}{p^2},$$
$$q_4 = \frac{\frac{1}{2} p^2 - q_2 q_3^2}{q_3^2} = \frac{p^2 [p^4 - (2q_1^3 - p^2)^2]}{2q_1^2 (2q_1^3 - p^2)^2},$$

$$q_4 = \frac{2p^2 q_1 (p^2 - q_1^3)}{(2q_1^3 - p^2)^2},$$

$$q_5 = \frac{(2q_1^3 - p^2)(4q_1^6 - 2q_1^3 p^2 - p^4)}{8q_1^2 (p^2 - q_1^3)^2}.$$

59. Appliquons maintenant ce qui précède à l'intégrale

$$\int \frac{(x+k)\,dx}{\sqrt{(x^2+ax+b)^2+c+px}}.$$

Pour rendre les résultats plus simples, je fais $c=0$, ce qui est permis, comme on le voit aisément. On a

$$\int \frac{(x+k)\,dx}{\sqrt{(x^2+ax+b)^2+px}} = \frac{1}{2n+4} \log \frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}},$$

ou bien, puisque $P^2 - Q^2 R = 1$,

$$\int \frac{(x+k)\,dx}{\sqrt{(x^2+ax+b)^2+px}} = \frac{1}{n+2} \log (P+Q\sqrt{R}).$$

Pour que cette équation soit possible, il faut avant tout que

$$P^2 - Q^2 R = 1,$$

donc on aura pour condition de l'intégrabilité:

$$s_n = \text{const.}$$

Or on a $s_n = c_n + p_n x_n$. Il faut donc que

$$p_n = 0.$$

Si cette condition est remplie, on peut toujours déterminer k de manière que $\int \frac{(x+k)\,dx}{\sqrt{(x^2+ax+b)^2+px}}$ devienne égale à $\frac{1}{n+2} \log (P+Q\sqrt{R})$.

Cherchons cette valeur de k. On a vu qu'en faisant

$$P = f + f'x + \cdots,$$

$$Q = e + e'x + \cdots,$$

k est égal à $\frac{1}{n+2} \cdot \frac{f'}{e}$ (nº. 47). Il s'agit donc de trouver $\frac{f'}{e}$. On a

$$P = rQ + Q_1,$$

$$Q = \frac{2}{p}(x+g)\,Q_1 + Q_2,$$

$$Q_1 = \frac{2}{p_1}(x+g_1)\,Q_2 + Q_3,$$

. . . .

$$Q_2 = \frac{2}{p_2}(x+g_2)Q_3 + Q_4,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$Q_{n-1} = \frac{2}{p_{n-1}}(x+g_{n-1})Q_n,$$

$$Q_n = \text{const.},$$

d'où l'on tire sans peine

$$e^{(n)} = \frac{2}{p}\cdot\frac{2}{p_1}\cdot\frac{2}{p_2}\cdot\frac{2}{p_3}\cdots\frac{2}{p_{n-1}}Q_n,$$

$$e^{(n-1)} = \frac{2}{p}\cdot\frac{2}{p_1}\cdot\frac{2}{p_2}\cdot\frac{2}{p_3}\cdots\frac{2}{p_{n-1}}(g+g_1+g_2+\dots+g_{n-1})Q_n;$$

donc

$$\frac{e^{(n-1)}}{e^{(n)}} = g+g_1+g_2+g_3+\dots+g_{n-1}.$$

Maintenant on a

$$x+k = 2A\,\frac{(n+2)f^{(n+2)}x^{n+1}+(n+1)f^{(n+1)}x^n+\dots}{e^{(n)}x^n+e^{(n-1)}x^{n-1}+\dots};$$

donc

$$(x+k)(e^{(n)}x^n+\dots) = 2A(n+2)f^{(n+2)}x^{n+1}+2A(n+1)f^{(n+1)}x^n+\dots,$$

donc

$$e^{(n)}k+e^{(n-1)} = 2A(n+1)f^{(n+1)} = \frac{n+1}{n+2}f^{(n+1)};$$

or $f^{(n+1)} = e^{(n-1)}+a\,e^{(n)}$ (n° 49), donc

$$e^{(n)}k+e^{(n-1)} = \frac{n+1}{n+2}e^{(n-1)}+\frac{n+1}{n+2}a\,e^{(n)},$$

donc

$$k = \frac{n+1}{n+2}a - \frac{1}{n+2}\cdot\frac{e^{(n-1)}}{e^{(n)}},$$

et par suite

$$k = \frac{n+1}{n+2}a - \frac{1}{n+2}(g+g_1+g_2+\dots+g_{n-1}).$$

On peut aussi exprimer k d'une autre manière. On a $g_m = a - \frac{c_m}{p_m}$; donc en substituant et remarquant que $c_{n-1} = c = 0$,

$$k = \frac{1}{n+2}a + \frac{1}{n+2}\left(\frac{c_1}{p_1}+\frac{c_2}{p_2}+\frac{c_3}{p_3}+\dots+\frac{c_{n-2}}{p_{n-2}}\right).$$

60. On a vu que l'équation

$$p_n = 0$$

exprime la condition pour que

$$\int \frac{(x+k)\,dx}{\sqrt{R}} = 2A \log (P + Q\sqrt{R}).$$

Cette condition équivaut à celle-ci:

$$q_n = 0,$$

car on a $p_n p_{n-1} = 2 q_n$ (nº 57). On a aussi dans le même cas

$$q_{n-k} = q_k.$$

En combinant cela avec ce qu'on a vu précédemment, on en déduira la règle suivante pour trouver toutes les intégrales de la forme

$$\int \frac{(x+k)\,dx}{\sqrt{(x^2+ax+b)^2+px+c}}$$

qui puissent s'exprimer par la fonction logarithmique

$$2A \log \left[P + Q\sqrt{(x^2+ax+b)^2+px+c}\right],$$

savoir:

"On calcule toutes les quantités q_2, q_3, q_4, etc. d'après la formule

$$q_m = \frac{\frac{1}{2}p^2 + (ap-2c)\,q_{m-1} - q_{m-2}\,q_{m-1}^2}{q_{m-1}^2},$$

en supposant $q=0$ et $q_1 = 2\,\frac{bp^2 - acp + c^2}{p^2}$. Puis on fait successivement

$$q_1 = 0,\ q_2 = 0,\ q_3 = 0,\ \ldots\ q_n = 0 \text{ etc.},$$

où en général

$$q_{n-k} = q_k,$$

en donnant à n toutes les valeurs possibles. Cela posé, on aura toutes les valeurs que R peut avoir en éliminant une des quantités a, p, b et c par une de ces équations. Ayant trouvé R on a

$$k = \frac{1}{n+2}\,a + \frac{1}{n+2}\left(\frac{c}{p} + \frac{c_1}{p_1} + \frac{c_2}{p_2} + \cdots + \frac{c_{n-1}}{p_{n-1}}\right),$$

où l'on a

$$\frac{c_m}{p_m} = \frac{c + q_m q_{m+1}}{p}.$$

Faisant ensuite

$$p_{2\alpha} = \frac{q_{2\alpha}}{q_{2\alpha-1}} \cdot \frac{q_{2\alpha-2}}{q_{2\alpha-3}} \cdots \frac{q_2}{q_1} \cdot p,$$

$$p_{2\alpha+1} = 2\,\frac{q_{2\alpha+1}}{q_{2\alpha}} \cdot \frac{q_{2\alpha-1}}{q_{2\alpha-2}} \cdots \frac{q_3}{q_2} \cdot \frac{q_1}{p},$$

$$g_m = a - \frac{c + q_m q_{m+1}}{p},$$

on aura les valeurs de P et de Q en transformant la fraction continue

$$\frac{P}{Q} = x^2 + ax + b + \cfrac{1}{2\frac{x+g}{p} + \cfrac{1}{2\frac{x+g_1}{p_1} + \cdots + \cfrac{1}{2\frac{x+g_{n-2}}{p_{n-2}} + \cfrac{1}{2\frac{x+g_{n-1}}{p_{n-1}}}}}}$$

en fraction ordinaire, savoir en supposant $q_{n-k} = q_k$. Ces valeurs trouvées, on a enfin

$$\int \frac{(x+k)\,dx}{\sqrt{(x^2+ax+b)^2+c+px}} = \frac{1}{n+2} \log \left[P + Q\sqrt{(x^2+ax+b)^2+c+px}\right]."$$

La résolution du problème dépend donc du calcul des quantités q_1, q_2, q_3, q_4, etc. Les valeurs de z_1, y_1, z_2, y_2, z_3, y_3, etc. trouvées dans le numéro 58, donnent immédiatement, dans la supposition de $c = 0$, quelques-unes de ces quantités. Les voici

$$q = 0,$$

$$q_1 = 2b,$$

$$q_2 = \frac{p(p+4ab)}{8b^2},$$

$$q_3 = \frac{2b(16b^3 - p(p+4ab))}{(p+4ab)^2},$$

$$q_4 = \frac{4bp(p+4ab)(p^2+6abp+8a^2b^2-8b^3)}{(16b^3-p(p+4ab))^2}.$$

61. Prenons maintenant quelques exemples.

1. Soit $n = 1$. Dans ce cas on a $q_1 = 0$; c'est-à-dire $b = 0$; donc

$$k = \tfrac{1}{3}a, \quad g = a.$$

On a par là

$$\frac{P}{Q} = x^2 + ax + \frac{1}{2\frac{x+a}{p}} = \frac{(x+a)^2 x + \frac{1}{2}p}{x+a};$$

$$P = (x+a)^2 x + \tfrac{1}{2}p, \quad Q = x + a;$$

donc enfin

$$\int \frac{(x+\frac{1}{3}a)\,dx}{\sqrt{(x^2+ax)^2+px}} = \tfrac{1}{3} \log\left[(x+a)^2 x + \tfrac{1}{2}p + (x+a)\sqrt{(x^2+ax)^2+px}\right].$$

2. Soit $n=2$. On a $q_2=0$; donc $p=-4ab$, $k=\frac{1}{4}a$; on aura donc

$$\int \frac{(x+\frac{1}{4}a)\,dx}{\sqrt{(x^2+ax+b)^2-4abx}} = \tfrac{1}{4}\log(P+Q\sqrt{R}).$$

3. Soit $n=3$. On a $q_3=0$, donc $p^2+4abp=16b^3$, d'où l'on tire

$$p=-2b(a\pm\sqrt{a^2+4b}),$$

$$k=\tfrac{1}{5}a+\tfrac{1}{5}\cdot\frac{c_1}{p_1},$$

$$\frac{c_1}{p_1}=\frac{q_1q_2}{p}=\frac{q_1^2}{p}=\frac{4b^2}{p}=\tfrac{1}{2}(a\mp\sqrt{a^2+4b});$$

donc

$$k=\tfrac{1}{5}(\tfrac{3}{2}a\mp\tfrac{1}{2}\sqrt{a^2+4b}).$$

On aura donc

$$\int \frac{[x+\frac{1}{10}(3a-\sqrt{a^2+4b})]\,dx}{\sqrt{(x^2+ax+b)^2-2b(a+\sqrt{a^2+4a})x}} = \tfrac{1}{5}\log(P+Q\sqrt{R}).$$

Nous avons supposé dans ces exemples $c=0$, mais il est clair qu'on obtiendra les intégrales les plus générales en mettant $x+\alpha$ au lieu de x, α étant une quantité indéterminée.

Problème IV.

Trouver toutes les intégrales de la forme $\int \frac{x+k}{x+l}\cdot\frac{dx}{\sqrt{R}}$ *qui peuvent s'exprimer par la fonction logarithmique* $A\,.\log\frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}}$.

62. Ce problème est dans le fond un cas particulier du problème II, mais comme sa résolution est très importante dans la théorie des fonctions elliptiques, je veux en donner une autre au moyen du problème précédent. Soit

$$\int \frac{(y+k')\,dy}{\sqrt{R'}} = A'.\log\frac{P'+Q'\sqrt{R'}}{P'-Q'\sqrt{R'}}$$

l'intégrale la plus générale de cette forme qu'on puisse exprimer par l'expression

$$A'.\log\frac{P'+Q'\sqrt{R'}}{P'-Q'\sqrt{R'}}.$$

En substituant $\frac{1}{x+l}$ au lieu de y, on aura

$$y+k'=k'+\frac{1}{x+l}=\frac{k'x+k'l+1}{x+l}=\frac{k'\left(x+l+\frac{1}{k'}\right)}{x+l}=\frac{k'(x+k)}{x+l},$$

en faisant $k=l+\frac{1}{k'}$. On a de même $dy=-\frac{dx}{(x+l)^2}$. Soit

$$R'=(y^2+ay+b)^2+c+py,$$

on aura

$$R'=\left(\frac{1}{(x+l)^2}+\frac{a}{x+l}+b\right)^2+c+\frac{p}{x+l},$$

$$R'=\frac{[1+a(x+l)+b(x+l)^2]^2+p(x+l)^3+c(x+l)^4}{(x+l)^4};$$

donc

$$\sqrt{R'}=\frac{\sqrt{[1+a(x+l)+b(x+l)^2]^2+p(x+l)^3+c(x+l)^4}}{(x+l)^2}=\frac{\sqrt{R}}{(x+l)^2}.$$

Désignons par $\frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}}$ ce que deviendra $\frac{P'+Q'\sqrt{R'}}{P'-Q'\sqrt{R'}}$ en substituant $\frac{1}{x+l}$ au lieu de y, on aura.

$$-k'\int\frac{(x+k)\,dx}{(x+l)\sqrt{R}}=A'.\log\frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}},$$

ou, en faisant $-\frac{A'}{k'}=A$,

$$\int\frac{x+k}{x+l}\cdot\frac{dx}{\sqrt{R}}=A.\log\frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}}.$$

Cette intégrale est maintenant l'intégrale cherchée la plus générale, ce qu'il est aisé de voir.

Il faut maintenant déterminer l. On a

$$R=[1+(x+l)a+(x+l)^2b]^2+p(x+l)^3+c(x+l)^4,$$

c'est-à-dire

$$R=1+2a(x+l)+(a^2+2b)(x+l)^2+(2ab+p)(x+l)^3+(b^2+c)(x+l)^4,$$

ou

$$R=(b^2+c)(x^4+\delta x^3+\gamma x^2+\beta x+\alpha),$$

où

$$\delta = [4(b^2+c)l + 2ab + p] : (b^2+c),$$
$$\gamma = [6(b^2+c)l^2 + 3(2ab+p)l + a^2 + 2b] : (b^2+c),$$
$$\beta = [4(b^2+c)l^3 + 3(2ab+p)l^2 + 2(a^2+2b)l + 2a] : (b^2+c),$$
$$\alpha = [(b^2+c)l^4 + (2ab+p)l^3 + (a^2+2b)l^2 + 2al + 1] : (b^2+c).$$

De ces équations on tire

$$2ab + p = (b^2+c)(\delta - 4l),$$
$$a^2 + 2b = (b^2+c)(\gamma - 3\delta l + 6l^2),$$
$$2a = (b^2+c)(\beta - 2\gamma l + 3\delta l^2 - 4l^3),$$
$$1 = (b^2+c)(\alpha - \beta l + \gamma l^2 - \delta l^3 + l^4);$$

d'où, en faisant

$$\alpha' = \alpha - \beta l + \gamma l^2 - \delta l^3 + l^4,$$
$$\beta' = \beta - 2\gamma l + 3\delta l^2 - 4l^3,$$
$$\gamma' = \gamma - 3\delta l + 6l^2,$$
$$\delta' = \delta - 4l,$$

on tire

$$a = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{\beta'}{\alpha'},$$
$$b = -\tfrac{1}{8}\cdot\frac{\beta'^2}{\alpha'^2} + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{\gamma'}{\alpha'},$$
$$c = \frac{1}{\alpha'} - \tfrac{1}{4}\left(\frac{\gamma'}{\alpha'} - \tfrac{1}{4}\,\frac{\beta'^2}{\alpha'^2}\right)^2,$$
$$p = \frac{\delta'}{\alpha'} - \tfrac{1}{2}\cdot\frac{\beta'}{\alpha'}\cdot\left(\frac{\gamma'}{\alpha'} - \tfrac{1}{4}\,\frac{\beta'^2}{\alpha'^2}\right).$$

En substituant maintenant ces valeurs de a, b, c et p dans l'équation qui exprime la relation qui a lieu entre ces quantités, on aura une équation entre l, α, β, γ et δ, d'où l'on tirera la valeur de l. On aura donc enfin

$$\int \frac{(x+k)\,dx}{(x+l)\sqrt{x^4 + \delta x^3 + \gamma x^2 + \beta x + \alpha}} = A\sqrt{b^2+c}\,.\log\frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}}.$$

De cette équation on tire ensuite

$$\int\frac{dx}{\sqrt{R}} + (k-l)\int\frac{dx}{(x+l)\sqrt{R}} = A\sqrt{b^2+c}\,.\log\frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}},$$

d'où

$$\int\frac{dx}{(x+l)\sqrt{R}} = \frac{1}{l-k}\int\frac{dx}{\sqrt{R}} - \frac{A\sqrt{b^2+c}}{l-k}\,.\log\frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}},$$

et de cette manière on obtiendra toutes les intégrales de la forme

$$\int \frac{dx}{(x+l)\sqrt{R}}$$

qui peuvent être exprimées par l'intégrale $\int \frac{dx}{\sqrt{R}}$ et la fonction logarithmique $A.\log \frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}}$.

En mettant $-l$ au lieu de l, on aura

$$\int \frac{dx}{(x-l)\sqrt{R}} = -\frac{1}{l+k}\cdot \int \frac{dx}{\sqrt{R}} + \frac{A\sqrt{b^2+c^2}}{l+k}\cdot \log \frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}},$$

ou bien (nº 44),

$$\int \frac{dx}{(x-l)\sqrt{R}} = -\frac{1}{l+k}\cdot \int \frac{dx}{\sqrt{R}} - \frac{1}{(2n+4)\sqrt{\alpha+\beta l+\gamma l^2+\delta l^3+l^4}}\cdot \log \frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}}.$$

Si l'on suppose $k+l=\frac{1}{k'}=\infty$, ou $k'=0$, on aura

$$\int \frac{dx}{(x-l)\sqrt{R}} = -\frac{1}{(2n+4)\sqrt{\alpha+\beta l+\gamma l^2+\delta l^3+l^4}}\cdot \log \frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}}.$$

Prenons un exemple. On a (nº 51)

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x^4+2x^3-3x^2-\alpha'(x-1)}} = \tfrac{1}{6}\cdot \log \frac{P'+Q'\sqrt{R'}}{P'-Q'\sqrt{R'}}.$$

Soit $x=\frac{1}{y-l}$, on aura

$$xdx = -\frac{dy}{(y-l)^3},$$

$$R = \frac{1+2(y-l)-3(y-l)^2-\alpha'(y-l)^3+\alpha'(y-l)^4}{(y-l)^4},$$

donc

$$R = \frac{(y^4+\delta y^3+\gamma y^2+\beta y+\alpha)}{(y-l)^4}\cdot \alpha',$$

d'où l'on tire

$$\delta = -1-4l,$$
$$\gamma = (-3+3\alpha' l+6\alpha' l^2):\alpha',$$
$$\beta = (2+6l-3\alpha' l^2-4\alpha' l^3):\alpha',$$
$$\alpha = (1-2l-3l^2+\alpha' l^3+\alpha' l^4):\alpha';$$

donc

$$l = -\frac{1+\delta}{4}, \quad \alpha' = \frac{3}{6l^2+3l-\gamma}, \quad \text{etc.}$$

En faisant $l=0$, on aura

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+2x-3x^2-\alpha'(x^3-x^4)}} = -\tfrac{1}{6}.\log\frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}},$$

or

$$P' = x^3+3x^2-2-\frac{\alpha}{2}, \quad Q' = x+2;$$

donc

$$P = 1+3x-\left(2+\frac{\alpha}{2}\right)x^3, \quad Q = 1+2x.$$

Dans le troisième problème j'ai donné une méthode pour trouver toutes les intégrales de la forme $\int\frac{(x+k)\,dx}{\sqrt{R}}$ qui peuvent être exprimées par la fonction logarithmique $A.\log\frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}}$. Dans la suite de la théorie des transcendantes elliptiques je montrerai comment on peut trouver une infinité d'autres intégrales de la même forme, intégrables par d'autres fonctions logarithmiques, qui sont toutes composées de termes de la forme $A.\log\frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}}$, comme nous l'avons vu à la tête de ce chapitre.

CHAPITRE III.

Sur une relation remarquable qui existe entre plusieurs intégrales de la forme

$$\int\frac{dx}{\sqrt{R}}, \int\frac{x\,dx}{\sqrt{R}}, \int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{R}}, \int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}.$$

---

63. Nous avons vu dans le chapitre précédent qu'il est en général impossible d'exprimer l'intégrale $\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$ par les intégrales $\int\frac{dx}{\sqrt{R}}, \int\frac{x\,dx}{\sqrt{R}}, \int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{R}}$; néanmoins si l'on prend cette intégrale entre des limites convenables

il est toujours possible d'exprimer l'intégrale $\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$ par les trois intégrales ci-dessus. Ces limites sont, comme on le verra, les valeurs de x qui rendent $R=0$. Soit

$$p=\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}.$$

En différentiant p par rapport à a, on aura

$$\frac{dp}{da}=\int \frac{dx}{(x-a)^2\sqrt{R}}.$$

Maintenant on a vu dans le premier chapitre que $\int \frac{dx}{(x-a)^2\sqrt{R}}$ est toujours réductible à l'intégrale $\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$. En effet on a (nº 14)

$$\int \frac{dx}{(x-a)^2\sqrt{R}}=\frac{1}{fa}\cdot\int \frac{dx}{\sqrt{R}}(A+Bx+Cx^2)-\tfrac{1}{2}\frac{f'a}{fa}\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$$
$$-\frac{\sqrt{R}}{(x-a)fa}+\text{const.},$$

où

$$A=-\varepsilon a^2-\tfrac{1}{2}\delta a,\quad B=\tfrac{1}{2}\delta,\quad C=\varepsilon,\quad R=fx.$$

Donc en substituant pour $\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$ et $\int \frac{dx}{(x-a)^2\sqrt{R}}$ leurs valeurs, p et $\frac{dp}{da}$, et prenant les intégrales de manière qu'elles s'évanouissent lorsque $x=r$, r étant une valeur de x qui rend $R=fx=0$, on aura

$$\frac{dp}{da}+\tfrac{1}{2}\frac{f'a}{fa}p=\frac{\sqrt{fx}}{(a-x)fa}+\frac{1}{fa}\int \frac{dx}{\sqrt{fx}}(A+Bx+Cx^2).$$

Cette équation devient intégrable en la multipliant par $\sqrt{fa}\,.\,da$; car on a alors

$$\sqrt{fa}\,.\,dp+p\,.\,d\sqrt{fa}=\sqrt{fx}\,\frac{da}{(a-x)\sqrt{fa}}+\frac{da}{\sqrt{fa}}\cdot\int \frac{dx}{\sqrt{fx}}(A+Bx+Cx^2).$$

En intégrant on aura

$$p\sqrt{fa}-\sqrt{fx}\int \frac{da}{(a-x)\sqrt{fa}}=\int \frac{da}{\sqrt{fa}}\int \frac{dx}{\sqrt{fx}}(A+Bx+Cx^2)+\text{const.}$$

Si l'on prend l'intégrale de $a=r$, on a: const. $=0$, en remarquant que

$$A+Bx+Cx^2=\tfrac{1}{2}\delta x+\varepsilon x^2-(\tfrac{1}{2}\delta a+\varepsilon a^2).$$

Maintenant on a

$$\int \frac{da}{\sqrt{fa}} \int \frac{dx}{\sqrt{fx}} (\tfrac{1}{2}\delta x - \varepsilon x^2 - \tfrac{1}{2}\delta a - \varepsilon a^2)$$
$$= \int \frac{da}{\sqrt{fa}} \cdot \int \frac{(\frac{1}{2}\delta x + \varepsilon x^2)\,dx}{\sqrt{fx}} - \int \frac{dx}{\sqrt{fx}} \cdot \int \frac{(\frac{1}{2}\delta a - \varepsilon a^2)\,da}{\sqrt{fa}}.$$

Donc en substituant cette valeur et remettant la valeur de p, on aura l'équation suivante:

$$(\alpha)\quad \left\{ \begin{aligned} &\sqrt{fa}\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{fx}} - \sqrt{fx}\int \frac{da}{(a-x)\sqrt{fa}} \\ &= \int \frac{da}{\sqrt{fa}} \cdot \int \frac{(\frac{1}{2}\delta x + \varepsilon x^2)\,dx}{\sqrt{fx}} - \int \frac{dx}{\sqrt{fx}} \cdot \int \frac{(\frac{1}{2}\delta a + \varepsilon a^2)\,da}{\sqrt{fa}}. \end{aligned} \right.$$

Cette équation donne la différence entre les deux intégrales $\sqrt{fa}\cdot\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{fx}}$ et $\sqrt{fx}\cdot\int \frac{da}{(a-x)\sqrt{fa}}$ exprimée par des intégrales de la forme $\int \frac{dy}{\sqrt{fy}}$ et $\int \frac{(\frac{1}{2}\delta y + \varepsilon y^2)\,dy}{\sqrt{fy}}$, ce qui est très remarquable.

Supposons maintenant qu'on prenne l'intégrale $\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{fx}}$ de $x = r$ à $x = r'$, r' étant une autre valeur qui rend $fx = 0$. On a dans ce cas

$$(\beta)\quad \sqrt{fa}\int_r^{r'} \frac{dx}{(x-a)\sqrt{fx}} = \int_r \frac{da}{\sqrt{fa}} \cdot \int_r^{r'} \frac{(\frac{1}{2}\delta x + \varepsilon x^2)\,dx}{\sqrt{fx}} - \int_r^{r'} \frac{dx}{\sqrt{fx}} \cdot \int_r \frac{(\frac{1}{2}\delta a + \varepsilon a^2)\,da}{\sqrt{fa}}.$$

Cette équation montre qu'on peut exprimer l'intégrale définie $\int_r^{r'} \frac{dx}{(x-a)\sqrt{fx}}$ par des intégrales de la forme $\int \frac{dy}{\sqrt{fy}}$ et $\int \frac{(\frac{1}{2}\delta y + \varepsilon y^2)\,dy}{\sqrt{fy}}$, ce qui est très important dans la théorie des transcendantes elliptiques.

Soit r'' une troisième valeur qui rend $fx = 0$, et supposons $a = r''$, on aura $fa = 0$, et

$$(\gamma)\quad \int_r^{r''} \frac{da}{\sqrt{fa}} \cdot \int_r^{r'} \frac{(\frac{1}{2}\delta x + \varepsilon x^2)\,dx}{\sqrt{fx}} = \int_r^{r'} \frac{dx}{\sqrt{fx}} \cdot \int_r^{r''} \frac{(\frac{1}{2}\delta a + \varepsilon a^2)\,da}{\sqrt{fa}},$$

équation qui exprime une relation entre quatre intégrales définies.

Supposons, dans l'équation (α), que x ait une valeur telle que l'intégrale $\int \frac{da}{(a-x)\sqrt{fa}}$ puisse être exprimée par des intégrales de la forme $\int \frac{da}{\sqrt{fa}}$ et $\int \frac{a\,da}{\sqrt{fa}}$, et soit

$$\int \frac{da}{(a-x)\sqrt{fa}} = \int \frac{(A+Ba)\,da}{\sqrt{fa}} + w,$$

w étant une fonction logarithmique.

En substituant cette valeur, on aura

$$\sqrt{fa}\int_r^\omega \frac{dx}{(x-a)\sqrt{fx}} = \sqrt{f\omega}\int_r \frac{(A+Ba)\,.\,da}{\sqrt{fa}} + \sqrt{f\omega}\,.\,w$$
$$+\int_r \frac{da}{\sqrt{fa}}\cdot\int_r^\omega \frac{(\frac{1}{2}\delta x+\varepsilon x^2)\,dx}{\sqrt{fx}} - \int_r^\omega \frac{dx}{\sqrt{fx}}\cdot\int_r \frac{(\frac{1}{2}\delta a+\varepsilon a^2)\,da}{\sqrt{fa}}.$$

Les intégrales sont prises depuis $x=r$ jusqu'à $x=\omega$, ω étant une valeur telle que

$$\int \frac{da}{(a-\omega)\sqrt{fa}} = \int \frac{(A+Ba)\,da}{\sqrt{fa}} + w.$$

Supposons de plus qu'on assigne à a une valeur $a=\omega'$ qui donne

$$\int \frac{dx}{(x-\omega')\sqrt{fx}} = \int \frac{(A'+B'x)\,dx}{\sqrt{fx}} + w',$$

w' étant une fonction logarithmique, on aura

$$w'\sqrt{f\omega'} - w\sqrt{f\omega} = \sqrt{f\omega}\int_r^{\omega'} \frac{(A+Ba)\,da}{\sqrt{fa}} - \sqrt{f\omega'}\int_r^\omega \frac{(A'+B'x)\,dx}{\sqrt{fx}}$$
$$+\int_r^{\omega'} \frac{da}{\sqrt{fa}}\cdot\int_r^\omega \frac{(\frac{1}{2}\delta x+\varepsilon x^2)\,dx}{\sqrt{fx}} - \int_r^\omega \frac{dx}{\sqrt{fx}}\cdot\int_r^{\omega'} \frac{(\frac{1}{2}\delta a+\varepsilon a^2)\,da}{\sqrt{fa}}.$$

64. On peut trouver une relation encore plus générale entre plusieurs intégrales définies de la manière suivante.

Soit s une fonction logarithmique quelconque de la forme

$$A\,.\log\frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}} + A'.\log\frac{P'+Q'\sqrt{R}}{P'-Q'\sqrt{R}} + \cdots.$$

En prenant la différentielle de cette expression on a, suivant ce qu'on a vu précédemment, un résultat de la forme:

$$ds = \frac{dx}{\sqrt{R}}\left(B+Cx+\frac{L}{x-a}+\frac{L'}{x-a'}+\frac{L''}{x-a''}+\cdots\right),$$

donc en intégrant

$$s = \int \frac{B+Cx}{\sqrt{R}}\,dx + L\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}} + L'\int \frac{dx}{(x-a')\sqrt{R}} + \cdots.$$

Prenant ensuite l'intégrale depuis $x=r$ jusqu'à $x=r'$, on a

$$s'-s=\int_r^{r'}\frac{(B+Cx)\,dx}{\sqrt{fx}}$$
$$+\frac{L}{\sqrt{fa}}\left(\int_r\frac{da}{\sqrt{fa}}\cdot\int_r^{r'}\frac{(\frac{1}{2}\,\delta x+\varepsilon x^2)\,dx}{\sqrt{fx}}-\int_r^{r'}\frac{dx}{\sqrt{fx}}\cdot\int_r\frac{(\frac{1}{2}\,\delta a+\varepsilon a^2)\,da}{\sqrt{fa}}\right)$$
$$+\frac{L'}{\sqrt{fa'}}\left(\int_r\frac{da'}{\sqrt{fa'}}\cdot\int_r^{r'}\frac{(\frac{1}{2}\,\delta x+\varepsilon x^2)\,dx}{\sqrt{fx}}-\int_r^{r'}\frac{dx}{\sqrt{fx}}\cdot\int_r\frac{(\frac{1}{2}\,\delta a'+\varepsilon a'^2)\,da'}{\sqrt{fa'}}\right)$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

ou bien

$$s'-s=\int_r^{r'}\frac{(B+Cx)\,dx}{\sqrt{fx}}$$
$$-\int_r^{r'}\frac{dx}{\sqrt{fx}}\left(\frac{L}{\sqrt{fa}}\int_r\frac{(\frac{1}{2}\,\delta a+\varepsilon a^2)\,da}{\sqrt{fa}}+\frac{L'}{\sqrt{fa'}}\int_r\frac{(\frac{1}{2}\,\delta a'+\varepsilon a'^2)\,da'}{\sqrt{fa'}}+\cdots\right)$$
$$+\int_r^{r'}\frac{(\frac{1}{2}\,\delta x+\varepsilon x^2)\,dx}{\sqrt{fx}}\left(\frac{L}{\sqrt{fa}}\int_r\frac{da}{\sqrt{fa}}+\frac{L'}{\sqrt{fa'}}\int_r\frac{da'}{\sqrt{fa'}}+\cdots\right).$$

Toutes les intégrales qui se trouvent dans cette formule, sont, comme on le voit, de la forme

$$\int\frac{dy}{\sqrt{fy}},\ \int\frac{y\,dy}{\sqrt{fy}}\ \text{ et }\ \int\frac{y^2\,dy}{\sqrt{fy}},$$

et l'équation exprime par conséquent une relation très générale entre un système d'intégrales de cette forme.

Réduction de l'intégrale $\int\frac{P\,dx}{\sqrt{R}}$ *à la forme*

$$\int\frac{f(\sin^2\varphi)\,.\,d\varphi}{\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi}}.$$

Voyez *Legendre* Exercices de calc. int.

Réduction de l'intégrale $\int \frac{f(\sin^2\varphi).d\varphi}{\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi}}$

aux intégrales $\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi}}$, $\int d\varphi\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi}$ *et* $\int \frac{d\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi}}$.

Voyez *Legendre* Exercices de calc. int.

Comparaison des transcendantes elliptiques.

Voyez *Legendre* Exercices de calc. int.

Evaluation des transcendantes elliptiques par approximation.

Voyez *Legendre* Exercices de calc. int.

Réduction des transcendantes elliptiques de troisième espèce par rapport au paramètre.

Considérons l'expression

$$\text{arc tang}\,\frac{P\sqrt{R}}{Q}=s;$$

en la différentiant, on aura

$$ds=\frac{d\left(\frac{P\sqrt{R}}{Q}\right)}{1+\frac{P^2R}{Q^2}}=\frac{\frac{1}{2}\frac{P}{Q}\cdot\frac{dR}{\sqrt{R}}+\frac{R(QdP-PdQ)}{Q^2\sqrt{R}}}{1+\frac{P^2R}{Q^2}},$$

ou bien

$$ds=\frac{\frac{1}{2}PQ\frac{dR}{dx}+R\left(Q\frac{dP}{dx}-P\frac{dQ}{dx}\right)}{Q^2+P^2R}\cdot\frac{dx}{\sqrt{R}}=\frac{M}{N}\cdot\frac{dx}{\sqrt{R}}.$$

Soit

$$N=Q^2+P^2R=k(1+nx^2)(1+n_1x^2)^2,$$
$$P=1,\quad \text{et}\quad Q=x(a+bx^2).$$

En substituant on aura

$$x^2(a+bx^2)^2+(1-x^2)(1-c^2x^2)=k(1+nx^2)(1+n_1x^2)^2.$$

En faisant $x=1$ et $x=\frac{1}{c}$, on aura

$$(a+b)^2=k(1+n)(1+n_1)^2,$$

$$\frac{1}{c^2}\left(a+\frac{b}{c^2}\right)^2=k\left(1+\frac{n}{c^2}\right)\left(1+\frac{n_1}{c^2}\right)^2,$$

d'où l'on tire

$$a+b=(1+n_1)\sqrt{1+n}.\sqrt{k}$$

$$\frac{1}{c}\left(a+\frac{b}{c^2}\right)=\left(1+\frac{n_1}{c^2}\right)\sqrt{1+\frac{n}{c^2}}.\sqrt{k};$$

donc

$$b\left(1-\frac{1}{c^2}\right)=\left[(1+n_1)\sqrt{1+n}-c\left(1+\frac{n_1}{c^2}\right)\sqrt{1+\frac{n}{c^2}}\right]\sqrt{k},$$

$$a\left(1-\frac{1}{c^2}\right)=\left[c\left(1+\frac{n_1}{c^2}\right)\sqrt{1+\frac{n}{c^2}}-\frac{1}{c^2}(1+n_1)\sqrt{1+n}\right]\sqrt{k}.$$

On a de même

$$b^2=knn_1^2,$$

$$b=n_1\sqrt{n}\sqrt{k}.$$

En substituant cette valeur, on a

$$-n_1\sqrt{n}\left(\frac{1-c^2}{c^2}\right)=(1+n_1)\sqrt{1+n}-\frac{1}{c^2}(c^2+n_1)\sqrt{c^2+n},$$

ou

$$n_1\left(-(1-c^2)\sqrt{n}-c^2\sqrt{1+n}+\sqrt{c^2+n}\right)=c^2\left(\sqrt{1+n}-\sqrt{c^2+n}\right);$$

donc

$$n_1=\frac{c^2(\sqrt{1+n}-\sqrt{c^2+n})}{-(1-c^2)\sqrt{n}-c^2\sqrt{1+n}+\sqrt{c^2+n}},$$

ou bien, en multipliant en haut et en bas par $\sqrt{1+n}+\sqrt{c^2+n}$, et en réduisant,

$$n_1=\frac{c^2}{n-\sqrt{n}.\sqrt{n+1}+\sqrt{(1+n)(c^2+n)}-\sqrt{n(c^2+n)}},$$

c'est-à-dire

$$n_1=\frac{c^2}{(\sqrt{n}-\sqrt{1+n})(\sqrt{n}-\sqrt{c^2+n})};$$

et en multipliant en haut et en bas par $(\sqrt{n}+\sqrt{1+n})(\sqrt{n}+\sqrt{c^2+n})$,

on aura

$$n_1 = (\sqrt{1+n} + \sqrt{n})(\sqrt{c^2+n} + \sqrt{n}),$$

ou enfin

$$n_1 = n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} + 1\right)\left(\sqrt{1+\frac{c^2}{n}} + 1\right).$$

On a

$$k = 1, \quad b = n_1\sqrt{n}, \quad a = (1+n_1)\sqrt{1+n} - n_1\sqrt{n}.$$

On trouvera de même

$$a = \frac{1}{c^2}\left((c^2+n_1)\sqrt{c^2+n} - n_1\sqrt{n}\right).$$

Cherchons maintenant la valeur de M.

On a

$$Q^2 + R = (1+nx^2)(1+n_1x^2)^2;$$

donc en différentiant

$$2Q\,dQ + dR = 2(1+n_1x^2)[(1+nx^2)2n_1x + (1+n_1x^2)nx]\,dx,$$

d'où

$$2Q\frac{dQ}{dx} + \frac{dR}{dx} = 2(1+n_1x^2)(2n_1+n+3nn_1x^2)x.$$

En multipliant par Q et substituant pour Q^2 sa valeur $(1+nx^2)(1+n_1x^2)^2 - R$, on obtiendra

$$2(1+nx^2)(1+n_1x^2)^2\frac{dQ}{dx} - 2R\frac{dQ}{dx} + Q\frac{dR}{dx} = 2Q(1+n_1x^2)(2n_1+n+3nn_1x^2)x.$$

Maintenant on a

$$M = \tfrac{1}{2}Q\frac{dR}{dx} - R\frac{dQ}{dx};$$

donc

$$M = (1+n_1x^2)\left((2n_1+n+3nn_1x^2)xQ - (1+nx^2)(1+n_1x^2)\frac{dQ}{dx}\right).$$

Or $Q = ax + bx^3$, donc $\frac{dQ}{dx} = a + 3bx^2$. On tire de là

$$M = (1+n_1x^2)[(2nn_1a - (n_1+2n)b)x^4 + (n_1a - 3b)x^2 - a].$$

Donc

$$\frac{M}{N} = \frac{[2nn_1a - (n_1+2n)b]x^4 + (n_1a - 3b)x^2 - a}{(1+nx^2)(1+n_1x^2)},$$

$$= A + \frac{L}{1+nx^2} + \frac{L'}{1+n_1x^2},$$

où

$$A = 2a - \left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n_1}\right)b,$$

$$L = \frac{b}{n} - a = \frac{n_1}{\sqrt{n}} - a,$$

$$L' = \frac{2b}{n_1} - 2a = 2\sqrt{n} - 2a.$$

On aura par conséquent

$$\text{arc tg.}\,\frac{\sqrt{R}}{Q} = \left[2a - \left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n_1}\right)b\right]F + \left(\frac{n_1}{\sqrt{n}} - a\right)\Pi(n) + (2\sqrt{n} - 2a)\,\Pi(n_1);$$

donc

$$\Pi(n) = \frac{\sqrt{n}}{n_1 - a\sqrt{n}}\,\text{arc tg.}\,\frac{\sqrt{R}}{Q} - \frac{2a - \left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n_1}\right)b}{\frac{n_1}{\sqrt{n}} - a}\,F + \frac{(2a - 2\sqrt{n})\sqrt{n}}{n_1 - a\sqrt{n}}\,\Pi(n_1).$$

On trouvera

$$\frac{2a - \left(\frac{2}{n_1} + \frac{1}{n}\right)b}{\frac{n_1}{\sqrt{n}} - a} = \frac{2a\sqrt{n} - (2n + n_1)}{n_1 - a\sqrt{n}} = -\frac{(\sqrt{c^2+n} - \sqrt{n})(\sqrt{1+n} - \sqrt{n})}{\sqrt{1+n}\,.\,\sqrt{c^2+n}}.$$

Donc on aura

$$\Pi(n) = \frac{\sqrt{n}}{n_1 - a\sqrt{n}}\,\text{arc tg.}\,\frac{\sqrt{R}}{ax + bx^3} + \frac{2a\sqrt{n} - (2n + n_1)}{n_1 - a\sqrt{n}}\,F + \frac{(2a - 2\sqrt{n})\sqrt{n}}{n_1 - a\sqrt{n}}\,\Pi(n_1) + C,$$

où

$$n_1 = \pm(\sqrt{n+1} \pm \sqrt{n})(\sqrt{n+c^2} \pm \sqrt{n}) = f(n),$$

$$b = \pm\, n_1\sqrt{n} = f(n)\sqrt{n},$$

$$a = (n_1 + 1)\sqrt{n+1} \mp n_1\sqrt{n} = \chi(n).$$

Ou bien, en faisant pour abréger

$$\frac{\pm\sqrt{n}}{n_1 \mp a\sqrt{n}} = \alpha = \varphi(n),$$

$$-\frac{\pm 2a\sqrt{n} - 2n - n_1}{n_1 \mp a\sqrt{n}} = \beta = \theta(n),$$

$$\frac{\pm(2a \mp 2\sqrt{n})\sqrt{n}}{n_1 \mp a\sqrt{n}} = \gamma = \psi(n) \quad \text{et} \quad C = -\frac{\alpha\pi}{2},$$

on obtiendra

$$\Pi(n) = \beta F + \gamma\,\Pi(n_1) + \alpha\,.\,\text{arc tang}\,\frac{ax + bx^3}{\sqrt{R}}.$$

Soit maintenant

$$n_2 = f(n_1),\quad b_1 = \sqrt{n_1}.f(n_1),\quad a_1 = \chi(n_1),$$
$$\alpha_1 = \varphi(n_1),\quad \beta_1 = \theta(n_1),\quad \gamma_1 = \psi(n_1),$$

on aura de la même manière

$$\Pi(n_1) = \beta_1 F + \gamma_1 \Pi(n_2) + \alpha_1 \text{ arc tang } \frac{a_1 x + b_1 x^3}{\sqrt{R}}.$$

En dérivant les quantités $n_3\ \alpha_2,\ \beta_2,\ \gamma_2,\ a_2,\ b_2$ de la même manière, on aura

$$\Pi(n_2) = \beta_2 F + \gamma_2 \Pi(n_3) + \alpha_2 \text{ arc tang } \frac{a_2 x + b_2 x^3}{\sqrt{R}},$$

et ainsi de suite.

En faisant des substitutions successives, on aura donc

$$\Pi(n) = (\beta + \beta_1\gamma + \beta_2\gamma\gamma_1 + \beta_3\gamma\gamma_1\gamma_2 + \cdots + \beta_{m-1}\gamma\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_{m-2})F$$
$$+ \gamma\gamma_1\gamma_2\gamma_3\ldots\gamma_{m-1}.\Pi(n_m) + \alpha.\text{arc tang } \frac{(a+bx^2)x}{\sqrt{R}}$$
$$+ \alpha_1\gamma.\text{arc tang } \frac{(a_1+b_1x^2)x}{\sqrt{R}}$$
$$+ \alpha_2\gamma\gamma_1.\text{arc tang } \frac{(a_2+b_2x^2)x}{\sqrt{R}}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ \alpha_{m-1}\gamma\gamma_1\gamma_2\gamma_3\ldots\gamma_{m-2}.\text{arc tang } \frac{(a_{m-1}+b_{m-1}x^2)x}{\sqrt{R}}.$$

Considérons maintenant la loi que suivent les quantités $n,\ n_1,\ n_2$ etc.; n_1 a les quatre valeurs suivantes:

$$1)\quad n_1 = (\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n+c^2}+\sqrt{n}),$$
$$2)\quad n_1 = (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+c^2}-\sqrt{n}),$$
$$3)\quad n_1 = -(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n+c^2}-\sqrt{n}),$$
$$4)\quad n_1 = -(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+c^2}+\sqrt{n}).$$

Soit d'abord

$$n_1 = (\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n+c^2}+\sqrt{n});$$

on voit aisément que $n_1 > 4n$, car comme $\sqrt{n+1} > \sqrt{n}$ et $\sqrt{n+c^2} > \sqrt{n}$, on a

$$n_1 > (\sqrt{n}+\sqrt{n})(\sqrt{n}+\sqrt{n}),$$

c'est-à-dire

$$n_1 > 4n;$$

de même

$$n_2 > 4n_1 > 4^2 n,$$
$$n_3 > 4n_2 > 4^3 n,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$n_m > 4n_{m-1} > 4^m n.$$

On peut donc faire en sorte que n_m devienne aussi grand qu'on le voudra. D'où il suit qu'on peut exprimer la fonction $\Pi(n)$ par la fonction $\Pi(n_m)$ dans laquelle n_m est plus grand qu'un nombre donné quelconque.

Considérons maintenant les quantités a, b, α, β etc. On a $b = n_1\sqrt{n}$: b est donc positif et très grand, si n est grand. La valeur de a est

$$a = (n_1 + 1)\sqrt{n+1} - n_1\sqrt{n},$$

d'où l'on voit sans difficulté que a croît en même temps que n, et que par suite les quantités a, a_1, a_2, etc. vont en croissant.

On a de même

$$\alpha_{m-1} = \frac{\sqrt{n_{m-1}}}{n_m - a_{m-1}\sqrt{n_{m-1}}}.$$

En substituant les valeurs de n_m et de a_{m-1} en n_{m-1}, on verra que α_{m-1} est une très petite quantité de l'ordre $\dfrac{1}{\sqrt{n_{m-1}}}$.

On a

$$\beta_{m-1} = \frac{(\sqrt{c^2+n_{m-1}} - \sqrt{n_{m-1}})(\sqrt{1+n_{m-1}} - \sqrt{n_{m-1}})}{\sqrt{c^2+n_{m-1}}\sqrt{1+n_{m-1}}},$$

d'où l'on voit sans peine que β est toujours contenu entre les limites 1 et 0, et que la série des valeurs de β tend continuellement vers la dernière limite, lorsque n est positif.

Enfin on a

$$\gamma = \frac{(2a - 2\sqrt{n})\sqrt{n}}{n_1 - a\sqrt{n}} = 2\sqrt{n}\,\frac{\sqrt{1+n} + \sqrt{c^2+n}}{\sqrt{1+n}\,.\,\sqrt{c^2+n}}.$$

On conclut de là que la suite des valeurs de γ tend continuellement vers la limite 4 en croissant.

Considérons maintenant la seconde formule

$$n_1 = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+c^2} - \sqrt{n}).$$

Supposons d'abord que n soit très grand; alors on a

$$\sqrt{n+1} = \sqrt{n} + \frac{1}{2\sqrt{n}}, \quad \sqrt{n+c^2} = \sqrt{n} + \frac{c^2}{2\sqrt{n}};$$

donc

$$n_1 = \frac{c^2}{4n}.$$

Donc à mesure que n devient plus grand, n_1 devient plus petit, si n est plus grand que l'unité. La même chose a lieu si n est moindre que l'unité, ce dont on peut se convaincre aisément, en différentiant la valeur de n_1, car on trouve

$$dn_1 = -n_1\left(\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+c^2}}\right)\frac{dn}{2};$$

donc, la différentielle étant négative, il est clair que n_1 croît si n diminue, et réciproquement.

Cherchons maintenant si la série des quantités $n, n_1, n_2, \ldots$ a une limite. Si elle en a une, cette limite est la valeur que reçoit n en faisant $n_1 = n$. Soit k cette valeur, on aura

$$k = (\sqrt{k+1} - \sqrt{k})(\sqrt{k+c^2} - \sqrt{k}).$$

Faisons $n = k + \alpha$, on aura

$$n_1 = k\left[1 - \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{k^2+k}} + \frac{1}{\sqrt{k^2+c^2k}}\right)\alpha\right] + \cdots,$$

donc

$$n_1 = k - \tfrac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}} + \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k+c^2}}\right)\alpha + \cdots,$$

maintenant $\tfrac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}} + \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k+c^2}}\right) < 1$, donc

$$k - n_1 < \alpha.$$

Donc n_1 diffère moins de k que n; donc k est la limite des quantités n, n_1, n_2, etc.

On peut donc réduire $\Pi(n)$ à la fonction $\Pi(n_m)$, où n_m diffère de k d'une quantité aussi petite qu'on le voudra. La fonction $\Pi(k)$ peut s'exprimer par la fonction F et des logarithmes, car on a

$$(1-\gamma)\,\Pi(k) = \beta F + \alpha\,.\operatorname{arc\,tang}\frac{(a+bx^2)x}{\sqrt{R}},$$

$$b = -n_1\sqrt{n} = -k^{\frac{3}{2}}, \quad a = (k+1)^{\frac{3}{2}} + k^{\frac{3}{2}},$$

$$\beta = \frac{2a + 3\sqrt{k}}{a + \sqrt{k}}, \quad \gamma = -2,$$

$$1 - \gamma = 3, \qquad \alpha = -\frac{1}{a + \sqrt{k}};$$

donc

$$\Pi(k) = \frac{2a + 3\sqrt{k}}{3(a + \sqrt{k})} F - \frac{1}{3(a + \sqrt{k})} . \text{arc tang} \frac{ax - k^{\frac{1}{2}} x^3}{\sqrt{R}};$$

k est déterminé par l'équation

$$k = (\sqrt{k+1} - \sqrt{k})(\sqrt{k + c^2} - \sqrt{k}).$$

Considérons maintenant la troisième formule:

$$n_1 = -(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})(\sqrt{n + c^2} - \sqrt{n});$$

n_1 est donc toujours négatif. En différentiant on aura

$$dn_1 = -\tfrac{1}{2} n_1 \left(\frac{1}{\sqrt{n^2 + c^2 n}} - \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}} \right) dn;$$

l'accroissement de n_1 est donc positif.

Soit d'abord n très grand; on a alors

$$n_1 = -2\sqrt{n} \left(\tfrac{1}{2} \frac{c^2}{\sqrt{n}} \right) = -c^2.$$

Donc lorsque n est très grand, n_1 est très peu différent de $-c^2$, qui est aussi la plus petite valeur que puisse recevoir n_1. La plus grande est $-c$, qu'on obtient en faisant $n = 0$. Toutes les valeurs de n_1 sont donc renfermées entre $-c^2$ et $-c$.

On peut donc toujours supposer n négatif et compris entre ces deux limites très étroites.

La dernière formule est

$$n_1 = -(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n + c^2} + \sqrt{n}).$$

Si n est très grand, on a

$$n_1 = -\tfrac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} . 2\sqrt{n} = -1.$$

Donc, lorsque n est très grand, n_1 est très peu différent de -1. C'est la plus grande valeur que puisse avoir n_1. On obtient sa plus petite valeur en faisant $n = 0$, et on aura alors $n_1 = -c$. Donc n_1 est contenu entre -1 et $-c$.

Dans ce qui précède nous avons supposé n positif. Considérons maintenant le cas où n est négatif. Soit $n = -\alpha$, α étant positif, et soit d'abord

$$n_1 = -\alpha_1 = (\sqrt{-\alpha} + \sqrt{-\alpha+1})(\sqrt{-\alpha} + \sqrt{-\alpha+c^2}),$$

donc

$$\alpha_1 = \alpha\left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{\alpha}}\right)\left(1 + \sqrt{1 - \frac{c^2}{\alpha}}\right).$$

On voit par là que $\alpha_1 > \alpha$, et si α est extrêmement grand, on a

$$\alpha_1 = 4\alpha.$$

Lorsque

$$\alpha_1 = \alpha\left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{\alpha}}\right)\left(1 - \sqrt{1 - \frac{c^2}{\alpha}}\right),$$

on a $\alpha_1 < \alpha$, et si α est très grand, α_1 est très petit.

Lorsque

$$\alpha_1 = \alpha\left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{\alpha}}\right)\left(1 + \sqrt{1 - \frac{c^2}{\alpha}}\right),$$

on a, si α est très grand,

$$\alpha_1 = \alpha \frac{1}{2\alpha} \cdot 2 = 1,$$

ou plus approché

$$\alpha_1 = \alpha\left(\frac{1}{2\alpha} + \frac{1}{8\alpha^2}\right)\left(2 - \frac{c^2}{2\alpha}\right) = 1 + \frac{1-c^2}{4} \cdot \frac{1}{\alpha};$$

donc la plus petite valeur de α_1 est égale à 1; α_1 reçoit sa plus grande valeur en faisant $\alpha = 1$; alors on a

$$\alpha_1 = 1 + \sqrt{1-c^2}.$$

Lorsque

$$\alpha_1 = \alpha\left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{\alpha}}\right)\left(1 - \sqrt{1 - \frac{c^2}{\alpha}}\right),$$

toutes les valeurs de α_1 sont renfermées entre les limites

$$1 - \sqrt{1-c^2} \quad \text{et} \quad c^2.$$

Cherchons maintenant la valeur de n en n_1. En faisant le produit des quatre expressions suivantes:

$$\begin{aligned}
&n_1 - (\sqrt{n} + \sqrt{n+1})(\sqrt{n} + \sqrt{n+c^2}),\\
&n_1 - (\sqrt{n} - \sqrt{n+1})(\sqrt{n} - \sqrt{n+c^2}),\\
&n_1 - (\sqrt{n} - \sqrt{n+1})(\sqrt{n} + \sqrt{n+c^2}),\\
&n_1 - (\sqrt{n} + \sqrt{n+1})(\sqrt{n} - \sqrt{n+c^2}),
\end{aligned}$$

on aura

$$n_1^4 - 4nn_1^3 - [2c^2 + 4(1+c^2)n]n_1^2 - 4c^2nn_1 + c^4 = 0,$$

d'où l'on tire

$$n = \frac{(n_1^2 - c^2)^2}{4n_1(n_1+1)(n_1+c^2)}.$$

Cette valeur est très remarquable parce qu'elle est rationnelle en n_1 et en c^2. Elle est aussi très commode pour le calcul logarithmique, car on a

$$\log n = -\log 4 + 2\log(n_1 - c) + 2\log(n_1 + c) - \log n_1 - \log(n_1+1) - \log(n_1+c^2).$$

La formule trouvée dans ce qui précède, peut aussi servir à trouver une infinité de fonctions elliptiques de la troisième espèce qui sont indéfiniment réductibles à la première espèce. Il suffit de faire

$$n = n_m,$$

et on aura une intégrale $\Pi(n)$ déterminée par des logarithmes et par la fonction F.

Soit par exemple $n_1 = n$, on aura

$$n = \frac{(n^2 - c^2)^2}{4n(n+1)(n+c^2)},$$

ou

$$3n^4 + 4(1+c^2)n^3 + 6c^2n^2 - c^4 = 0,$$

d'où l'on tire quatre valeurs de n.

Lorsqu'on connaît une valeur de n telle que $\Pi(n)$ puisse s'exprimer par la fonction elliptique de la première espèce, on en peut trouver une infinité d'autres qui jouissent de la même propriété; ce qui est bien évident, car connaissant $\Pi(n)$ on connaît aussi

$$\Pi(n_1),\quad \Pi(n_2),\quad \Pi(n_3),\quad \text{etc.},$$
$$\Pi(n_{-1}),\quad \Pi(n_{-2}),\quad \Pi(n_{-3}),\quad \text{etc.},$$

en continuant la suite $n, n_1, n_2 \ldots$ vers le côté opposé.

Ainsi l'on a par exemple

$$\Pi(c) = \tfrac{1}{2}F + \frac{\frac{1}{2}}{1+c}\operatorname{arc\,tang}\frac{(1+c)x}{\sqrt{R}},$$

donc on connaît aussi $\Pi(n_1)$, où

$$1)\quad n_1 = (\sqrt{c+1} + \sqrt{c})(\sqrt{c^2+c} + \sqrt{c}),$$
$$2)\quad n_1 = (\sqrt{c+1} - \sqrt{c})(\sqrt{c^2+c} - \sqrt{c}),$$

$$3)\quad n_1 = -(\sqrt{c+1} - \sqrt{c})(\sqrt{c^2+c} + \sqrt{c})$$

$$4)\quad n_1 = -(\sqrt{c+1} + \sqrt{c})(\sqrt{c^2+c} - \sqrt{c}).$$

De ces valeurs on déduit ensuite de nouvelles.

On connaît aussi

$$\Pi(-1+\sqrt{1-c^2}),\ \text{donc aussi}\ \Pi(n_1),\ \text{où}$$

$$n_1 = \frac{[(-1+\sqrt{1-c^2})^2 - c^2]^2}{4(-1+\sqrt{1-c^2}).\sqrt{1-c^2}.(c^2-1+\sqrt{1-c^2})} = -1;$$

mais cette valeur rend la formule illusoire parce que $1-x^2$ est facteur de R.

Méthode pour trouver une infinité de formules de réduction pour les transcendantes elliptiques de la troisième espèce.

Pour trouver une formule de réduction pour les transcendantes elliptiques de la troisième espèce, il s'agit de trouver une relation entre deux de ces fonctions qui ne diffèrent que par rapport au paramètre. Cette relation doit être déduite en différentiant une fonction logarithmique de la forme

$$A.\log\frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}} + A'.\log\frac{P'+Q'\sqrt{R}}{P'-Q'\sqrt{R}} + \cdots,$$

expression qui peut aussi être mise sous cette forme

$$A.\operatorname{arc\,tang}\frac{Q\sqrt{R}}{P} + A'.\operatorname{arc\,tang}\frac{Q'\sqrt{R}}{P'} + \cdots.$$

Suivant ce qu'on a vu dans le chapitre second, il est aisé de voir que la relation entre les deux fonctions doit avoir la forme:

$$L\int\frac{dx}{(1+nx^2)\sqrt{R}} + L'\int\frac{dx}{(1+n_1x^2)\sqrt{R}} = C\int\frac{dx}{\sqrt{R}} + \Sigma A.\operatorname{arc\,tang}\frac{fx\sqrt{R}}{\varphi x}.$$

En mettant $-x$ au lieu de x, on aura

$$L\int\frac{dx}{(1+nx^2)\sqrt{R}} + L'\int\frac{dx}{(1+n_1x^2)\sqrt{R}} = C\int\frac{dx}{\sqrt{R}} - \Sigma A.\operatorname{arc\,tang}\frac{f(-x)\sqrt{R}}{\varphi(-x)}.$$

Il faut donc que $\frac{fx}{\varphi x}$ soit une fonction impaire, ou de la forme $xF(x^2)$.

Considérons seulement la fonction $A.\operatorname{arc\,tang}\frac{Q\sqrt{R}}{P} = S.$

En différentiant on aura

$$dS = \frac{d\,\frac{Q\sqrt{R}}{P}}{1+\frac{Q^2R}{P^2}} = \frac{\frac{1}{2}PQ\frac{dR}{dx}+R\left(P\frac{dQ}{dx}-Q\frac{dP}{dx}\right)}{P^2+Q^2R}\cdot\frac{dx}{\sqrt{R}} = \frac{M}{N}\cdot\frac{dx}{\sqrt{R}}.$$

Comme $\frac{M}{N}$ doit avoir la forme $C+\frac{L}{1+nx^2}+\frac{L'}{1+n_1x^2}$, il faut que

$$P^2+Q^2R=(1+nx^2)^{\mu}(1+n_1x^2)^{\mu'}=N,$$

μ et μ' étant des nombres entiers et positifs quelconques.

En différentiant on aura

$$2P\,dP+2QR\,dQ+Q^2dR=dN,$$

et en multipliant par P et remettant la valeur de P^2,

$$2(N-Q^2R)\,dP+2PQR\,dQ+PQ^2dR=PdN,$$

c'est-à-dire:

$$M=\frac{\frac{1}{2}P\frac{dN}{dx}-N\frac{dP}{dx}}{Q};$$

en substituant la valeur de N, on aura

$$M=\frac{1}{Q}(1+nx^2)^{\mu-1}.(1+n_1x^2)^{\mu'-1}\Big(P[\mu nx(1+n_1x^2)+$$

$$\mu'n_1x(1+nx^2)]-(1+nx^2)(1+n_1x^2)\frac{dP}{dx}\Big);$$

donc

$$\frac{M}{N}=\frac{\frac{1}{Q}\left([(\mu n+\mu'n_1)x+(\mu+\mu')nn_1x^3]P-[1+(n+n_1)x^2+nn_1x^4]\frac{dP}{dx}\right)}{(1+nx^2)(1+n_1x^2)}.$$

Le numérateur de cette fraction doit être de la forme:

$$(k+k'x^2+x^4)A.$$

Il y a deux cas à examiner selon que Q est une fonction paire ou impaire.

Si Q est une fonction paire, P est une fonction impaire. Dans ce cas, si $\mu+\mu'=2\nu$, la fonction Q est du degré $2\nu-2$, et P du degré $2\nu-1$; si au contraire $\mu+\mu'=2\nu+1$, la fonction Q est du dégre $2\nu-2$, et P du degré $2\nu+1$.

Si Q est une fonction impaire, P est une fonction paire. Dans ce cas, si $\mu+\mu'=2\nu$, Q est du degré $2\nu-3$, et P du degré 2ν; si au contraire $\mu+\mu'=2\nu+1$, Q est du degré $2\nu-1$, et P du degré 2ν.

Déterminons maintenant les quantités k et k'.

On a, en faisant $Q=fx$ et $P=\varphi x$,

$$M=\frac{1}{fx}[(\mu n+\mu' n_1)x+(\mu+\mu')nn_1x^3)\varphi x-(1+nx^2)(1+n_1x^2)\varphi' x]$$
$$=(k+k'x^2+x^4)A.$$

En faisant $x^2=-\frac{1}{n}$ et $x^2=-\frac{1}{n_1}$, on aura

$$\left(k-\frac{1}{n}k'+\frac{1}{n^2}\right)A=-\mu\sqrt{-n}\left(1-\frac{n_1}{n}\right)\frac{\varphi\left(\sqrt{-\frac{1}{n}}\right)}{f\left(\sqrt{-\frac{1}{n}}\right)},$$

$$\left(k-\frac{1}{n_1}k'+\frac{1}{n_1^2}\right)A=-\mu'\sqrt{-n_1}\left(1-\frac{n}{n_1}\right)\frac{\varphi\left(\sqrt{-\frac{1}{n_1}}\right)}{f\left(\sqrt{-\frac{1}{n_1}}\right)}.$$

Mais on a

$$(\varphi x)^2+(fx)^2(1-x^2)(1-c^2x^2)=(1+nx^2)^{\mu}(1+n_1x^2)^{\mu'};$$

donc en faisant $x^2=-\frac{1}{n}$ et $x^2=-\frac{1}{n_1}$,

$$\frac{\varphi\left(\sqrt{-\frac{1}{n}}\right)}{f\left(\sqrt{-\frac{1}{n}}\right)}=\sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{c^2}{n}\right)}\cdot\sqrt{-1},$$

$$\frac{\varphi\left(\sqrt{-\frac{1}{n_1}}\right)}{f\left(\sqrt{-\frac{1}{n_1}}\right)}=\sqrt{\left(1+\frac{1}{n_1}\right)\left(1+\frac{c^2}{n_1}\right)}\cdot\sqrt{-1};$$

donc en substituant,

$$k-\frac{1}{n}k'+\frac{1}{n^2}=\frac{\mu}{A}\cdot\frac{n-n_1}{\sqrt{n}}\sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{c^2}{n}\right)},$$

$$k-\frac{1}{n_1}k'+\frac{1}{n_1^2}=\frac{\mu'}{A}\cdot\frac{n_1-n}{\sqrt{n_1}}\sqrt{\left(1+\frac{1}{n_1}\right)\left(1+\frac{c^2}{n_1}\right)},$$

ou bien

$$k-\frac{1}{n}k'+\frac{1}{n^2}=\frac{\mu}{A}\cdot\frac{n-n_1}{n\sqrt{n}}\sqrt{(1+n)(c^2+n)},$$

$$k-\frac{1}{n_1}k'+\frac{1}{n_1^2}=\frac{\mu'}{A}\cdot\frac{n_1-n}{n_1\sqrt{n_1}}\sqrt{(1+n_1)(c^2+n_1)}.$$

On tire de là

$$k=\frac{1}{nn_1}+\frac{1}{A}\left(\frac{\mu\sqrt{(1+n)(c^2+n)}}{\sqrt{n}}+\frac{\mu'\sqrt{(1+n_1)(c^2+n_1)}}{\sqrt{n_1}}\right),$$

$$k' = \frac{1}{n} + \frac{1}{n_1} + \frac{1}{A}\left(\frac{\mu n_1 \sqrt{(1+n)(c^2+n)}}{\sqrt{n}} + \frac{\mu' n \sqrt{(1+n_1)(c^2+n_1)}}{\sqrt{n_1}}\right).$$

Soit pour abréger,

$$k = \frac{1}{nn_1} + \frac{l}{A},$$

$$k' = \frac{1}{n} + \frac{1}{n_1} + \frac{l'}{A},$$

on aura en substituant ces valeurs

$$(k + k'x^2 + x^4)A = \left[\frac{1}{nn_1} + \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n_1}\right)x^2 + x^4\right]A + l + l'x^2,$$

c'est-à-dire

$$(k + k'x^2 + x^4)A = \frac{(1+nx^2)(1+n_1x^2)}{nn_1}A + l + l'x^2.$$

Donc

$$\frac{M}{N} = \frac{A}{nn_1} + \frac{l + l'x^2}{(1+nx^2)(1+n_1x^2)}.$$

Soit

$$\frac{l + l'x^2}{(1+nx^2)(1+n_1x^2)} = \frac{L}{1+nx^2} + \frac{L'}{1+n_1x^2},$$

on aura

$$L = \frac{ln - l'}{n - n_1}, \quad L' = \frac{ln_1 - l'}{n_1 - n},$$

et, en substituant les valeurs de l et de l',

$$L = \frac{\mu\sqrt{(1+n)(c^2+n)}}{\sqrt{n}} \quad \text{et} \quad L' = \frac{\mu'\sqrt{(1+n_1)(c^2+n_1)}}{\sqrt{n_1}},$$

donc

$$\frac{M}{N} = \frac{A}{nn_1} + \frac{\mu\sqrt{(1+n)(c^2+n)}}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{1+nx^2} + \frac{\mu'\sqrt{(1+n_1)(c^2+n_1)}}{\sqrt{n_1}} \cdot \frac{1}{1+n_1x^2}.$$

En multipliant par $\frac{dx}{\sqrt{R}}$ et intégrant, on aura

$$\text{arc tang}\,\frac{Q\sqrt{R}}{P} = \frac{A}{nn_1}F + \frac{\mu\sqrt{(1+n)(c^2+n)}}{\sqrt{n}}\Pi(n) + \frac{\mu'\sqrt{(1+n_1)(c^2+n_1)}}{\sqrt{n_1}}\Pi(n_1);$$

ou bien, en désignant $\frac{\sqrt{(1+n)(c^2+n)}}{\sqrt{n}}$ par $\psi(n)$,

$$\text{arc tang}\,\frac{Q\sqrt{R}}{P} = \frac{A}{nn_1}F + \mu\psi(n)\,\Pi(n) + \mu'\psi(n_1)\,\Pi(n_1).$$

On tire de là

$$\Pi(n) = -\frac{\mu'}{\mu}\cdot\frac{\psi(n_1)}{\psi(n)}\,\Pi(n_1) - \frac{A}{\mu n n_1 \psi(n)}\,F + \frac{1}{\mu\psi(n)}\operatorname{arc\,tang}\frac{Q\sqrt{R}}{P},$$

ce qui est la formule de réduction demandée; n_1 est une fonction de n; je la désigne par $\chi(n)$.

En mettant n_1 au lieu de n, il faut mettre $\chi(n_1) = n_2$ à la place de n_1, on a donc

$$\Pi(n_1) = -\frac{\mu'}{\mu}\cdot\frac{\psi(n_2)}{\psi(n_1)}\,\Pi(n_2) - \frac{A'}{\mu n_1 n_2 \psi(n_1)}\,F + \frac{1}{\mu\psi(n_1)}\operatorname{arc\,tang}\frac{Q'\sqrt{R}}{P'}.$$

En substituant cette valeur, il vient

$$\Pi(n) = \left(\frac{\mu'}{\mu}\right)^2\frac{\psi(n_2)}{\psi(n)}\,\Pi(n_2) - \frac{1}{\mu\psi(n)}\left\{\frac{A}{nn_1} - \frac{A'\frac{\mu'}{\mu}}{n_1n_2}\right\}F$$
$$+\frac{1}{\mu\psi(n)}\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{Q\sqrt{R}}{P} - \frac{\mu'}{\mu}\operatorname{arc\,tang}\frac{Q'\sqrt{R}}{P'}\right).$$

En général on aura

$$\Pi(n) = \pm\left(\frac{\mu'}{\mu}\right)^m\frac{\psi(n_m)}{\psi(n)}\,\Pi(n_m)$$
$$-\frac{1}{\mu\psi(n)}\left\{\frac{A}{nn_1} - \frac{A'\left(\frac{\mu'}{\mu}\right)}{n_1n_2} + \frac{A''\left(\frac{\mu'}{\mu}\right)^2}{n_2n_3} - \frac{A'''\left(\frac{\mu'}{\mu}\right)^3}{n_3n_4}\cdots\pm\frac{A^{(m-1)}\left(\frac{\mu'}{\mu}\right)^{m-1}}{n_{m-1}n_m}\right\}F$$
$$+\frac{1}{\mu\psi(n)}\Bigg[\operatorname{arc\,tang}\frac{Q\sqrt{R}}{P} - \frac{\mu'}{\mu}.\operatorname{arc\,tang}\frac{Q'\sqrt{R}}{P'} +$$
$$\left(\frac{\mu'}{\mu}\right)^2\operatorname{arc\,tang}\frac{Q''\sqrt{R}}{P''} - \cdots \pm\left(\frac{\mu'}{\mu}\right)^{m-1}\operatorname{arc\,tang}\frac{Q^{(m-1)}\sqrt{R}}{P^{(m-1)}}\Bigg].$$

Soit par exemple $P = 1 + bx^2$, $Q = ex$, on aura

$$(1+bx^2)^2 + e^2x^2(1-x^2)(1-c^2x^2) = (1+nx^2)(1+n_1x^2)^2,$$

d'où l'on tire

$$1 + b = (1+n_1)\sqrt{1+n},$$
$$c^2 + b = (c^2+n_1)\sqrt{1+\frac{n}{c^2}},$$

donc

$$1 - c^2 = \sqrt{1+n} - c\sqrt{c^2+n} + n_1\left(\sqrt{1+n} - \sqrt{1+\frac{n}{c^2}}\right),$$

ce qui donne

$$n_1 = \frac{1 - c^2 - \sqrt{1+n} + c\sqrt{c^2+n}}{\sqrt{1+n} - \sqrt{1+\frac{n}{c^2}}},$$

ou en réduisant,

$$n_1 = \frac{c\,(c - \sqrt{c^2+n})\,(1 - \sqrt{1+n})}{n}.$$

XIV.

NOTE SUR LA FONCTION $\psi x = x + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} + \cdots + \frac{x^n}{n^2} + \cdots$

La fonction $\psi x = x + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} + \cdots + \frac{x^n}{n^2} + \cdots$ jouit de plusieurs propriétés remarquables, que je vais établir dans cette note. On trouve quelques-unes de ces propriétés dans *Legendre* Exerc. de calc. int. t. I, p. 244 et suiv. Les autres, si je ne me trompe, sont nouvelles. Comme la série $x + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} + \cdots$ n'est convergente que lorsque x ne surpasse pas l'unité, il s'ensuit que la fonction ψx n'a de valeur que pour les x compris entre les limites -1 et $+1$. Pour toute autre valeur de x, la fonction n'existe pas, parce qu'elle est exprimée par une série divergente. Nous supposons donc toujours x compris entre les limites -1 et $+1$.

En différentiant on obtient

$$d\,\psi x = dx\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{n} + \cdots\right),$$

c'est-à-dire

$$d\,\psi x = -\frac{dx}{x}\log(1-x);$$

donc

(1) $$\psi x = -\int \frac{dx}{x}\log(1-x),$$

l'intégrale étant prise depuis $x = 0$.

De cette expression de ψx il est facile de déduire les propriétés de cette fonction. En mettant $1-x$ au lieu de x, on obtient

$$\psi(1-x) = \int \frac{dx}{1-x} \log x,$$

et par suite

$$\psi x + \psi(1-x) = -\int \left(\frac{dx}{x} \log(1-x) - \frac{dx}{1-x} \log x \right);$$

donc

$$\psi x + \psi(1-x) = C - \log x . \log(1-x).$$

Si l'on fait ici $x=0$, $\log x . \log(1-x)$ disparaît, et l'on a $\psi(1) = C$; mais

(2) $$\psi(1) = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}.$$

On en conclut

(3) $$\psi x + \psi(1-x) = \frac{\pi^2}{6} - \log x . \log(1-x).$$

Cette formule donne la valeur de la fonction ψx pour toutes les valeurs de x comprises entre $\frac{1}{2}$ et 1, lorsqu'on connaît la valeur de la fonction pour les x qui sont compris entre 0 et $\frac{1}{2}$. Lorsque $x = \frac{1}{2}$, cette formule donne

(4) $$\psi(\tfrac{1}{2}) = \frac{\pi^2}{12} - \tfrac{1}{2}(\log 2)^2.$$

Si dans l'expression de ψx on met $-x$ au lieu de x, on obtient

$$\psi(-x) = -x + \frac{x^2}{2^2} - \frac{x^3}{3^2} + \frac{x^4}{4^2} - \cdots,$$

donc

$$\psi(x) + \psi(-x) = \tfrac{1}{2}\left(x^2 + \frac{x^4}{2^2} + \frac{x^6}{3^2} + \cdots\right);$$

c'est-à-dire, puisque $x^2 + \frac{x^4}{2^2} + \frac{x^6}{3^2} + \cdots = \psi(x^2)$,

(5) $$\psi(x) + \psi(-x) = \tfrac{1}{2}\psi(x^2).$$

Cette formule donne la fonction ψx pour les valeurs négatives de x, lorsqu'on connaît la fonction pour les valeurs positives de la variable. Dans le cas particulier où l'on fait $x=1$, on obtient

(6) $$\psi(-1) = -\tfrac{1}{2}\psi(1) = -\frac{\pi^2}{12},$$

c'est-à-dire

$$\frac{\pi^2}{12} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots$$

ce qui est connu.

Si dans l'équation (1) on met $\frac{x}{x+1}$ au lieu de x, il viendra

$$\psi\left(\frac{x}{x+1}\right) = \int\left(\frac{dx}{x} - \frac{dx}{x+1}\right)\log(1+x) = \int\frac{dx}{x}\log(1+x) - \int\frac{dx}{x+1}\log(x+1).$$

Or on a évidemment

$$\int\frac{dx}{x}\log(1+x) = -\psi(-x),$$

$$\int\frac{dx}{1+x}\log(1+x) = \tfrac{1}{2}[\log(1+x)]^2;$$

donc, en remarquant que la constante arbitraire due à l'intégration est zéro,

(7) $$\psi\left(\frac{x}{1+x}\right) + \psi(-x) = -\tfrac{1}{2}[\log(1+x)]^2.$$

En éliminant la quantité $\psi(-x)$ des équations (5) et (7), on obtiendra la suivante:

(8) $$\psi x = \tfrac{1}{2}[\log(1+x)]^2 + \tfrac{1}{2}\psi(x^2) + \psi\left(\frac{x}{x+1}\right).$$

Par cette formule on peut exprimer une fonction donnée ψx par d'autres fonctions, dans lesquelles la variable est aussi petite qu'on voudra. Car lorsque x est positif et moindre que l'unité, on a $x^2 < x$ et $\frac{x}{x+1} < x$. Si l'on fait par exemple $x = \frac{1}{2}$ et $x = \frac{1}{3}$, la formule donne

$$\psi(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2}(\log\tfrac{3}{2})^2 + \tfrac{1}{2}\psi(\tfrac{1}{4}) + \psi(\tfrac{1}{3}),$$

$$\psi(\tfrac{1}{3}) = \tfrac{1}{2}(\log\tfrac{4}{3})^2 + \tfrac{1}{2}\psi(\tfrac{1}{9}) + \psi(\tfrac{1}{4}).$$

En combinant ces deux équations avec celle-ci

$$\frac{\pi^2}{12} = \tfrac{1}{2}(\log 2)^2 + \psi(\tfrac{1}{2}),$$

on trouvera

$$\psi(\tfrac{1}{3}) = \frac{\pi^2}{18} - \tfrac{1}{6}(\log 3)^2 + \tfrac{1}{6}\psi(\tfrac{1}{9}),$$

$$\psi(\tfrac{1}{4}) = \frac{\pi^2}{18} + 2\log 2 . \log 3 - 2(\log 2)^2 - \tfrac{2}{3}(\log 3)^2 - \tfrac{1}{3}\psi(\tfrac{1}{9}).$$

De cette manière les fonctions $\psi(\frac{1}{3})$ et $\psi(\frac{1}{4})$ sont exprimées par des quantités connues et la fonction $\psi(\frac{1}{9})$. Si dans l'équation (8) on fait $x = \frac{1}{9}$, on obtient

$$\psi(\tfrac{1}{9}) = \tfrac{1}{2}(\log\tfrac{10}{9})^2 + \psi(\tfrac{1}{10}) + \tfrac{1}{2}\psi(\tfrac{1}{81}).$$

etc.

Toutes les formules démontrées ci-dessus se trouvent dans l'ouvrage cité de M. *Legendre*. Elles ne contiennent, comme on le voit, qu'une seule quantité arbitraire. Je vais maintenant en démontrer quelques autres, qui contiennent deux quantités indépendantes entre elles, et desquelles les formules précédentes doivent être considérées comme des cas particuliers.

Si dans l'équation

$$\psi x = -\int \frac{dx}{x} \log(1-x)$$

on met $\frac{a}{1-a} \cdot \frac{y}{1-y}$ à la place de x, on aura, en considérant a comme constant,

$$\psi\left(\frac{a}{1-a} \cdot \frac{y}{1-y}\right) = -\int \left(\frac{dy}{y} + \frac{dy}{1-y}\right) \log \frac{1-a-y}{(1-a)(1-y)};$$

c'est-à-dire

$$\psi\left(\frac{a}{1-a} \cdot \frac{y}{1-y}\right) = -\int \frac{dy}{y} \log\left(1 - \frac{y}{1-a}\right) + \int \frac{dy}{y} \log(1-y)$$

$$-\int \frac{dy}{1-y} \log\left(1 - \frac{a}{1-y}\right) + \int \frac{dy}{1-y} \log(1-a).$$

Toutes les intégrales du second membre de cette équation peuvent s'exprimer par la fonction ψ. En effet, on a

$$\int \frac{dy}{y} \log\left(1 - \frac{y}{1-a}\right) = -\psi\left(\frac{y}{1-a}\right),$$

$$\int \frac{dy}{y} \log(1-y) = -\psi(y);$$

donc

$$\psi\left(\frac{a}{1-a} \cdot \frac{y}{1-y}\right) = \psi\left(\frac{y}{1-a}\right) - \psi y - \log(1-a)\log(1-y) - \int \frac{dy}{1-y} \log\left(1 - \frac{a}{1-y}\right).$$

Soit $\frac{a}{1-y} = z$ ou, ce qui revient au même, $1-y = \frac{a}{z}$, $dy = \frac{adz}{z^2}$, on aura $\int \frac{dy}{1-y} \log\left(1 - \frac{a}{1-y}\right) = \int \frac{dz}{z} \log(1-z) = -\psi(z) = -\psi\left(\frac{a}{1-y}\right)$; donc l'équation ci-dessus donnera

$$\psi\left(\frac{a}{1-a} \cdot \frac{y}{1-y}\right) = \psi\left(\frac{y}{1-a}\right) + \psi\left(\frac{a}{1-y}\right) - \psi y - \log(1-a)\log(1-y) + C.$$

Pour déterminer la constante arbitraire, soit $y = 0$, on aura $C = -\psi(a)$. On aura par conséquent, en écrivant x au lieu de a,

$$(9)\quad \psi\left(\frac{x}{1-x}\cdot\frac{y}{1-y}\right) = \psi\left(\frac{y}{1-x}\right) + \psi\left(\frac{x}{1-y}\right) - \psi y - \psi x - \log(1-y)\log(1-x).$$

Dans cette formule x et y doivent avoir de telles valeurs que les quantités $\frac{x}{1-x}\cdot\frac{y}{1-y}$, $\frac{y}{1-x}$, $\frac{x}{1-y}$, y, x ne surpassent pas l'unité. C'est ce qui aura lieu lorsque x et y sont positifs, si $x+y<1$. Si y est négatif et égal à $-m$ on doit avoir $x+m<1$; et si x et y sont tous deux négatifs, il suffit qu'aucune de ces quantités ne surpasse l'unité.

XV.

DÉMONSTRATION DE QUELQUES FORMULES ELLIPTIQUES.

1.

Soient $a_0, a_1, a_2 \ldots b_0, b_1, b_2 \ldots$ des quantités quelconques dont l'une au moins est variable. Soit

$$p = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots,$$
$$q = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots,$$

et supposons

(1) $$p^2 - q^2(1 - c^2x^2)(1 + e^2x^2) = A(x - \varphi\theta_1)(x - \varphi\theta_2) \ldots (x - \varphi\theta_\mu),$$

où A est une constante. Alors je dis qu'on aura

$$\varphi(\pm\theta_1 \pm \theta_2 \pm \theta_3 \pm \ldots \pm \theta_\mu) = C,$$

en déterminant convenablement le signe des quantités $\theta_1, \theta_2, \ldots \theta_\mu$.

Démonstration. En posant dans l'équation (1) x égal à l'une des quantités $\varphi\theta_1, \varphi\theta_2, \ldots \varphi\theta_\mu$, on aura,

(2) $$p^2 - q^2(1 - c^2x^2)(1 + e^2x^2) = 0,$$

d'où l'on tire

$$p = \pm q\sqrt{(1 - c^2x^2)(1 + e^2x^2)};$$

ou bien, en faisant $x = \varphi\theta$,

$$p = \pm q . f\theta . F\theta.$$

Désignons le premier membre de l'équation (2) par R, on aura, en différentiant par rapport à x et $a_0, a_1 \ldots b_0, b_1 \ldots$,

(3) $$\frac{dR}{dx}dx + \delta R = 0,$$

où le signe δ se rapporte seulement aux quantités $a_0, a_1 \ldots b_0, b_1 \ldots$; mais

$$\delta R = 2p\delta p - 2q\delta q(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)$$
$$= 2p\delta p - 2q\delta q(f\theta)^2(F\theta)^2.$$

Donc en mettant pour p sa valeur $\pm qf\theta . F\theta$, et pour q sa valeur $\pm \frac{p}{f\theta . F\theta}$,

$$\delta R = \pm 2f\theta . F\theta (q\delta p - p\delta q).$$

L'équation (3) deviendra donc

$$\frac{dR}{dx}dx \pm 2f\theta . F\theta (q\delta p - p\delta q) = 0.$$

Or $x = \varphi\theta$, donc $dx = d\theta . f\theta . F\theta$; par suite

$$d\theta = \pm \frac{2(q\delta p - p\delta q)}{\frac{dR}{dx}}.$$

Le numérateur $2(p\delta q - q\delta p)$ est une fonction entière de x; en la désignant par ψx et faisant $\frac{dR}{dx} = \lambda x$, on aura

$$\pm d\theta = \frac{\psi x}{\lambda x}.$$

Soit pour abréger $\varphi\theta_m = x_m$, l'équation précédente donnera

$$\pm d\theta_1 = \frac{\psi x_1}{\lambda x_1}, \ \pm d\theta_2 = \frac{\psi x_2}{\lambda x_2}, \ \ldots \pm d\theta_\mu = \frac{\psi x_\mu}{\lambda x_\mu}.$$

Donc

$$\pm d\theta_1 \pm d\theta_2 \pm \ldots \pm d\theta_\mu = \frac{\psi x_1}{\lambda x_1} + \frac{\psi x_2}{\lambda x_2} + \ldots + \frac{\psi x_\mu}{\lambda x_\mu}.$$

Maintenant le degré de la fonction entière ψx est nécessairement moindre que celui de λx; donc, d'après un théorème connu, le second membre de l'équation précédente s'évanouira. On aura par conséquent

$$\pm d\theta_1 \pm d\theta_2 \pm d\theta_3 \pm \ldots \pm d\theta_\mu = 0.$$

De là on tire en intégrant,

$$\pm \theta_1 \pm \theta_2 \pm \theta_3 \pm \ldots \pm \theta_\mu = \text{const.},$$

et par suite

$$\varphi(\pm \theta_1 \pm \theta_2 \pm \theta_3 \pm \ldots \pm \theta_\mu) = C,$$

c. q. f. d.

Le signe des quantités $\theta_1, \theta_2 \ldots$ n'est pas arbitraire. Il est le même que celui du second membre de l'équation,

$$p = \pm qf\theta . F\theta.$$

2.

Je suis parvenu à ces deux formules:

$$(1)\quad \begin{cases} \varphi\left(\alpha\dfrac{\omega}{2}\right)=\dfrac{4\pi}{\omega}\left\{\sin\left(\dfrac{\alpha\pi}{2}\right)\dfrac{e^{\frac{\pi}{2}}}{e^{\pi}+1}-\sin\left(3\alpha\dfrac{\pi}{2}\right)\dfrac{e^{\frac{3\pi}{2}}}{e^{3\pi}+1}+\cdots\right\}, \\ f\left(\alpha\dfrac{\omega}{2}\right)=\dfrac{4\pi}{\omega}\left\{\cos\left(\dfrac{\alpha\pi}{2}\right)\dfrac{e^{\frac{\pi}{2}}}{e^{\pi}-1}-\cos\left(3\alpha\dfrac{\pi}{2}\right)\dfrac{e^{\frac{3\pi}{2}}}{e^{3\pi}-1}+\cdots\right\}, \end{cases}$$

où $\dfrac{\omega}{2}=\int_0^1\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$, $f\left(\alpha\dfrac{\omega}{2}\right)=\sqrt{1-\varphi^2\left(\alpha\dfrac{\omega}{2}\right)}$, et la fonction φ déterminée par la formule,

$$\theta=\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}},$$

en faisant $x=\varphi\theta$.

Si l'on développe la fonction $\varphi\theta$ suivant les puissances de θ, il est clair qu'on aura un résultat de la forme:

$$\varphi\theta=\theta+\frac{A_1\theta^5}{1.2.3.4.5}+\frac{A_2\theta^9}{1.2.3\ldots9}+\cdots+\frac{A_n\theta^{4n+1}}{1.2.3\ldots(4n+1)}+\cdots,$$

où $A_1, A_2 \ldots A_n \ldots$ sont des nombres rationnels et même entiers. On aura de même, en développant la fonction $f\theta$,

$$f\theta=1-\tfrac{1}{2}\theta^2+\frac{B_2\theta^4}{1.2.3.4}-\frac{B_3\theta^6}{1.2\ldots6}+\cdots\pm\frac{B_n\theta^{2n}}{1.2\ldots2n}\mp\cdots.$$

En vertu de ces formules les deux équations (1) donneront, en développant suivant les puissances de α,

$$\frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{e^{\pi}+1}-3^{4n-1}\frac{e^{\frac{3\pi}{2}}}{e^{3\pi}+1}+5^{4n-1}\frac{e^{\frac{5\pi}{2}}}{e^{5\pi}+1}-\cdots=0.$$

$$\frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{e^{\pi}+1}-3^{4n+1}\frac{e^{\frac{3\pi}{2}}}{e^{3\pi}+1}+5^{4n+1}\frac{e^{\frac{5\pi}{2}}}{e^{5\pi}+1}-\cdots=\tfrac{1}{4}A_n\left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{4n+2}.$$

$$\frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{e^{\pi}-1}-3^{2n}\frac{e^{\frac{3\pi}{2}}}{e^{3\pi}-1}+5^{2n}\frac{e^{\frac{5\pi}{2}}}{e^{5\pi}-1}-\cdots=\tfrac{1}{4}B_n\left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{2n+1}.$$

La première de ces formules a été trouvée par M. *Cauchy* dans ses Exercices de mathématiques t. II. p. 267.

XVI.

SUR LES SÉRIES.

Définition. Une série

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

est dite convergente, si dans

$$s_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$$

on peut prendre n tel que s_{n+m} est différent d'une quantité déterminée s d'une quantité aussi petite qu'on voudra. Dans ce cas s sera appelé la somme de la série, et on écrit

$$s = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots.$$

Si s_n, pour toutes les valeurs de n, est contenu entre des limites finies, la série est dite indéterminée, et si s_n peut surpasser toute limite, la série est appelée divergente.

De là il suit:

Théorème. Pour qu'une série soit convergente, il est nécessaire et il suffit que la somme $u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+m}$, pour une valeur quelconque de m et pour toute valeur de n plus grande qu'une certaine limite aussi grande qu'on voudra, soit contenue entre des limites aussi resserrées qu'on voudra.

1. *Sur la convergence des séries dont tous les termes sont positifs.*

Théorème. Si la série

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

est divergente, la série suivante:

$$\frac{u_1}{s_0^\alpha}+\frac{u_2}{s_1^\alpha}+\frac{u_3}{s_2^\alpha}+\cdots+\frac{u_n}{s_{n-1}^\alpha}+\cdots$$

le sera de même, si α ne surpasse pas l'unité.

On a

$$\log\frac{s_n}{s_{n-1}}=\log\left(1+\frac{u_n}{s_{n-1}}\right)<\frac{u_n}{s_{n-1}},$$

donc

$$s_n'=\frac{u_1}{s_0}+\frac{u_2}{s_1}+\cdots+\frac{u_n}{s_{n-1}}>\log\frac{s_n}{s_{n-1}}+\log\frac{s_{n-1}}{s_{n-2}}+\cdots+\log\frac{s_1}{s_0},$$

$$s_n'>\log s_n-\log s_0;$$

donc en remarquant que s_n peut surpasser toute limite, s' est divergente, et à plus forte raison celle-ci

$$\frac{u_1}{s_0^\alpha}+\frac{u_2}{s_1^\alpha}+\cdots+\frac{u_n}{s_{n-1}^\alpha}+\cdots,$$

où $\alpha<1$.

Théorème. Si la série Σu_n est divergente, la série $\Sigma\frac{u_n}{s_n^{\alpha+1}}$ est convergente, si α est positif.

$$s_{n-1}^{-\alpha}-s_n^{-\alpha}=(s_n-u_n)^{-\alpha}-s_n^{-\alpha}>s_n^{-\alpha}+\alpha s_n^{-\alpha-1}.u_n-s_n^{-\alpha}=\alpha.\frac{u_n}{s_n^{1+\alpha}},$$

par conséquent la serie

$$\Sigma\frac{u_n}{s_n^{1+\alpha}}$$

est convergente.

Application. Supposons que $u_n=1$, on a $s_n=n$. Par conséquent la série

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

est divergente, et celle-ci

$$1+\frac{1}{2^{\alpha+1}}+\frac{1}{3^{\alpha+1}}+\cdots+\frac{1}{n^{\alpha+1}}+\cdots$$

est convergente.

Si une série $\Sigma\varphi n$ est divergente, il faut pour qu'une série quelconque Σu_n soit convergente, que la plus petite des limites de $\frac{u_n}{\varphi n}$ soit zéro.

En effet, dans le cas contraire

$$u_n = p_n . \varphi n,$$

où p_n ne sera pas moindre que α. Donc

$$\Sigma u_n > \Sigma \alpha . \varphi n = \alpha \Sigma \varphi n,$$

par conséquent divergente.

On a vu que $\Sigma \frac{1}{n}$ est divergente, donc pour qu'une série Σu_n soit convergente, il faut que la plus petite des limites de $n u_n$ soit zéro.

Mais cela ne suffit pas. En général on peut démontrer qu'il n'existe pas de fonction φn telle que toute autre série Σu_n sera convergente, si $\lim. (\varphi n . u_n) = 0$, et divergente dans le cas contraire. En effet, la série

$$\Sigma \frac{1}{\varphi n}$$

sera alors divergente d'après l'hypothèse, et la suivante

$$\Sigma \frac{1}{\varphi n . \Sigma \frac{1}{\varphi (n-1)}}$$

convergente; mais nous avons vu que cette série est divergente en même temps que la précédente. Donc M. *Olivier* s'est trompé sérieusement.

La série

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3\left(1+\frac{1}{2}\right)} + \frac{1}{4\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)} + \cdots + \frac{1}{n\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}\right)} + \cdots$$

est divergente. Or

$$\log(1+n) - \log n = \log\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n},$$

donc

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1} > \log n.$$

Par conséquent la série

$$\frac{1}{2\log 2} + \frac{1}{3\log 3} + \frac{1}{4\log 4} + \cdots + \frac{1}{n\log n} + \cdots$$

est divergente.

Soit φn une fonction continue de n indéfiniment croissante, on a

$$\varphi(n+1)=\varphi(n)+\varphi' n+\frac{\varphi''(n+\theta)}{1.2},$$

$$\varphi(n+1)-\varphi n<\varphi' n,$$

$$\varphi'(0)+\varphi'(1)+\cdots+\varphi'(n)>\varphi(n+1)-\varphi(0);$$

la série

$$\varphi'(0)+\varphi'(1)+\cdots+\varphi'(n)+\cdots$$

est donc divergente.

Soit

$$\varphi_m n=\log^m(n+a),$$

on a

$$\varphi'_m n=\frac{d}{dn}\log\varphi_{m-1}n=\frac{\varphi'_{m-1}n}{\varphi_{m-1}n},$$

$$\varphi'_m n=\frac{1}{(n+a).\log(n+a).\log^2(n+a)\ldots\log^{m-1}(n+a)};$$

donc la série

$$\Sigma\frac{1}{n.\log n.\log^2 n.\log^3 n\ldots\log^{m-1}n}$$

est divergente.

$$\varphi n=\int_a^n\frac{d(\log^m n)}{(\log^m n)^\alpha}=\frac{(\log^m n)^{1-\alpha}}{1-\alpha},$$

$$\varphi n=C-\frac{1}{\alpha-1}\cdot\frac{1}{(\log^m n)^{\alpha-1}},$$

$$\varphi' n=\frac{d(\log^m n)}{dn}\cdot\frac{1}{(\log^m n)^\alpha},$$

$$\varphi(n+1)-\varphi n=\varphi'(n+\lambda)>\varphi'(n+1),\quad(\lambda<1),$$

$$\varphi' n<\frac{1}{\alpha-1}\left\{\frac{1}{[\log^m(n-1)]^{\alpha-1}}-\frac{1}{(\log^m n)^{\alpha-1}}\right\},$$

$$\varphi'(n-1)<\frac{1}{\alpha-1}\left\{\frac{1}{[\log^m(n-2)]^{\alpha-1}}-\frac{1}{[\log^m(n-1)^{\alpha-1}]}\right\},$$

. . . .

$$\varphi'(a)+\varphi'(a+1)+\cdots+\varphi' n<\frac{1}{\alpha-1}\cdot\frac{1}{[\log^m(a-1)]^{\alpha-1}},$$

$\varphi'(a)+\varphi'(a+1)+\cdots+\varphi'(n)+\cdots$ convergente.

La série

$$\Sigma\frac{1}{n.\log n.\log^2 n.\log^3 n\ldots\log^{m-1}n.(\log^m n)^{1+\alpha}}$$

est donc convergente, si $\alpha>0$.

Si

$$\lim. \frac{\log\left(\frac{1}{u_n . n . \log n .. \log^{m-1} n}\right)}{\log^{m+1} n} > 1,$$

la série est convergente; si < 1, elle est divergente.

En effet, dans le premier cas on aura

$$\frac{1}{u_n . n . \log n \ldots \log^{m-1} n} > (\log^m n)^{1+\alpha},$$

$$u_n < \frac{1}{n . \log n \ldots \log^{m-1} n . (\log^m n)^{1+\alpha}},$$

etc.

Si

$$\lim. \frac{\log\left(\frac{1}{u_n} \cdot \frac{d}{dn} \log^m n\right)}{\log^{m+1} n} > 1, \text{ convergente;}$$

$$< 1, \text{ divergente;}$$

$$= 1, \text{ tantôt convergente, tantôt divergente.}$$

Si la série $\Sigma a_n x^n$ est convergente entre $-\alpha$ et $+\alpha$, on aura les différentielles en différentiant chaque terme. Ces différentielles seront toutes des fonctions continues entre les limites $-\alpha$ et $+\alpha$.

Si $\varphi_0(y) + \varphi_1(y) . x + \varphi_2(y) . x^2 + \cdots + \varphi_n(y) . x^n + \cdots = f(y)$ est convergente pour toute valeur de x moindre que α, et toute valeur de y depuis β inclusivement jusqu'à une autre quantité quelconque, on aura

$$\lim_{y=\beta-\omega} f(y) = \lim_{y=\beta-\omega} \varphi_0(y) + x . \lim_{y=\beta-\omega} \varphi_1(y) + \cdots$$

$$= A_0 + A_1 x + \cdots + A_n x^n + \cdots = R,$$

toutes les fois que cette dernière série est convergente.

$$[f(\beta-\omega)-R] = [\varphi_0(\beta-\omega)-A_0] + [\varphi_1(\beta-\omega)-A_1] . x + \cdots + [\varphi_n(\beta-\omega)-A_n] x^n + \cdots$$

$$= [\varphi_0(\beta-\omega)-A_0] + [x_1 \varphi_1(\beta-\omega)-A_1 x_1] x_2 + \cdots + [\varphi_n(\beta-\omega) . x_1^n - A_n x_1^n] x_2^n + \cdots,$$

où $x_1 < \alpha$, $x_2 < 1$.

Soit $[\varphi_m(\beta-\omega)x_1^m - A_m x_1^m]$ le plus grand des termes

$$\varphi_0(\beta-\omega) - A_0, \quad \varphi_1(\beta-\omega) . x_1 - A_1 x_1, \ \ldots,$$

on aura

$$f(\beta-\omega) = R + \frac{k}{1-x_2} . [\varphi_m(\beta-\omega) . x_1^m - A_m x_1^m],$$

où k est compris entre $+1$ et -1. Le coefficient de k converge pour des valeurs décroissantes de ω vers zéro, donc

$$\lim_{y=\beta-\omega} f(y) = R = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots.$$

De là on aura encore ce théorème:

Si $\varphi_0 y, \varphi_1 y, \ldots$ sont des fonctions continues de y entre β et α, si de plus la série

$$f(y) = \varphi_0(y) + \varphi_1(y) . x + \varphi_2(y) . x^2 + \cdots$$

est convergente pour toutes les valeurs de x moindres que α, $f(y)$ sera de même une fonction continue de y.

Par exemple, la série

$$f(y) = 1^y . x + 2^y . x^2 + 3^y . x^3 + 4^y . x^4 + \cdots + n^y . x^n + \cdots$$

est convergente si $x < 1$, quel que soit y; donc $f(y)$ est une fonction continue de y depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$.

$$f(y) = \sin y . x + \tfrac{1}{2} \sin 2y . x^2 + \tfrac{1}{3} \sin 3y . x^3 + \cdots$$

est fonction continue de y, si $x < 1$. Si $x = 1$, la série est encore convergente, mais dans ce cas $f(y)$ est discontinue pour certaines valeurs de y.

$$f(y) = \frac{y}{1+y^2} + \frac{y}{4+y^2} x + \frac{y}{9+y^2} x^2 + \cdots$$

est convergente si $x < 1$, quel que soit y. Donc $f(y)$ est fonction continue de y. Si par exemple y converge vers $\frac{1}{0}$, $f(y)$ convergera vers zéro. Si au contraire $x = 1$, la série est encore convergente, mais pour des valeurs croissantes de y, $f(y)$ convergera alors vers $\frac{\pi}{2}$, et non vers zéro.

Remarque I. Si une série

$$\varphi_0(y) + \varphi_1(y) . x + \varphi_2(y) . x^2 + \cdots + \varphi_n(y) . x^n + \cdots$$

est convergente pour $x < \alpha$ et $y < \beta$, la série suivante n'est pas toujours convergente:

$$A_0 + A_1 . x + A_2 . x^2 + \cdots + A_n . x^n + \cdots;$$

par exemple

$$\frac{\sin ay}{y} + \frac{\sin a^2 y}{y} x + \cdots + \frac{\sin a^{n+1} y}{y} x^n + \cdots$$

est convergente, si $x < 1$, $y > 0$; la série

$$A_0 + A_1 x + \cdots \quad \text{ou} \quad a + a^2 x + \cdots + a^{n+1} x^n + \cdots$$

est divergente, si $ax > 1$.

Remarque II. $\underset{y=\beta-\omega}{\text{Lim.}} [\varphi_0(y) + \varphi_1(y) . x + \cdots + \varphi_n(y) . x^n + \cdots]$ finie sans que la série $A_0 + A_1 x + \cdots + A_n x^n + \cdots$ soit convergente; par exemple

$$1 + a + \cdots + a^y - [1 + 2a + \cdots + (y+1) a^y] . x + \left(1 + 3a + \cdots + \frac{(y+1)(y+2)}{2} a^y\right) x^2 - \cdots$$

$$= \frac{1}{1+x} + \frac{a}{(1+x)^2} + \cdots + \frac{a^y}{(1+x)^{y+1}}, \quad \underset{y=\frac{1}{0}}{\text{lim.}} (fy) = \frac{1}{1+x-a}.$$

Nous avons vu que

$$\underset{x=\beta\pm\omega}{\text{lim.}} (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots) = a_0 + a_1 \beta + a_2 \beta^2 + a_3 \beta^3 + \cdots,$$

si la dernière série est convergente; je dis que si $a_n x^n$ finit par être positif,

$$P = \underset{x=\alpha-\omega}{\text{lim.}} (a_0 + a_1 x + \cdots) = \frac{1}{0},$$

si $a_0 + a_1 \alpha + a_2 \alpha^2 + \cdots$ est divergente.

[Posons]

$$R = \underset{x=\alpha-\omega}{\text{lim.}} (a_m x^m + a_{m+1} x^{m+1} + a_{m+2} x^{m+2} + \cdots + a_{m+n} x^{m+n}),$$

où a_m, a_{m+1}, ... sont positifs, [et soit]

$$(\alpha - \omega)^n = \alpha^n \delta,$$

$$\omega = \alpha\left(1 - \sqrt[n]{\delta}\right),$$

[on aura]

$$R = a^m \alpha^m \delta^{\frac{m}{n}} + a_{m+1} \alpha^{m+1} \delta^{\frac{m+1}{n}} + \cdots + a_{m+n} \alpha^{m+n} . \delta^{\frac{m}{n}+1},$$

$$R > (a^m \alpha^m + a_{m+1} \alpha^{m+1} + \cdots + a_{m+n} \alpha^{m+n}) \delta^{\frac{m}{n}+1},$$

donc etc.

Soit

$$fx = (a_0^{(0)} + a_1^{(0)}x + a_2^{(0)}x^2 + \cdots) + (a_0^{(1)} + a_1^{(1)}x + a_2^{(1)}x^2 + \cdots) + \cdots$$
$$+ (a_0^{(n)} + a_1^{(n)}x + a_2^{(n)}x^2 + \cdots) + \cdots$$

une série convergente, si $x < 1$.

Soit

$$A_0 = \lim_{n=\frac{1}{0}} . (a_0^{(0)} + a_0^{(1)} + a_0^{(2)} + \cdots + a_0^{(n)}),$$
$$A_1 = \lim_{n=\frac{1}{0}} . (a_1^{(0)} + a_1^{(1)} + a_1^{(2)} + \cdots + a_1^{(n)}) \text{ etc.},$$

on aura

$$fx = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots + A_m x^m + \cdots,$$

si la dernière série est convergente.

[Posons]

$$f_n x = A_0^{(n)} + A_1^{(n)} x + \cdots + A_m^{(n)} x^m + \cdots$$

donc

$$fx = A_0 + A_1 x + \cdots + A_m x^m + \cdots.$$

Développement de $f(x+\omega)$ suivant les puissances de ω.

$$f(x+\omega) = a_0 + a_1(x+\omega) + a_2(x+\omega)^2 + \cdots, \quad x+\omega < 1;$$
$$f(x+\omega) = a_0 + (a_1 x + a_1 \omega) + (a_2 x^2 + 2a_2 x\omega + a_2\omega^2) + \cdots,$$

donc

$$f(x+\omega) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + (a_1 + 2a_2 x + \cdots)\omega + \cdots,$$

c'est-à-dire:

$$f(x+\omega) = fx + \frac{f'x}{1}\omega + \frac{f''x}{1.2}\omega^2 + \cdots,$$

si cette série est convergente. Or elle le sera toujours: On a

$$\frac{f^n x}{1.2\ldots n} = a_n + (n+1)a_{n+1}x + \frac{(n+1)(n+2)}{1.2}a_{n+2}x^2 + \cdots,$$

$$x_1^n \frac{f^n x}{1.2.3\ldots n} = x_1^n a_n + (n+1)a_{n+1}x_1^{n+1}x_2 + \frac{(n+1)(n+2)}{1.2}a_{n+2}x_1^{n+2}x_2^2 + \cdots,$$

$$x+\omega = x_1, \qquad x_1 < 1,$$

$$x = x_1 x_2, \qquad x_2 < 1,$$

$$x_1^n \frac{f^n x}{1.2\ldots n} < v_n \frac{1}{(1-x_2)^{n+1}},$$

$$\omega^n \frac{f^n x}{1.2\ldots n} < v_n \frac{\omega^n}{x_1^n (1-x_2)^{n+1}} = v_n \left(\frac{\omega}{x_1 - x_1 x_2}\right)^n \frac{1}{1-x_2} = \frac{v_n}{1-x_2}$$

$$\lim_{n=\frac{1}{0}} \left\{ \frac{\omega^n f^n x}{1.2\ldots n} \right\} = \text{zéro}, \quad \text{donc etc.}$$

XVII.

MÉMOIRE SUR LES FONCTIONS TRANSCENDANTES DE LA FORME $\int y\,dx$, OÙ y EST UNE FONCTION ALGÉBRIQUE DE x.

§ 1.

Sur la forme de la relation la plus générale possible entre un nombre quelconque d'intégrales de la forme $\int y\,dx$.

Soient $\int y_1 dx$, $\int y_2 dx$, $\ldots \int y_\mu dx$, un nombre quelconque d'intégrales et supposons qu'on ait entre ces fonctions l'équation suivante:

$$\varphi\left(\int y_1 dx,\ \int y_2 dx,\ \ldots \int y_\mu dx,\ x\right) = 0 = R,$$

où φ désigne une fonction entière de $\int y_1 dx$, $\int y_2 dx$, $\ldots$ et d'un nombre quelconque de fonctions algébriques.

En différentiant il viendra

$$R' = \varphi'(r_1) \cdot y_1 + \varphi'(r_2)\, y_2 + \cdots + \varphi'(r_\mu)\, y_\mu + \varphi'(x) = 0.$$

Nous pourrons supposer que $R = 0$ est irréductible par rapport à r_μ; alors on aura

$$R = r_\mu^k + P r_\mu^{k-1} + P_1 r_\mu^{k-2} + \cdots = 0,$$

$$R' = r_\mu^{k-1}(k y_\mu + P') + [(k-1) P y_\mu + P_1'] \, r_\mu^{k-2} + \cdots = 0,$$

$$k y_\mu + P' = 0,$$

$$\int y_\mu dx = -\frac{1}{k} \cdot P = r_\mu,$$

donc

$$k = 1,\ \ R = r_\mu + P = 0.$$

$$P = \Sigma \frac{S_k}{(r_{\mu-1}+t_k)^k} + \Sigma v_k r_{\mu-1}^k,$$

$$P' = \Sigma\left(-\frac{k S_k (y_{\mu-1}+t_k')}{(r_{\mu-1}+t_k)^{k+1}} + \frac{S_k'}{(r_{\mu-1}+t_k)^k}\right)$$

$$+\Sigma(v_k' r_{\mu-1}^k + k.v_k.r_{\mu-1}^{k-1} y_{\mu-1}) = -y_\mu,$$

donc

$$S_k = 0,$$

de là:

$$y_\mu + v_k' r_{\mu-1}^k + (k v_k y_{\mu-1} + v'_{k-1}) r_{\mu-1}^{k-1} + \cdots = 0$$

$$v_k' = 0;\ \ k v_k y_{\mu-1} + v'_{k-1} = 0, \text{ si non } k = 1.$$

$$k v_k \int y_{\mu-1}\,dx + v_{k-1} = C,$$

$$k v_k . r_{\mu-1} + v_{k-1} = C,$$

ce qui est impossible, donc

$$k = 1, \text{ et } P = v_1 r_{\mu-1} + P_1.$$

Donc

$$R = r_\mu + P = 0,$$

$$P = v_{\mu-1} r_{\mu-1} + P_1,$$

$$P_1 = v_{\mu-2} r_{\mu-2} + P_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

En général on aura donc

$$r_\mu + v_{\mu-1}.r_{\mu-1} + v_{\mu-2}.r_{\mu-2} + \cdots + v_1.r_1 + v_0 = 0$$

où $v_1, v_2 \ldots v_{\mu-1}$ sont des constantes. Donc enfin

Théorème I.

$$c_1\int y_1\,dx + c_2\int y_2\,dx + c_3\int y_3\,dx + \cdots + c_\mu\int y_\mu\,dx = P,$$

où P fonction algébrique de x.

Soit

$$P^k + R_1 P^{k-1} + \cdots = 0,$$

irréductible, R_1 etc. étant des fonctions rationnelles de

$$x,\ y_1,\ y_2,\ y_3,\ \ldots y_\mu.$$

On aura

$$(k\,dP + dR_1) P^{k-1} + [(k-1) R_1\,dP + dR_2] P^{k-2} + \cdots = 0;$$

$$\frac{dP}{dx} = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 + \cdots,$$

$$k\,dP + dR_1 = 0,$$

$$P = -\frac{R_1}{k} + C;$$

par suite $k = 1$, $P = -R$. Donc

Théorème II.

$$c_1 \int y_1\,dx + c_2 \int y_2\,dx + \cdots + c_\mu \int y_\mu\,dx = P,$$

où P fonction rationnelle de $x, y_1, y_2, y_3, \ldots y_\mu$.

§ 2.

Trouver la relation la plus générale possible entre les intégrales $\int y_1\,dx;\ \int y_2\,dx;\ \ldots \int y_\mu\,dx;$ $\log v_1;\ \log v_2;\ \ldots \log v_m$.

On doit avoir d'abord

$$c_1 \int y_1\,dx + c_2 \int y_2\,dx + \cdots + c_\mu \int y_\mu\,dx = P + a_1 \log v_1 + a_2 \log v_2 + \cdots + a_m \log v_m,$$

où

$$P = \text{fonct. rat.}\,(x,\ y_1,\ y_2,\ \ldots y_\mu,\ v_1,\ v_2,\ \ldots v_m).$$

Supposons que v_m soit une fonction algébrique des quantités $x, y_1, y_2, \ldots y_\mu, v_1, v_2, \ldots v_{m-1}$ de l'ordre n, et soient $v_m', v_m'', \ldots v_m^{(n)}$ les n valeurs, on aura

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_\mu y_\mu = \text{fonct. rat.}\,(x,\ y_1,\ y_2,\ \ldots y_m,\ v_1 \ldots v_{m-1},\ v_m),$$

équation qui aura lieu pour une valeur quelconque de v_m, donc

$$c_1 \int y_1\,dx + c_2 \int y_2\,dx + \cdots + c_\mu \int y_\mu\,dx = \frac{1}{n}(P' + P'' + \cdots + P^{(n)})$$
$$+ a_1 \log v_1 + \cdots + a_{m-1} \log v_{m-1} + \frac{1}{n} a_m \log (v_m' v_m'' \ldots v_m^{(n)}).$$

En général

Théorème III.

$$c_1 \int y_1 dx + c_2 \int y_2 dx + \cdots + c_\mu \int y_\mu dx = P + \alpha_1 \log t_1 + \alpha_2 \log t_2 + \cdots + \alpha_m \log t_m,$$

où $P, t_1, \ldots t_m$ sont des fonctions rationnelles de $x, y_1, y_2, \ldots y_\mu$.

Théorème IV.

$$\int \psi_1(x, y_1)\,dx + \int \psi_2(x, y_2)\,dx + \cdots + \int \psi_\mu(x, y_\mu)\,dx$$
$$= P + \alpha_1 \log t_1 + \alpha_2 \log t_2 + \cdots + \alpha_m \log t_m.$$

Théorème V. S'il est possible d'exprimer $\int \psi(x, y)\,dx$ par une fonction algébrique de x, y, $\log v_1$, $\log v_2 \ldots \log v_m$, on pourra toujours exprimer la même intégrale comme il suit:

$$\int \psi(x, y)\,dx = P + \alpha_1 \log t_1 + \alpha_2 \log t_2 + \cdots + \alpha_m \log t_m.$$

Théorème VI. Supposons que

$$\int \psi(x, y)\,dx + \int \psi_1(x, y_1)\,dx = R,$$

et qu'il soit impossible d'avoir $f(y, y_1, x) = 0$, je dis que

$$\int \psi(x, y)\,dx = R_1, \int \psi_1(x, y_1)\,dx = R_2.$$

En effet

$$\psi(x, y) + \psi_1(x, y_1) = \frac{dR}{dx},$$

équation qui doit avoir lieu en remplaçant y_1 par l'une quelconque des valeurs de cette fonction: y_1', y_1'', $\ldots y_1^{(n)}$, donc

$$n \cdot \psi(x, y)\,dx + [\psi_1(x, y_1') + \psi_1(x, y_1'') + \cdots + \psi_1(x, y_1^{(n)})]\,dx$$
$$= d(R' + R'' + \cdots + R^{(n)}),$$

donc

$$\int \psi(x, y)\,dx = \frac{1}{n}(R' + R'' + \cdots + R^{(n)}) - \int f(x)\,dx = R_1,$$

et par suite

$$\int \psi_1(x, y_1)\,dx = R - R_1 = R_2.$$

Théorème VII. Soit

$$y = p_0 + p_1 s^{-\frac{1}{n}} + p_2 s^{-\frac{2}{n}} + \cdots + p_{n-1} s^{-\frac{n-1}{n}},$$

où $p_0, p_1, \ldots p_{n-1}, s$ sont des fonctions algébriques quelconques telles qu'il soit impossible d'exprimer $s^{\frac{1}{n}}$ rationnellement en $p_0, p_1, \ldots p_{n-1}, s$, je dis que

$$\int y\,dx = R$$

entraîne les suivantes:

$$\int p_0\,dx = R_0, \int \frac{p_1\,dx}{s^{\frac{1}{n}}} = R_1, \int \frac{p_2\,dx}{s^{\frac{2}{n}}} = R_2, \ldots \int \frac{p_{n-1}\,dx}{s^{\frac{n-1}{n}}} = R_{n-1}.$$

En effet, ayant

$$y dx = dR = df(s^{\frac{1}{n}}) = \psi(s^{\frac{1}{n}})\,dx,$$

on doit avoir en même temps

$$df(\alpha s^{\frac{1}{n}}) = \psi(\alpha s^{\frac{1}{n}})\,dx,$$

$$df(\alpha^2 s^{\frac{1}{n}}) = \psi(\alpha^2 s^{\frac{1}{n}})\,dx,$$

. . . .

$$df(\alpha^{n-1} s^{\frac{1}{n}}) = \psi(\alpha^{n-1} s^{\frac{1}{n}})\,dx;$$

donc

$$R_0 + R_1 + R_2 + \cdots + R_{n-1} = f(s^{\frac{1}{n}}),$$

$$R_0 + \alpha^{-1} R_1 + \alpha^{-2} R_2 + \cdots + \alpha^{-(n-1)} R_{n-1} = f(\alpha s^{\frac{1}{n}}),$$

. . . .

$$R_0 + \alpha^{-(n-1)} R_1 + \alpha^{-2(n-1)} R_2 + \cdots + \alpha^{-(n-1)^2} R_{n-1} = f(\alpha^{n-1} s^{\frac{1}{n}});$$

donc

$$n R_m = f(s^{\frac{1}{n}}) + \alpha^m f(\alpha s^{\frac{1}{n}}) + \cdots + \alpha^{m(n-1)} f(\alpha^{n-1} s^{\frac{1}{n}}),$$

et

$$\int \frac{p_m\,dx}{s^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{n}\,[f(\sqrt[n]{s}) + \alpha^m f(\alpha \sqrt[n]{s}) + \cdots + \alpha^{(n-1)m} f(\alpha^{n-1} \sqrt[n]{s})].$$

La forme de la fonction rationnelle et logarithmique f peut être quelconque.

. . . .

§ 5.

Sur les intégrales de la forme $y = \int f(x, \sqrt[m_1]{R_1}, \sqrt[m_2]{R_2}, \ldots \sqrt[m_n]{R_n})\,dx.$

Nous pourrons d'abord supposer

$$y = \int f[x, (x-a_1)^{\frac{1}{m_1}}, (x-a_2)^{\frac{1}{m_2}}, \ldots (x-a_n)^{\frac{1}{m_n}}]\,dx,$$

et de là

$$y = \int \Sigma \frac{p\,dx}{(x-a_1)^{\frac{k_1}{m_1}} (x-a_2)^{\frac{k_2}{m_2}} \ldots (x-a_n)^{\frac{k_n}{m_n}}},$$

où $\frac{k_1}{m_1}, \frac{k_2}{m_2}, \frac{k_3}{m_3}, \ldots$ sont moindres que l'unité et reduits à leurs plus simples expressions, et p une fonction rationnelle. On en tire

$$\int dx.p.(x-a_1)^{-\frac{k_1}{m_1}} (x-a_2)^{-\frac{k_2}{m_2}} \ldots (x-a_n)^{-\frac{k_n}{m_n}} = P.$$

1. P étant une fonction algébrique.

Alors on aura

$$P = v(x-a_1)^{1-\frac{k_1}{m_1}}(x-a_2)^{1-\frac{k_2}{m_2}}\dots(x-a_n)^{1-\frac{k_n}{m_n}},$$

où v est rationnel.

On tire de là

$$\frac{dP}{P} = \frac{dv}{v} + \frac{\left(1-\frac{k_1}{m_1}\right)}{x-a_1} + \frac{\left(1-\frac{k_2}{m_2}\right)}{x-a_2} + \dots + \frac{\left(1-\frac{k_n}{m_n}\right)}{x-a_n},$$

$$\frac{dP}{P} = \frac{dv\,(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n) + v\,(A_0 + A_1 x + \dots + A_{n-1}x^{n-1})}{v\,(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)},$$

$$\frac{dP}{P} = \frac{p\,dx}{v\,(x-a_1)\dots(x-a_n)},$$

$$p = v\,(A_0 + A_1 x + \dots + A_{n-1}x^{n-1}) + \frac{dv}{dx}(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n).$$

A) $v = x^m$.

$$p = x^m(A_0 + A_1 x + \dots + A_{n-1}x^{n-1}) \\ + m x^{m-1}(B_0 + B_1 x + \dots + B_{n-1}x^{n-1} + x^n),$$

$$p = mB_0 x^{m-1} + (A_0 + mB_1)x^m + (A_1 + mB_2)x^{m+1} + \dots \\ \dots + (A_{n-1} + m)x^{n+m-1}.$$

$$\int x^\mu dx.(x-a_1)^{-\frac{k_1}{m_1}}\dots(x-a_n)^{-\frac{k_n}{m_n}} = R_\mu,$$

$$x^m\left\{(x-a_1)^{1-\frac{k_1}{m_1}}\dots(x-a_n)^{1-\frac{k_n}{m_n}}\right\} = mB_0 R_{m-1} + (A_0 + mB_1)R_m + \dots \\ \dots + (A_{n-1} + m)R_{n+m-1};$$

$A_{n-1} = n - \left(\frac{k_1}{m_1} + \frac{k_2}{m_2} + \dots + \frac{k_n}{m_n}\right)$ positif, donc $A_{n-1} + m$ jamais égal à zéro. Par conséquent on aura

$$R_{m+n-1} = \frac{1}{m + A_{n-1}} x^m (x-a_1)^{1-\frac{k_1}{m_1}}\dots(x-a_n)^{1-\frac{k_n}{m_n}} \\ - \frac{mB_0}{m + A_{n-1}}.R_{m-1} - \dots - \frac{A_{n-2} + mB_{n-1}}{A_{n-1} + m}R_{m+n-2}.$$

On peut donc exprimer

$$R_{m+n-1} \text{ en } R_0,\ R_1,\ R_2,\ \dots R_{n-2}.$$

B) $v=\frac{1}{(x-\alpha)^m}$.

$$p=\frac{A_0+A_1x+\cdots+A_{n-1}x^{n-1}}{(x-\alpha)^m}-\frac{m(B_0+B_1x+\cdots+B_{n-1}x^{n-1}+x^n)}{(x-\alpha)^{m+1}},$$

$$A_0+A_1x+\cdots+A_{n-1}x^{n-1}=\varphi x,$$

$$B_0+B_1x+\cdots+x^n=fx,$$

$$\varphi x=\varphi\alpha+(x-\alpha)\varphi'\alpha+(x-\alpha)^2\frac{\varphi''\alpha}{2}+\cdots+(x-\alpha)^{n-1}\frac{\varphi^{(n-1)}\alpha}{1.2\ldots(n-1)},$$

$$fx=f\alpha+(x-\alpha)f'\alpha+(x-\alpha)^2\frac{f''\alpha}{2}+\cdots+(x-\alpha)^n\frac{f^n\alpha}{1.2\ldots n},$$

$$p=\frac{\varphi x}{(x-\alpha)^m}-\frac{mfx}{(x-\alpha)^{m+1}}=$$

$$-\frac{mf\alpha}{(x-\alpha)^{m+1}}+\frac{\varphi\alpha-mf'\alpha}{(x-\alpha)^m}+\frac{\varphi'\alpha-\frac{mf''\alpha}{2}}{(x-\alpha)^{m-1}}+\cdots+\frac{\frac{\varphi^{(n-1)}\alpha}{1.2\ldots(n-1)}-m\frac{f^{(n)}\alpha}{1.2\ldots n}}{(x-\alpha)^{m-n+1}}.$$

Soit

$$\int\frac{dx}{(x-\alpha)^\mu}(x-a_1)^{-\frac{k_1}{m_1}}\ldots(x-a_n)^{-\frac{k_n}{m_n}}=S_\mu;$$

on aura donc

$$\frac{(x-a_1)^{1-\frac{k_1}{m_1}}\ldots(x-a_n)^{1-\frac{k_n}{m_n}}}{(x-\alpha)^m}=-mf\alpha.S_{m+1}+(\varphi\alpha-mf'\alpha)S_m+\cdots$$
$$+\left(\frac{\varphi^{(n-1)}\alpha}{1.2\ldots(n-1)}-\frac{mf^{(n)}\alpha}{1.2\ldots n}\right).S_{m-n+1}.$$

Donc, si non $f\alpha=0$, on pourra exprimer S_{m+1} en S_m, S_{m-1}, S_{m-2}, $\ldots S_1$; R_0, R_1, $\ldots R_{n-2}$, donc

$$S_{m+1}\ \text{en}\ S_1,\ R_0,\ R_1,\ \ldots R_{n-2}.$$

Si $f\alpha=0$, on aura par exemple: $\alpha=a_1$. Donc, si non $\varphi\alpha-mf'\alpha=0$, on pourra exprimer S_m en S_{m-1}, $\ldots S_1$, R_0, R_1, $\ldots R_{n-2}$, donc

$$S_m\ \text{en}\ R_0,\ R_1\ldots R_{n-2}.$$

Or on a

$$fx=(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n),$$

$$\varphi x=\left(1-\frac{m_1}{k_1}\right)(x-a_2)\ldots(x-a_n)+(x-a_1).t,$$

donc

$$\varphi a_1 = \left(1 - \frac{m_1}{k_1}\right)(a_1 - a_2)\ldots(a_1 - a_n),$$

$$f'(a_1) = (a_1 - a_2)\ldots(a_1 - a_n).$$

Donc

$$\varphi a_1 - mf'a_1 = \left(1 - \frac{m_1}{k_1} - m\right)(a_1 - a_2)\ldots(a_1 - a_n),$$

qui ne saurait jamais devenir égal à zéro. Donc etc.

Supposons maintenant

$$c_0 R_0 + c_1 R_1 + \cdots + c_{n-2} R_{n-2} + \varepsilon_1 t_1 + \varepsilon_2 t_2 + \cdots + \varepsilon_\mu t_\mu$$

$$= v(x - a_1)^{1 - \frac{k_1}{m_1}} \ldots (x - a_n)^{1 - \frac{k_n}{m_n}},$$

où

$$t_\mu = \int \frac{dx}{(x - \alpha_\mu)}(x - a_1)^{-\frac{k_1}{m_1}} \ldots;$$

on aura

$$c_0 + c_1 x + \cdots + c_{n-2} x^{n-2} + \frac{\varepsilon_1}{x - \alpha_1} + \frac{\varepsilon_2}{x - \alpha_2} + \cdots + \frac{\varepsilon_\mu}{x - \alpha_\mu}$$

$$= v(A_0 + A_1 x + \cdots + A_{n-1} x^{n-1}) + \frac{dv}{dx}(B_0 + B_1 x + \cdots + B_{n-1} x^{n-1} + x^n).$$

$$v = r(x - \beta)^{-\nu},$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{dr}{dx}(x - \beta)^{-\nu} - \nu r(x - \beta)^{-\nu-1},$$

$$(x - \beta)^{\nu+1} \frac{dv}{dx} = (x - \beta)\frac{dr}{dx} - \nu r,$$

$$\left(c_0 + c_1 x + \cdots + \frac{\varepsilon_1}{x - \alpha_1} + \cdots\right)(x - \beta)^{\nu+1} = r(x - \beta)\varphi x + \left(\frac{dr}{dx}(x - \beta) - \nu r\right) fx,$$

$x - \beta = 0$, $f(x) = 0$, impossible. Donc v entier, mais cela est de même impossible. Donc nous concluons que les intégrales

$$t_1,\ t_2,\ \ldots t_\mu,\ R_0,\ R_1,\ R_2,\ \ldots R_{n-2},$$

sont irréductibles entre elles.

$$(c_0 R_0 + c_1 R_1 + \cdots + c_{n-2} R_{n-2} + \varepsilon_1 t_1 + \varepsilon_2 t_2 + \cdots + \varepsilon_\mu t_\mu)$$

est donc toujours une fonction transcendante.

On voit que le nombre des transcendantes contenues dans l'intégrale est indépendant de la valeur des nombres.

. . . .

Réduction des intégrales $R_0, R_1, \ldots R_{n-2}, S_1$ à l'aide de fonctions logarithmiques et algébriques.

Soit

$$c_0 R_0 + c_1 R_1 + \cdots + c_{n-2} R_{n-2} + \varepsilon_1 t_1 + \varepsilon_2 t_2 + \cdots + \varepsilon_\mu t_\mu$$
$$= P + \alpha_1 \log v_1 + \alpha_2 \log v_2 + \cdots + \alpha_m \log v_m$$
$$= r_0 + r_1 \lambda_1 + r_2 \lambda_2 + \cdots + r_{\nu-1} \lambda_{\nu-1} + \Sigma \alpha \log (s_0 + s_1 \lambda_1 + s_2 \lambda_2 + \cdots + s_{\nu-1} \lambda_{\nu-1})$$
$$= \int \frac{fx \,.\, dx}{\lambda_1}.$$

$$(x - a_1)^{\frac{k_1}{m_1}} \ldots (x - a_n)^{\frac{k_n}{m_m}} = \lambda$$

$$\lambda = R^{\frac{1}{\nu}}$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_{\nu-1}$$

$$\omega^\nu - 1 = 0,$$

où les racines sont

$$1, \omega, \omega^2, \ldots \omega^{\nu-1}.$$

$$\Sigma r_k \lambda_k + \Sigma \alpha \log (\Sigma s_k \lambda_k) = \int \frac{fx \,.\, dx}{\lambda_1},$$

$$\Sigma r_k \lambda_k \omega^k + \Sigma \alpha \log (\Sigma s_k \lambda_k \omega^k) = \frac{1}{\omega} \int \frac{fx \,.\, dx}{\lambda_1},$$

$$\Sigma r_k \lambda_k \omega^{2k} + \Sigma \alpha \log (\Sigma s_k \lambda_k \omega^{2k}) = \frac{1}{\omega^2} \int \frac{fx \,.\, dx}{\lambda_1},$$

. . . .

$$\Sigma r_k \lambda_k \omega^{(\nu-1)k} + \Sigma \alpha \log (\Sigma s_k \lambda_k \omega^{(\nu-1)k}) = \frac{1}{\omega^{\nu-1}} \int \frac{fx \,.\, dx}{\lambda_1}.$$

$$\Sigma r_k \lambda_k (1 + \omega^{k+1} + \omega^{2k+2} + \cdots + \omega^{(\nu-1)(k+1)}) + \Sigma \alpha \Sigma \omega^{k'} \log (\Sigma s_k \lambda_k \omega^{k'k}) = \nu \int \frac{fx \,.\, dx}{\lambda_1}.$$

$$\nu r_{\nu-1} \lambda_{\nu-1} + \Sigma \alpha \Sigma \omega^{k'} \log [\Sigma (s_k \lambda_k \omega^{k'k})] = \nu \int \frac{fx \,.\, dx}{\lambda_1}.$$

$$\begin{aligned}\int\frac{fx\,.\,dx}{\lambda_1} = \quad & \log(s_0+s_1\lambda_1+s_2\lambda_2+\cdots+s_{\nu-1}\lambda_{\nu-1})\\ &+\omega\log(s_0+\omega s_1\lambda_1+\omega^2 s_2\lambda_2+\cdots+\omega^{\nu-1}s_{\nu-1}\lambda_{\nu-1})\\ &+\omega^2\log(s_0+\omega^2 s_1\lambda_1+\omega^4 s_2\lambda_2+\cdots+\omega^{2\nu-2}s_{\nu-1}\lambda_{\nu-1})\\ &+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ +\omega^{\nu-1}&\log(s_0+\omega^{\nu-1}s_1\lambda_1+\omega^{2(\nu-1)}s_2\lambda_2+\cdots+\omega^{(\nu-1)^2}s_{\nu-1}\lambda_{\nu-1})\end{aligned}$$

$$=\theta(x,\lambda_1)=\log\theta(\lambda_1)+\omega\log\theta(\omega\lambda_1)+\omega^2\log\theta(\omega^2\lambda_1)+\cdots+\omega^{\nu-1}\log\theta(\omega^{\nu-1}\lambda_1).$$

$$\frac{fx}{\lambda_1} \text{ tout au plus du degré } -1,$$

$$fx \text{ tout au plus du degré } (\delta\lambda_1-1),$$

donc:

Degré de fx tout au plus égal à $E\left(\frac{k_1}{m_1}+\frac{k_2}{m_2}+\cdots+\frac{k_m}{m_n}\right)-1.$

$$\theta(\lambda_1)\,.\,\theta(\omega\lambda_1)\,.\,\theta(\omega^2\lambda_1)\,\ldots\,\theta(\omega^{\nu-1}\lambda_1)=Fx,$$

$$Fx=(x-\beta_1)(x-\beta_2)\ldots(x-\beta_\mu),$$

$$fx=\frac{\varphi x}{Fx}=p+\Sigma\frac{M}{x-\beta},$$

$$\frac{1}{\lambda_1}\left(p+\Sigma\frac{M}{x-\beta}\right)=\frac{d\,\theta(\lambda_1)}{\theta\lambda_1}+\omega\frac{d\,\theta(\omega\lambda_1)}{\theta(\omega\lambda_1)}+\cdots+\omega^{\nu-1}\frac{d\,\theta(\omega^{\nu-1}\lambda_1)}{\theta(\omega^{\nu-1}\lambda_1)}.$$

$$\lambda_1=\psi x,$$

$$\theta(\omega^k\psi\beta)=0.$$

$$\frac{x-\beta}{\psi x}\left(p+\Sigma\frac{M}{x-\beta}\right)=(x-\beta)\left\{\frac{d\,\theta(\psi x)}{\theta(\psi x)}+\omega\frac{d\,\theta(\omega\psi x)}{\theta(\omega\psi x)}+\cdots+\omega^{\nu-1}\frac{d\,\theta(\omega^{\nu-1}\psi x)}{\theta(\omega^{\nu-1}\psi x)}\right\}.$$

Si l'on fait $x=\beta$, on aura, si non $\psi\beta=0$,

$$\frac{M}{\psi\beta}=\frac{\omega^k(x-\beta)\,d\,\theta(\omega^k\psi x)}{\theta(\omega^k\psi x)}=\frac{\omega^k\,d\,\theta(\omega^k\psi x)+\omega^k(x-\beta)\,d^2\theta(\omega^k\psi x)}{d\,\theta(\omega^k\psi x)},$$

donc

$$M=\omega^k\psi(\beta).$$

Donc si

$$\theta(\omega^{\varepsilon_1}\psi\beta_1)=0,\quad \theta(\omega^{\varepsilon_2}\psi\beta_2)=0,\quad\ldots\,\theta(\omega^{\varepsilon_\mu}\psi\beta_\mu)=0,$$

on aura

$$M_1=\omega^{\varepsilon_1}\psi(\beta_1),\quad M_2=\omega^{\varepsilon_2}\psi(\beta_2),\quad\ldots\,M_\mu=\omega^{\varepsilon_\mu}\psi(\beta_\mu),$$

et par suite

$$\theta(x, \lambda_1) = \int_{\lambda_1} p\,dx + \omega^{\varepsilon_1}\psi(\beta_1) . \Pi(\beta_1) + \omega^{\varepsilon_2}\psi(\beta_2) . \Pi(\beta_2) + \cdots + \omega^{\varepsilon_\mu}\psi(\beta_\mu) . \Pi(\beta_\mu).$$

Il reste à déterminer la fonction entière p. Soit

$$\frac{qx}{Fx} = p - \Sigma \frac{M}{x-\beta} = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_k x^k + \Sigma \frac{M}{x-\beta} .$$

. . . .

XVIII.

SUR LA RESOLUTION ALGÉBRIQUE DES ÉQUATIONS.

Un des problèmes les plus intéressans de l'algèbre est celui de la résolution algébrique des équations. Aussi on trouve que presque tous les géomètres d'un rang distingué ont traité ce sujet. On parvint sans difficulté à l'expression générale des racines des équations des quatre premiers degrés. On découvrit pour résoudre ces équations une méthode uniforme et qu'on croyait pouvoir appliquer à une équation d'un degré quelconque; mais malgré tous les efforts d'un *Lagrange* et d'autres géomètres distingués on ne put parvenir au but proposé. Cela fit présumer que la résolution des équations générales était impossible algébriquement; mais c'est ce qu'on ne pouvait pas décider, attendu que la méthode adoptée n'aurait pu conduire à des conclusions certaines que dans le cas où les équations étaient résolubles. En effet on se proposait de résoudre les équations, sans savoir si cela était possible. Dans ce cas, on pourrait bien parvenir à la résolution, quoique cela ne fût nullement certain; mais si par malheur la résolution était impossible, on aurait pu la chercher une éternité, sans la trouver. Pour parvenir infailliblement à quelque chose dans cette matière, il faut donc prendre une autre route. On doit donner au problème une forme telle qu'il soit toujours possible de le résoudre, ce qu'on peut toujours faire d'un problème quelconque. Au lieu de demander une relation dont on ne sait pas si elle existe ou non, il faut demander si une telle relation est en effet possible. Par exemple, dans le calcul intégral, au lieu de chercher, à l'aide d'une espèce de tâtonnement et de divination, d'intégrer les formules différentielles, il faut plutôt chercher s'il est possible de les intégrer de telle ou telle manière.

En présentant un problème de cette manière, l'énoncé même contient le germe de la solution, et montre la route qu'il faut prendre; et je crois qu'il y aura peu de cas où l'on ne parvient à des propositions plus ou moins importantes, dans le cas même où l'on ne saurait répondre complètement à la question à cause de la complication des calculs. Ce qui a fait que cette méthode, qui est sans contredit la seule scientifique, parce qu'elle est la seule dont on sait d'avance qu'elle peut conduire au but proposé, a été peu usitée dans les mathématiques, c'est *l'extrême complication* à laquelle elle paraît être assujettie dans la plupart des problèmes, sourtout lorsqu'ils ont une certaine généralité; mais dans beaucoup de cas cette complication n'est qu'apparente et s'évanouira dès le premier abord. J'ai traité plusieurs branches de l'analyse de cette manière, et quoique je me sois souvent proposé des problèmes qui ont surpassé mes forces, je suis néanmoins parvenu à un grand nombre de résultats généraux qui jettent un grand jour sur la nature des quantités dont la connaissance est l'objet des mathématiques. C'est surtout dans le calcul intégral que cette méthode est facile à appliquer. Je donnerai dans une autre occasion les résultats auxquels je suis parvenu dans ces recherches, et le procédé qui m'y a conduit. Dans ce mémoire je vais traiter le problème de la résolution algébrique des équations, dans toute sa généralité. Le premier, et, si je ne me trompe, le seul qui avant moi ait cherché à démontrer l'impossibilité de la résolution algébrique des équations générales, est le géomètre *Ruffini*; mais son mémoire est tellement compliqué qu'il est très difficile de juger de la justesse de son raisonnement. Il me paraît que son raisonnement n'est pas toujours satisfaisant. Je crois que la démonstration que j'ai donnée dans le premier cahier de ce journal*), ne laisse rien à désirer du côté de la rigueur; mais elle n'a pas toute la simplicité dont elle est susceptible. Je suis parvenu à une autre démonstration, fondée sur les mêmes principes, mais plus simple, en cherchant à résoudre un problème plus général.

On sait que toute expression algébrique peut satisfaire à une équation d'un degré plus ou moins élevé, selon la nature particulière de cette expression. Il y a de cette manière une infinité d'équations particulières qui sont résolubles algébriquement. De là dérivent naturellement les deux problèmes suivans, dont la solution complète comprend toute la théorie de la résolution algébrique des équations, savoir:

---

*) T. I., p. 66—87 de cette édition.

1. Trouver toutes les équations d'un degré déterminé quelconque qui soient résolubles algébriquement.
2. Juger si une équation donnée est résoluble algébriquement, ou non.

C'est la considération de ces deux problèmes qui est l'objet de ce mémoire, et quoique nous n'en donnions pas la solution complète, nous indiquerons néanmoins des moyens sûrs pour y parvenir. On voit que ces deux problèmes sont intimement liés entre eux, en sorte que la solution du premier doit conduire à celle du second. Dans le fond, ces deux problèmes sont les mêmes. Dans le cours des recherches on parviendra à plusieurs propositions générales sur les équations par rapport à leur résolubilité et à la forme des racines. C'est en ces propriétés générales que consiste véritablement la théorie des équations quant à leur résolution algébrique, car il importe peu si l'on sait qu'une équation d'une forme particulière est résoluble ou non. Une de ces propriétés générales est par exemple qu'il est impossible de résoudre algébriquement les équations générales passé le quatrième degré.

Pour plus de clarté nous allons d'abord analyser en peu de mots le problème proposé.

D'abord qu'est ce que cela veut dire que de satisfaire algébriquement à une équation algébrique? Avant tout il faut fixer le sens de cette expression. Lorsqu'il s'agit d'une équation générale, dont tous les coefficiens peuvent par conséquent être regardés comme des variables indépendantes, la résolution d'une telle équation doit consister à exprimer les racines par des fonctions algébriques des coefficiens. Ces fonctions pourront, selon la conception vulgaire de ce mot, contenir des quantités constantes quelconques, algébriques ou non. On pourra y ajouter, si l'on veut, comme condition particulière que ces constantes seront de même des quantités algébriques; ce qui modifierait un peu le problème. En général, il y a deux cas différens selon que les coefficiens contiendront des quantités variables, ou non. Dans le premièr cas, les coefficiens seront *des fonctions rationnelles* d'un certain nombre de quantités x, z, z', z'', etc., qui contiendront au moins une variable indépendante x. Nous supposons que les autres sont des fonctions quelconques de celle-là. Dans ce cas, nous dirons qu'on peut satisfaire algébriquement à l'équation proposée, si l'on peut y satisfaire en mettant au lieu de l'inconnue une fonction algébrique de x, z, z', z'', etc. Nous dirons de même que l'équation est résoluble algébriquement, si l'on peut exprimer toutes les racines de cette manière. L'expression d'une racine pourra, dans ce

cas de coefficiens variables, contenir des quantités constantes quelconques, algébriques ou non.

Dans le second cas, où l'on regarde les coefficiens comme des quantités constantes, on peut concevoir que ces coefficiens sont formés d'autres quantités constantes à l'aide d'opérations rationnelles. Désignons ces dernières quantités par $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, nous dirons qu'on peut satisfaire algébriquement à l'équation proposée, s'il est possible d'exprimer une ou plusieurs racines en $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ à l'aide d'opérations algébriques. Si l'on peut exprimer toutes les racines de cette manière, nous dirons que l'équation est résoluble algébriquement; $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ pourront d'ailleurs être quelconques, algébriques ou non. Dans le cas particulier où tous les coefficiens sont rationnels, on peut donc satisfaire algébriquement à l'équation, si une ou plusieurs de ses racines sont des quantités algébriques.

Nous avons distingué deux espèces d'équations, celles qui sont résolubles algébriquement, et celles auxquelles on peut satisfaire algébriquement. En effet, on sait qu'il y a des équations dont une ou plusieurs racines sont algébriques, sans qu'on puisse affirmer la même chose pour toutes les racines.

Cela posé, la marche naturelle pour résoudre notre problème se présente d'elle-même d'après l'énoncé, savoir il faut substituer dans l'équation proposée, à la place de l'inconnue, l'expression algébrique la plus générale, et ensuite chercher s'il est possible d'y satisfaire de cette manière. Pour cela il faut avoir l'expression générale d'une quantité algébrique et d'une fonction algébrique. On aura donc d'abord le problème suivant:

"Trouver la *forme* la plus générale d'une expression algébrique."

Après avoir trouvé cette forme, on aura l'expression d'une racine algébrique d'une équation quelconque.

La première condition à laquelle cette expression algébrique doit être assujettie, est qu'elle doit satisfaire à une équation algébrique. Or, comme on sait, elle peut le faire dans toute sa généralité. Cette première condition est donc remplie d'elle-même. Pour savoir maintenant si elle peut être particularisée de sorte qu'elle satisfasse à l'équation proposée, il faut chercher toutes les équations auxquelles elle peut satisfaire, et ensuite comparer ces équations à la proposée. On aura donc ce problème:

"Trouver toutes les équations possibles auxquelles une fonction algébrique peut satisfaire".

Il est clair qu'une même fonction algébrique peut satisfaire à une infinité d'équations différentes. Donc lorsque l'équation proposée peut être satis-

faite algébriquement, il y aura deux cas; ou cette équation sera la moins élevée à laquelle elle puisse satisfaire, ou il doit en exister une autre de la même forme à laquelle elle puisse satisfaire, qui est d'un degré moins élevé, et qui est la plus simple. Dans le premier cas, nous dirons que l'équation est irréductible, et dans l'autre, qu'elle est réductible. Le problème proposé se décompose ainsi en ces deux autres:

1. "Juger si une équation proposée est réductible ou non".
2. "Juger si une équation irréductible peut être satisfaite algébriquement ou non".

Considérons d'abord le second problème. L'équation proposée étant irréductible, elle sera l'équation la plus simple à laquelle l'expression algébrique cherchée puisse satisfaire. Donc pour s'assurer si elle peut être satisfaite ou non, il faut chercher l'équation la moins élevée à laquelle une expression algébrique puisse satisfaire, et ensuite comparer cette équation à l'équation proposée. De là naît le problème:

"Trouver l'équation la moins élevée à laquelle une fonction algébrique puisse satisfaire".

La solution de ce problème sera l'objet d'un second paragraphe. On aura ainsi toutes les équations irréductibles qui puissent être satisfaites algébriquement. L'analyse conduit aux théorèmes suivans:

1. "Si une équation irréductible peut être satisfaite algébriquement, elle est en même temps résoluble algébriquement, et toutes les racines pourront être représentées par la même expression, en donnant à des radicaux qui s'y trouvent, toutes leurs valeurs".
2. "Si une expression algébrique satisfait à une équation quelconque, on pourra toujours lui donner une forme telle qu'elle y satisfasse encore, en attribuant à tous les différens radicaux dont elle se compose, toutes les valeurs dont ils sont susceptibles".
3. "Le degré d'une équation irréductible, résoluble algébriquement, est nécessairement le produit d'un certain nombre d'exposans de radicaux qui se trouvent dans l'expression des racines".

Ayant ainsi montré comment on peut parvenir à l'équation la moins élevée à laquelle satisfasse une expression algébrique quelconque, la marche la plus naturelle serait de former cette équation, et de la comparer à l'équation proposée, mais on tombe ici dans des difficultés qui paraissent insurmontables. Car quoiqu'on ait assigné une règle générale pour former dans chaque cas particulier l'equation la plus simple, on est loin d'avoir par là

l'équation même. Et quand même on parviendrait à trouver cette équation, comment juger si des coefficiens d'une telle complication peuvent en effet être égaux à ceux de l'équation proposée? Mais je suis parvenu au but proposé en suivant une autre route, savoir en généralisant le problème.

D'abord l'équation étant donnée, son degré le sera de même. Il se présente donc tout d'abord ce problème:

"Trouver l'expression algébrique la plus générale qui puisse satisfaire à une équation d'un degré donné".

On est conduit naturellement à considérer deux cas, selon que le degré de l'équation est un nombre premier ou non.

Quoique nous n'ayons pas donné la solution complète de ce problème, néanmoins la marche naturelle de la solution a conduit à plusieurs propositions générales, très remarquables en elles-mêmes, et qui ont conduit à la solution du problème dont nous nous occupons. Les plus importantes de ces propositions sont les suivantes:

1. "Si une équation irréductible d'un degré premier μ est résoluble algébriquement, les racines auront la forme suivante:

$$y = A + \sqrt[\mu]{R_1} + \sqrt[\mu]{R_2} + \cdots + \sqrt[\mu]{R_{\mu-1}},$$

A étant une quantité rationnelle, et $R_1, R_2, \ldots R_{\mu-1}$ les racines d'une équation du dégre $\mu - 1$".

2. "Si une équation irréductible dont le degré est une *puissance d'un nombre premier* μ^α, est résoluble algébriquement, il doit arriver de deux choses l'une; ou l'équation est décomposable en $\mu^{\alpha-\beta}$ équations, chacune du degré μ^β, et dont les coefficiens dépendront d'équations du degré $\mu^{\alpha-\beta}$; ou bien on pourra exprimer l'une quelconque des racines par la formule

$$y = A + \sqrt[\mu]{R_1} + \sqrt[\mu]{R_2} + \cdots + \sqrt[\mu]{R_\nu},$$

où A est une quantité rationnelle, et $R_1, R_2, \ldots R_\nu$ des racines d'une même équation du degré ν, ce dernier nombre étant tout au plus égal à $\mu^\alpha - 1$".

3. "Si une équation irréductible de degré μ, divisible par des nombres premiers différens entre eux, est résoluble algébriquement, on peut toujours décomposer μ en deux facteurs μ_1 et μ_2, de sorte que l'équation proposée soit décomposable en μ_1 équations, chacune du degré μ_2, et dont les coefficiens dépendent d'équations du degré μ_1".

4. "Si une équation irréductible du degré μ^α, où μ est premier, est résoluble algébriquement, on pourra toujours exprimer une quelconque des racines par la formule:

$$y = f\left(\sqrt[\mu]{R_1},\ \sqrt[\mu]{R_2},\ \dots \sqrt[\mu]{R_\alpha}\right),$$

où f désigne une fonction rationnelle et symétrique des radicaux entre les parenthèses, et R_1, R_2, ... R_α des racines d'une même équation dont le degré est tout au plus égal à $\mu^\alpha - 1$".

Ces théorèmes sont les plus remarquables auxquels je sois parvenu, mais outre cela on trouvera dans le cours du mémoire une foule d'autres propriétés générales des racines, propriétés qu'il serait trop long de rapporter ici. Je dirai seulement un mot sur la nature des radicaux qui pourront se trouver dans l'expression des racines. D'abord le troisième théorème fait voir que, si le degré d'une équation irréductible est représenté par

$$\mu_1^{\alpha_1} \cdot \mu_2^{\alpha_2} \cdot \mu_3^{\alpha_3} \dots \mu_\omega^{\alpha_\omega},$$

il ne pourra se trouver dans l'expression des racines d'autres radicaux que ceux qui pourront se trouver dans l'expression des racines d'équations des degrés $\mu_1^{\alpha_1}$, $\mu_2^{\alpha_2}$, $\mu_3^{\alpha_3}$, ... $\mu_\omega^{\alpha_\omega}$.

Des théorèmes généraux auxquels on est ainsi parvenu, on déduit ensuite une règle générale pour reconnaître si une équation proposée est résoluble ou non. En effet, on est conduit à ce résultat remarquable, que si une équation irréductible est résoluble algébriquement, on pourra dans tous les cas trouver les racines à l'aide de la méthode de *Lagrange*, proposée pour la résolution des équations; savoir, en suivant la marche de *Lagrange* on doit parvenir à des équations qui aient au moins une racine qui puisse s'exprimer rationnellement par les coefficiens. Il y a plus, *Lagrange* a fait voir qu'on peut ramener la résolution d'une équation du degré à celle de équations respectivement des degrés à l'aide d'une équation du degré . Nous démontrerons que c'est cette équation qui doit nécessairement avoir au moins une racine exprimable rationnellement par ses coefficiens pour que l'équation proposée soit résoluble algébriquement.

Donc, si cette condition n'est pas remplie, c'est une preuve incontestable que l'équation n'est pas résoluble; mais il est à remarquer qu'elle peut être remplie sans que l'équation soit en effet résoluble algébriquement. Pour le reconnaître, il faut encore soumettre les équations auxiliaires au même examen. Cependant dans le cas où le degré de la proposée est un nombre premier, la première condition suffira toujours, comme nous le montrerons. De ce qui

précède, il a été facile ensuite de tirer comme corollaire qu'il est impossible de résoudre les équations générales.

§ 1.

Détermination de la forme générale d'une expression algébrique.

Comme nous l'avons remarqué plus haut, il faut avant tout connaître la forme générale d'une expression algébrique. Cette forme doit se déduire d'une définition générale; la voici:

> "Une quantité y est dite pouvoir s'exprimer algébriquement par plusieurs autres quantités, lorsqu'on peut la former de ces dernières à l'aide d'un nombre limité des opérations suivantes:
>
> 1. Addition. 2. Soustraction. 3. Multiplication. 4. Division.
> 5. Extraction de racines avec des exposans premiers".

Nous n'avons pas parmi ces opérations compté l'élévation à des puissances entières et l'extraction de racines avec des exposans composés, parce qu'elles ne sont pas nécessaires, la première étant contenue dans la multiplication, et la seconde dans l'extraction de racines avec des exposans premiers.

Si les trois premières opérations ci-dessus sont seules nécessaires pour former la quantité y, elle est dite rationnelle et entière par rapport aux quantités connues, et si les quatre premières opérations sont seules nécessaires, elle est dite rationnelle. D'après la nature des quantités connues nous ferons les distinctions suivantes:

1. Une quantité qui peut s'exprimer algébriquement par l'unité s'appelle un nombre algébrique; si elle peut s'exprimer rationnellement par l'unité, elle s'appelle un nombre rationnel, et si elle peut être formée de l'unité par addition, soustraction et multiplication, elle s'appelle un nombre entier.
2. Si les quantités connues contiennent une ou plusieurs quantités variables, la quantité y est dite fonction algébrique, rationnelle ou entière de ces quantités selon la nature des opérations nécessaires pour la former. Dans ce cas on regarde comme quantité connue toute quantité constante.

A l'aide de ces définitions on établira sans peine les propositions suivantes, connues depuis longtemps:

1. Une quantité y exprimable entièrement par les quantités $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, peut être formée par l'addition de plusieurs termes de la forme

$$A.\alpha_1^{m_1}.\alpha_2^{m_2}\ldots\alpha_n^{m_n},$$

A étant un nombre entier et $m_1, m_2, \ldots m_n$ des nombres entiers en y comprenant zéro.

2. Une quantité y exprimable rationnellement par $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ pourra toujours se mettre sous la forme

$$y = \frac{y_1}{y_2},$$

où y_1 et y_2 sont exprimés entièrement par les mêmes quantités.

3. Un nombre rationnel pourra toujours être réduit à la forme

$$\frac{y_1}{y_2}$$

où y_1 et y_2 sont des nombres entiers positifs, premiers entre eux.

4. Une fonction entière y de plusieurs quantités variables $x_1, x_2, \ldots x_n$ pourra toujours être formée par l'addition d'un nombre limité de termes de la forme

$$A \,.\, x_1^{m_1} \,.\, x_2^{m_2} \ldots x_n^{m_n},$$

où A est une quantité constante et $m_1, m_2, \ldots m_n$ des nombres entiers en y comprenant zéro.

5. Une fonction rationnelle y de plusieurs quantités $x_1, x_2 \ldots x_n$ pourra toujours se réduire à la forme

$$\frac{y_1}{y_2},$$

où y_1 et y_2 sont des fonctions entières qui n'ont point de facteur commun.

Cela posé, il nous reste à determiner la forme des expressions algébriques en général.

Quelle que soit la forme d'une expression algébrique, elle doit d'abord contenir un nombre limité de radicaux. Désignons tous les radicaux différens par

$$\sqrt[\mu_1]{R_1}, \;\sqrt[\mu_2]{R_2}, \;\sqrt[\mu_3]{R_3}, \;\ldots \sqrt[\mu_n]{R_n},$$

il est clair que la quantité proposée pourra s'exprimer rationnellement par ces radicaux et les quantités connues. Désignons cette quantité par

$$y = f\left(\sqrt[\mu_1]{R_1}, \;\sqrt[\mu_2]{R_2}, \;\ldots \sqrt[\mu_n]{R_n}\right).$$

Les radicaux qui composent une expression algébrique peuvent être de deux espèces: ou ils sont nécessaires pour former l'expression, ou non. S'ils ne sont pas nécessaires, on peut les chasser, et alors l'expression proposée contiendra un nombre moindre de radicaux. De là il suit qu'on peut toujours

supposer que les radicaux soient tels qu'il soit impossible d'exprimer l'expression algébrique par une partie des radicaux qui s'y trouvent.

Cela posé, comme le nombre des radicaux est limité, il s'ensuit que parmi les radicaux, il doit se trouver au moins un qui ne soit pas contenu sous un autre radical. Supposons que $\sqrt[\mu_1]{R_1}$ soit un tel radical, la quantité R_1 pourra toujours s'exprimer rationnellement par les autres radicaux et les quantités connues.

Maintenant y est une fonction rationnelle des radicaux et des quantités connues; donc on peut faire

$$y = \frac{y_1}{y_2},$$

où y_1 et y_2 sont des expressions entières. Donc on pourra d'abord faire

$$y = \frac{y_1}{y_2} = \frac{P_0 + P_1 \sqrt[\mu_1]{R_1} + P_2 \left(\sqrt[\mu_1]{R_1}\right)^2 + \cdots + P_\nu \left(\sqrt[\mu_1]{R_1}\right)^\nu}{Q_0 + Q_1 \sqrt[\mu_1]{R_1} + Q_2 \left(\sqrt[\mu_1]{R_1}\right)^2 + \cdots + Q_{\nu'} \left(\sqrt[\mu_1]{R_1}\right)^{\nu'}},$$

où $P_0, P_1, \ldots Q_0, Q_1, \ldots$ sont des expressions rationnelles des quantités connues et des autres radicaux. Or on peut encore simplifier beaucoup cette expression. D'abord désignons par

$$y_2', \; y_2'', \; \ldots \; y_2^{(\mu_1-1)}$$

les valeurs que prendra y_2 en mettant au lieu de $\sqrt[\mu_1]{R_1}$ les valeurs $\omega \sqrt[\mu_1]{R_1}$, $\omega^2 \sqrt[\mu_1]{R_1} \ldots \omega^{\mu_1-1} \sqrt[\mu_1]{R_1}$, ω étant une racine imaginaire de l'équation $\omega^{\mu_1} - 1 = 0$; on sait que le radical $\sqrt[\mu_1]{R_1}$ et la quantité ω disparaîtront de l'expression du produit

$$y_2 y_2' y_2'' \ldots y_2^{(\mu_1-1)},$$

et que l'expression $y_1 y_2' y_2'' \ldots y_2^{(\mu_1-1)}$ sera rationnelle en $\sqrt[\mu_1]{R_1}$ sans ω.

On aura donc

$$y = \frac{y_1 \cdot y_2' \cdot y_2'' \ldots y_2^{(\mu_1-1)}}{y_2 \cdot y_2' \cdot y_2'' \ldots y_2^{(\mu_1-1)}} = \frac{z}{z_1},$$

où z_1 est une fonction entière des quantités connues et des radicaux $R_2^{\frac{1}{\mu_2}}$,

$R_3^{\frac{1}{\mu_3}}, \ldots$, et z une fonction entière des quantités connues et des radicaux $R_1^{\frac{1}{\mu_1}}$, $R_2^{\frac{1}{\mu_2}}$, $R_3^{\frac{1}{\mu_3}} \ldots$

En faisant donc

$$z = P_0 + P_1 . R_1^{\frac{1}{\mu_1}} + P_2 . R_1^{\frac{2}{\mu_1}} + \cdots + P_\nu . R_1^{\frac{\nu}{\mu_1}},$$

on aura

$$y = \frac{P_0}{z_1} + \frac{P_1}{z_1} . R_1^{\frac{1}{\mu_1}} + \cdots + \frac{P_\nu}{z_1} . R_1^{\frac{\nu}{\mu_1}}.$$

Or on a

$$R_1^{\frac{\mu_1}{\mu_1}} = R_1, \quad R_1^{\frac{\mu_1+1}{\mu_1}} = R_1 . R_1^{\frac{1}{\mu_1}} \text{ etc.},$$

donc on pourra enfin supposer

$$y = P_0 + P_1 . R_1^{\frac{1}{\mu_1}} + P_2 . R_1^{\frac{2}{\mu_1}} + \cdots + P_{\mu_1 - 1} . R_1^{\frac{\mu_1 - 1}{\mu_1}},$$

où $P_0, P_1, \ldots P_{\mu_1 - 1}$ et R_1 pourront s'exprimer *rationnellement* par les quantités connues et les radicaux $R_2^{\frac{1}{\mu_2}}$, $R_3^{\frac{1}{\mu_3}}$, etc.

Maintenant les quantités $P_0, P_1, \ldots R_1$ étant des expressions algébriques, mais contenant un radical de moins, on pourra les mettre sous une forme semblable à celle de y. Et si l'on désigne par $R_2^{\frac{1}{\mu_2}}$ un radical qui ne se trouve contenu sous aucun des autres radicaux, les expressions dont il s'agit pourront se mettre sous la forme

$$P_0' + P_1' . R_2^{\frac{1}{\mu_2}} + P_2' . R_2^{\frac{2}{\mu_2}} + \cdots + P'_{\mu_2 - 1} . R_2^{\frac{\mu_2 - 1}{\mu_2}},$$

où R_2, P_0', P_1', $\ldots P'_{\mu_2 - 1}$ pourront s'exprimer rationnellement par les quantités connues et les radicaux $R_3^{\frac{1}{\mu_3}}$, $R_4^{\frac{1}{\mu_4}}$, etc.

En continuant ainsi, on doit parvenir enfin à des expressions qui ne contiendront aucun radical, et qui par conséquent seront rationnelles par rapport aux quantités connues.

Dans ce qui suit nous avons besoin de distinguer les expressions algébriques selon le nombre des radicaux qu'elles contiennent. Nous nous servirons de l'expression suivante. Une expression algébrique qui, outre les quantités connues, ne contient qu'un nombre n de radicaux, sera appelée expression algébrique de l'ordre n. Ainsi par exemple en supposant connues les quantités $\sqrt{2}$ et $\sqrt{\pi}$, la quantité

$$\sqrt{2}+\sqrt{3-\sqrt{2}+\sqrt{\pi}}+\sqrt[3]{5+\sqrt{\pi}+\sqrt{3-\sqrt{2}+\sqrt{\pi}}}$$

sera une expression algébrique du second ordre, car outre les quantités $\sqrt{2}$, $\sqrt{\pi}$, elle ne contient que les deux radicaux

$$\sqrt{3-\sqrt{2}+\sqrt{\pi}},\quad \sqrt[3]{5+\sqrt{\pi}+\sqrt{3-\sqrt{2}+\sqrt{\pi}}}.$$

§ 2.

Détermination de l'équation la moins élevée à laquelle puisse satisfaire une expression algébrique donnée.

Pour simplifier les expressions, nous nous servirons des notations suivantes:

1. Nous désignerons par A_m, B_m, C_m, ... des expressions algébriques de l'ordre m.

2. Si dans $A_m = p_0 + p_1 \sqrt[\mu]{R} + \cdots + p_{\mu-1}\left(\sqrt[\mu]{R}\right)^{\mu-1}$ on substitue à la place de $\sqrt[\mu]{R}$ successivement $\omega\sqrt[\mu]{R}$, $\omega^2\sqrt[\mu]{R}$, ... $\omega^{\mu-1}\sqrt[\mu]{R}$, où ω est une racine imaginaire de l'équation $\omega^\mu - 1 = 0$, nous désignerons le produit de toutes les quantités ainsi formées par ΠA_m.

3. Si tous les coefficiens d'une équation

$$y^n + A_m y^{n-1} + A_m' y^{n-2} + \cdots = 0,$$

sont des expressions algébriques de l'ordre m, nous dirons que cette équation est de l'ordre m. Nous désignerons son premier membre par $\varphi(y, m)$, et le degré de cette équation par $\delta\varphi(y, m)$.

Cela posé, nous allons successivement établir les théorèmes suivans:

Théorème I. Une équation telle que

$$(\alpha)\qquad t_0 + t_1 y_1^{\frac{1}{\mu_1}} + t_2 y_1^{\frac{2}{\mu_1}} + \cdots + t_{\mu_1-1} y_1^{\frac{\mu_1-1}{\mu_1}} = 0,$$

où t_0, t_1, ... t_{μ_1-1} sont exprimés rationnellement par ω, les quantités connues et les radicaux $y_2^{\frac{1}{\mu_2}}$, $y_3^{\frac{1}{\mu_3}}$, ..., donnera séparément

$$(\beta)\qquad t_0 = 0,\ t_1 = 0,\ t_2 = 0,\ \ldots\ t_{\mu_1-1} = 0.$$



Démonstration. Soit $y_1^{\frac{1}{\mu_1}} = z$, on aura les deux équations

$$(\gamma) \qquad z^{\mu_1} - y_1 = 0,$$

$$(\delta) \qquad t_0 + t_1 z + \cdots + t_{\mu_1 - 1} z^{\mu_1 - 1} = 0.$$

Si donc les coefficiens t_0, t_1, etc. ne sont pas égaux à zéro, z sera une racine de l'équation (δ). Supposons que l'équation:

$$0 = s_0 + s_1 z + \cdots + s_{k-1} z^{k-1} + z^k$$

soit une équation irréductible à laquelle puisse satisfaire z, s_0, s_1, etc. étant des quantités de la même nature que t_0, t_1, ... $t_{\mu_1 - 1}$, et k un nombre qui est nécessairement moindre que μ_1. Toutes les racines de cette équation doivent se trouver parmi celles de l'équation

$$z^{\mu_1} - y_1 = 0.$$

Or si z est une racine, une autre quelconque pourra être représentée par $\omega^\nu z$; donc, si k est plus grand que l'unité, l'équation doit encore être satisfaite en mettant $\omega^\nu z$ au lieu de z. Cela donne

$$0 = s_0 + s_1 \omega^\nu z + \cdots + s_{k-1} \omega^{(k-1)\nu} z^{k-1} + \omega^{k\nu} z^k,$$

d'où l'on tire, en la combinant avec la précédente,

$$0 = s_1(\omega^\nu - 1) + \cdots + (\omega^{k\nu} - 1) z^{k-1}.$$

Maintenant cette équation, qui n'est que du degré $k-1$, ne peut subsister, à moins que tous ses coefficiens ne soient séparément égaux à zéro. Il faut donc qu'on ait

$$\omega^{k\nu} - 1 = 0, \quad \text{ou} \quad \omega^{k\nu} = 1,$$

ce qui est impossible, en remarquant que μ_1 est un nombre premier. Il faut donc que $k = 1$, or cela donne

$$s_0 + z = 0,$$

d'où

$$z = \sqrt[\mu_1]{y_1} = -s_0,$$

ce qui est de même impossible. Les équations (β) auront donc lieu.

Théorème II. Si une équation,

$$\varphi(y, m) = 0,$$

est satisfaite par une expression algébrique:

$$y = p_0 + p_1 \sqrt[\mu_1]{y_1} + \cdots,$$

de l'ordre n, où n est plus grand que m, elle sera encore satisfaite en mettant au lieu de $\sqrt[\mu_1]{y_1}$ toutes les valeurs $\omega \sqrt[\mu_1]{y_1}$, $\omega^2 \sqrt[\mu_1]{y_1}$ etc.

Théorème III. Si les deux équations:

$$(\varepsilon) \qquad \varphi(y, m) = 0 \text{ et } \varphi_1(y, n) = 0,$$

desquelles la première est irréductible, et où $n \leqq m$, ont une racine commune, il faut que

$$\varphi_1(y, n) = f(y, m) \cdot \varphi(y, m).$$

En effet, quel que soit $\varphi_1(y, n)$, nous pourrons faire

$$\varphi_1(y, n) = f(y, m) \cdot \varphi(y, m) + f_1(y, m),$$

où le degré de $f_1(y, m)$ est moindre que celui de $\varphi(y, m)$. Il faut donc, à cause des équations (ε), qu'on ait en même temps

$$f_1(y, m) = 0,$$

ce qui ne peut avoir lieu, à moins que tous les coefficiens de cette équation ne soient séparément égaux à zéro. Donc, quel que soit y, on a $f_1(y, m) = 0$, et par suite

$$\varphi_1(y, n) = f(y, m) \cdot \varphi(y, m).$$

Théorème IV. Si l'on a

$$(\zeta) \qquad \varphi_1(y, n) = f(y, m) \cdot \varphi(y, m),$$

on doit avoir encore

$$\varphi_1(y, n) = f_1(y, m') \cdot \Pi \varphi(y, m).$$

En effet, en changeant dans l'équation (ζ) le radical extérieur $\sqrt[\mu]{y_1}$ successivement en $\omega \sqrt[\mu]{y_1}$, $\omega^2 \sqrt[\mu]{y_1}$ etc., elle sera encore satisfaite. En désignant les valeurs correspondantes de $\varphi(y, m)$ par $\varphi'(y, m)$, $\varphi''(y, m)$, $\ldots \varphi^{(\mu-1)}(y, m)$, la fonction $\varphi_1(y, n)$ sera divisible par toutes ces fonctions; donc aussi par leur produit, si elles n'ont point de facteurs communs. Or si l'on suppose par exemple que les deux équations $\varphi'(y, m) = 0$, $\varphi''(y, m) = 0$ aient lieu en même temps, on en tirera

$$y^\nu + A_m y^{\nu-1} + B_m y^{\nu-2} + \cdots = 0,$$
$$y^\nu + A_m' y^{\nu-1} + B_m' y^{\nu-2} + \cdots = 0.$$

Or si elles ont une racine commune, elles doivent être identiques. Donc les fonctions $\varphi(y, m)$, $\varphi'(y, m)$ etc. n'ont pas de facteurs communs, par suite la fonction $\varphi_1(y, n)$ sera divisible par le produit

$$\varphi(y, m) \cdot \varphi'(y, m) \ldots \varphi^{(\mu-1)}(y, m),$$

c'est-à-dire par $\Pi\varphi(y, m)$. Donc

$$\varphi_1(y, n) = f_1(y \cdot m') \cdot \Pi\varphi(y, m).$$

Théorème V. Si l'équation

$$\varphi(y, m) = 0$$

est irréductible, celle-ci:

$$\Pi\varphi(y, m) = 0 = \varphi_1(y, m'),$$

le sera de même.

En effet, si elle ne l'était pas, supposons que

$$\varphi_2(y, m') = 0$$

soit une telle équation. Alors les deux équations $\varphi_2(y, m') = 0$ et $\varphi(y, m) = 0$ auraient une racine commune, et par suite

$$\varphi_2(y, m') = f(y) \cdot \Pi\varphi(y, m) = f(y) \cdot \varphi_1(y, m'),$$

ce qui est impossible, car le degré de $\varphi_2(y, m')$ est moindre que celui de $\varphi_1(y, m')$. Donc etc.

Cela posé, rien n'est plus facile que de trouver l'équation la moins élevée à laquelle puisse satisfaire une expression algébrique.

Soit a_m l'expression dont il s'agit, et

$$a_m = f\left(y_m^{\frac{1}{\mu_m}}, \; y_{m-1}^{\frac{1}{\mu_{m-1}}}, \ldots\right),$$

et

$$\psi(y) = 0,$$

l'équation irréductible à laquelle elle doit satisfaire.

La fonction doit d'abord être divisible par $y - a_m$. Or, si elle est divisible par $y - a_m$, elle est encore divisible par

$$\Pi(y - a_m) = \varphi(y, m_1).$$

Mais $\varphi(y, m_1)$ est irréductible, donc $\psi(y)$ est de même divisible par

$$\Pi\varphi(y, m_1) = \varphi_1(y, m_2),$$

ensuite par

$$\Pi\varphi_1(y, m_2) = \varphi_2(y, m_3),$$
etc.

Maintenant les nombres $m, m_1, m_2, \ldots$ forment une suite décroissante, on doit donc enfin parvenir à une fonction

$$\varphi_\nu(y, m_{\nu+1}),$$

où $m_{\nu+1} = 0$. Alors les coefficiens de cette fonction seront rationnels, et comme elle doit diviser la fonction $\psi(y)$, l'équation

$$\varphi_\nu(y, 0) = 0,$$

sera précisément l'équation cherchée.

Le degré de cette équation se trouve aisément. En effet on a successivement

$$\delta\,\varphi(y, m_1) = \delta\Pi(y - a_m) = \mu_m,$$
$$\delta\,\varphi_1(y, m_2) = \delta\Pi\varphi\,(y, m_1) = \mu_m \cdot \mu_{m_1},$$
$$\delta\,\varphi_2(y, m_3) = \delta\Pi\varphi_1(y, m_2) = \mu_m \cdot \mu_{m_1} \cdot \mu_{m_2},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\delta\,\varphi_\nu(y, m_{\nu+1}) = \delta\Pi\,\varphi_{\nu-1}(y, m_\nu) = \mu_m \cdot \mu_{m_1} \cdots \mu_{m_\nu}.$$

Donc le degré de l'équation

$$\psi(y) = 0,$$

est

$$\mu_m \cdot \mu_{m_1} \cdot \mu_{m_2} \cdots \mu_{m_\nu},$$

dans le cas où $m_{\nu+1} = 0$.

De ce qui précède on peut maintenant déduire plusieurs conséquences importantes:

1. Le degré de l'équation irréductible à laquelle satisfait une expression algébrique, est le produit d'un certain nombre d'exposans radicaux qui se trouvent dans l'expression algébrique dont il s'agit. Parmi ces exposans se trouve toujours celui du radical extérieur.
2. L'exposant du radical extérieur est toujours un diviseur du degré de l'équation irréductible à laquelle satisfait une expression algébrique.
3. Si une équation irréductible peut être satisfaite algébriquement, elle est en même temps résoluble algébriquement. En effet, on aura toutes les racines en attribuant dans a_m aux radicaux $y_m^{\frac{1}{\mu_m}}$, $y_{m_1}^{\frac{1}{\mu_{m_1}}}$, $\ldots\, y_{m_\nu}^{\frac{1}{\mu_{m_\nu}}}$ toutes les valeurs dont ils sont susceptibles.

4. Une expression algébrique qui peut satisfaire à une équation irréductible du degré μ, est susceptible d'un nombre μ de valeurs différentes entre elles, et pas davantage.

§ 3.

Sur la forme de l'expression algébrique qui peut satisfaire à une équation irréductible d'un degré donné.

Supposons maintenant que le degré de l'équation

$$\psi(y) = 0,$$

à laquelle satisfait l'expression algébrique a_m, soit exprimé par μ; on doit avoir, comme nous avons vu,

$$\mu = \mu_m . \mu_{m_1} . \mu_{m_2} \ldots \mu_{m_\nu}.$$

Premier cas: si μ est un nombre premier.

Si μ est un nombre premier, on doit avoir

$$\mu_m = \mu,$$

et par suite

$$a_m = p_0 + p_1 y_m^{\frac{1}{\mu}} + p_2 y_m^{\frac{2}{\mu}} + \cdots + p_{\mu-1} y_m^{\frac{\mu-1}{\mu}}.$$

On trouve les autres racines en mettant au lieu de $y_m^{\frac{1}{\mu}}$ les valeurs

$$\omega y_m^{\frac{1}{\mu}}, \ \omega^2 y_m^{\frac{1}{\mu}}, \ \ldots \omega^{\mu-1} y_m^{\frac{1}{\mu}}.$$

On aura ainsi, en désignant par $z_1, z_2, \ldots z_\mu$ les racines de l'équation, et en faisant pour abréger $y_m = s$,

$$z_1 = p_0 + p_1 s^{\frac{1}{\mu}} + p_2 s^{\frac{2}{\mu}} + \cdots + p_{\mu-1} s^{\frac{\mu-1}{\mu}},$$

$$z_2 = p_0 + p_1 \omega s^{\frac{1}{\mu}} + p_2 \omega^2 s^{\frac{2}{\mu}} + \cdots + p_{\mu-1} \omega^{\mu-1} s^{\frac{\mu-1}{\mu}},$$

. . . .

$$z_\mu = p_0 + p_1 \omega^{\mu-1} s^{\frac{1}{\mu}} + p_2 \omega^{\mu-2} s^{\frac{2}{\mu}} + \cdots + p_{\mu-1} \omega s^{\frac{\mu-1}{\mu}}.$$

Maintenant pour que ces quantités soient en effet des racines, il faut qu'on n'ait aucune nouvelle valeur en attribuant à tous les radicaux qui se trouvent dans les quantités $p_0, p_1, p_2 \ldots p_{\mu-1}$ et s, les valeurs dont ces radicaux sont susceptibles.

Soient $p_0', p_1', p_2', \ldots p'_{\mu-1}$, s' un système de valeurs ainsi formées, on doit avoir

$$p_0' + p_1'\omega' s'^{\frac{1}{\mu}} + \cdots + p'_{\mu-1}\omega'^{\mu-1} s'^{\frac{\mu-1}{\mu}} = p_0 + p_1\omega s^{\frac{1}{\mu}} + \cdots + p_{\mu-1}\omega^{\mu-1} s^{\frac{\mu-1}{\mu}},$$

et à une valeur différente de ω' il répond une valeur différente de ω. En faisant donc $\omega' = 1, \omega, \omega^2, \ldots \omega^{\mu-1}$, on aura, en désignant les valeurs correspondantes de ω par $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots \omega_{\mu-1}$,

$$p_0 + p_1\omega_0 s^{\frac{1}{\mu}} + p_2\omega_0^2 s^{\frac{2}{\mu}} + \cdots = p_0' + p_1' s'^{\frac{1}{\mu}} + p_2' s'^{\frac{2}{\mu}} + \cdots,$$

$$p_0 + p_1\omega_1 s^{\frac{1}{\mu}} + p_2\omega_1^2 s^{\frac{2}{\mu}} + \cdots = p_0' + p_1'\omega s'^{\frac{1}{\mu}} + p_2'\omega^2 s'^{\frac{2}{\mu}} + \cdots,$$

. . . .

$$p_0 + p_1\omega_{\mu-1} s^{\frac{1}{\mu}} + p_2\omega_{\mu-1}^2 s^{\frac{2}{\mu}} + \cdots = p_0' + p_1'\omega^{\mu-1} s'^{\frac{1}{\mu}} + p_2'\omega^{\mu-2} s'^{\frac{2}{\mu}} + \cdots.$$

En ajoutant il viendra

$$\mu p_0 = \mu p_0' \text{ c'est-à-dire } p_0' = p_0;$$

$$\mu p' s'^{\frac{1}{\mu}} = p_0(1 + \omega^{-1} + \omega^{-2} + \cdots + \omega^{-\mu+1})$$
$$+ p_1 s^{\frac{1}{\mu}}(\omega_0 + \omega_1\omega^{-1} + \omega_2\omega^{-2} + \cdots + \omega_{\mu-1}\omega^{-\mu+1}) + \cdots.$$

De là on tirera

$$s'^{\frac{1}{\mu}} = f\left(\omega, p, p', p_1, p_1', \ldots s', s^{\frac{1}{\mu}}\right),$$

$$s'^{\frac{1}{\mu}} = q_0 + q_1 s^{\frac{1}{\mu}} + \cdots + q_{\mu-1} s^{\frac{\mu-1}{\mu}},$$

$$s' = \left(q_0 + q_1 s^{\frac{1}{\mu}} + \cdots + q_{\mu-1} s^{\frac{\mu-1}{\mu}}\right)^{\mu},$$

$$s' = t_0 + t_1 s^{\frac{1}{\mu}} + \cdots + t_{\mu-1} s^{\frac{\mu-1}{\mu}};$$

or je dis qu'on doit avoir

$$t_1 = 0, \ t_2 = 0, \ \ldots t_{\mu-1} = 0;$$

en effet dans le cas contraire on aurait

$$(a) \qquad s^{\frac{1}{\mu}} = f(s, s', p, p', p_1, p_1', \ldots p_{\mu-1}, p'_{\mu-1}),$$

et par là

$$z_1 = f(s, p_0, p_1, \ldots s', p_0', p_1', \ldots).$$

Cela posé on ne peut pas exprimer s', p_0', p_1' ... rationnellement en fonction de s, p_0, p_1, p_2, ...; car cela donnerait $s^{\frac{1}{\mu}}$ en fonction rationnelle de s, p_0, p_1 ..., ce qui est impossible. Mais si l'on cherche l'équation irréductible à laquelle pourra satisfaire z_1, on trouve que son degré doit être un nombre composé, ce qui n'est pas. Donc l'équation (a) ne peut avoir lieu, et par suite on doit avoir $t_1=0$, $t_2=0$, ... $t_{\mu-1}=0$.

Cela donne

$$\left(q_0+q_1\omega s^{\frac{1}{\mu}}+\cdots+q_{\mu-1}\omega^{\mu-1}s^{\frac{\mu-1}{\mu}}\right)^\mu=s',$$
$$\left(q_0+q_1\omega^2 s^{\frac{1}{\mu}}+\cdots+q_{\mu-1}\omega^{\mu-2}s^{\frac{\mu-1}{\mu}}\right)^\mu=s',$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Donc

$$q_0+q_1\omega s^{\frac{1}{\mu}}+q_2\omega^2 s^{\frac{2}{\mu}}+\cdots+q_{\mu-1}\omega^{\mu-1}s^{\frac{\mu-1}{\mu}}=\omega^\nu s'^{\frac{1}{\mu}}$$
$$=q_0\omega^\nu+q_1\omega^\nu s^{\frac{1}{\mu}}+q_2\omega^\nu s^{\frac{2}{\mu}}+\cdots+q_{\mu-1}\omega^\nu s^{\frac{\mu-1}{\mu}},$$

d'où l'on tire

$$\omega^\nu q_0=q_0,\ \omega^\nu q_1=\omega q_1,\ \omega^\nu q_2=\omega^2 q_2,\ \ldots\omega^\nu q_\nu=\omega^\nu q_\nu,\ \ldots\omega^\nu q_{\mu-1}=\omega^{\mu-1}q_{\mu-1},$$
$$q_0=0,\ q_1=0,\ q_2=0,\ \ldots q_{\nu-1}=0,\ q_{\nu+1}=0,\ \ldots q_{\mu-1}=0.$$

Donc

$$s'^{\frac{1}{\mu}}=q^\nu . s^{\frac{\nu}{\mu}},\quad s'^{\frac{2}{\mu}}=q_\nu^2 . s^{\frac{2\nu}{\mu}},\ \text{etc.}$$

$$p_0'+p_1's'^{\frac{1}{\mu}}+p_2's'^{\frac{2}{\mu}}+\cdots=p_0+\omega p_1 s^{\frac{1}{\mu}}+\cdots+\omega^\nu p_\nu s^{\frac{\nu}{\mu}}+\cdots;$$

par suite

$$p_1's'^{\frac{1}{\mu}}=\omega^\nu p_\nu s^{\frac{\nu}{\mu}};$$

de là

$$p_1'^\mu s'=p_\nu^\mu s^\nu.$$

Maintenant puisque ν ne peut avoir que l'une des valeurs 2, 3, ... $\mu-1$, il s'ensuit que $p_1^\mu s$ n'aura qu'un nombre $\mu-1$ de valeurs différentes; $p_1^\mu s$ doit donc satisfaire à une équation qui est tout au plus du degré $\mu-1$.

On peut faire $p_1 = 1$, et alors on aura

$$z_1 = p_0 + s^{\frac{1}{\mu}} + p_2 s^{\frac{2}{\mu}} + \cdots + p_{\mu-1} s^{\frac{\mu-1}{\mu}},$$

$$z_2 = p_0 + \omega s^{\frac{1}{\mu}} + p_2 \omega^2 s^{\frac{2}{\mu}} + \cdots + p_{\mu-1} \omega^{\mu-1} s^{\frac{\mu-1}{\mu}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$z_\mu = p_0 + \omega^{\mu-1} s^{\frac{1}{\mu}} + p_2 \omega^{\mu-2} s^{\frac{2}{\mu}} + \cdots + p_{\mu-1} \omega s^{\frac{\mu-1}{\mu}}.$$

Je dis maintenant qu'on pourra exprimer les quantités $p_2, p_3 \ldots p_{\mu-1}$ rationnellement en fonction de s et des quantités connues.

On a

$$p_0 = \frac{1}{\mu}(z_1 + z_2 + \cdots + z_\mu) = \text{une quantité connue.}$$

$$s^{\frac{1}{\mu}} = \frac{1}{\mu}(z_1 + \omega^{\mu-1} z_2 + \cdots + \omega z_\mu),$$

$$p_2 s^{\frac{2}{\mu}} = \frac{1}{\mu}(z_1 + \omega^{\mu-2} z_2 + \cdots + \omega^2 z_\mu),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

De là on tire

$$p_2 s = \left(\frac{1}{\mu}\right)^{\mu-1}(z_1 + \omega^{-2} z_2 + \cdots + \omega^{-2(\mu-1)} z_\mu)(z_1 + \omega^{-1} z_2 + \cdots + \omega^{-(\mu-1)} z_\mu)^{\mu-2},$$

$$p_3 s = \left(\frac{1}{\mu}\right)^{\mu-2}(z_1 + \omega^{-3} z_2 + \cdots + \omega^{-3(\mu-1)} z_\mu)(z_1 + \omega^{-1} z_2 + \cdots + \omega^{-(\mu-1)} z_\mu)^{\mu-3},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$q_1 + q_2 + \cdots + q_\nu = a_0,$$

$$q_1 s_1 + q_2 s_2 + \cdots + q_\nu s_\nu = a_1,$$

$$q_1 s_1^2 + q_2 s_2^2 + \cdots + q_\nu s_\nu^2 = a_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$q_1 s_1^{\nu-1} + q_2 s_2^{\nu-1} + \cdots + q_\nu s_\nu^{\nu-1} = a_{\nu-1};$$

$$q_1(s_1^{\nu-1} + R_{\nu-2} s_1^{\nu-2} + \cdots + R_1 s_1 + R_0)$$
$$= a_0 R_0 + a_1 R_1 + a_2 R_2 + \cdots + a_{\nu-2} R_{\nu-2} + a_{\nu-1},$$

c'est-à-dire

$$q_1 = f(s, \ldots),$$

tant qu'on n'a pas

$$s_1^{\nu-1} + \cdots + R_0 = (s_1 - s_2)(s_1 - s_3)\ldots(s_1 - s_\nu) = 0.$$

Or soit

$$s_1 = s_n$$

$$(z_1 + \omega^{-1} z_2 + \omega^{-2} z_3 + \ldots)^\mu = (z_1 + \omega_1 z_2 + \omega_2 z_3 + \ldots)^\mu$$

$$\mu s^{\frac{1}{\mu}} = p_0 + s^{\frac{1}{\mu}} + p_2 s^{\frac{2}{\mu}} + \ldots$$

$$+ \omega_1 p_0 + \omega_1 \omega s^{\frac{1}{\mu}} + p_2 \omega_1 \omega^2 s^{\frac{2}{\mu}} + \ldots$$

$$+ \omega_2 p_0 + \omega_2 \omega^2 s^{\frac{1}{\mu}} + p_2 \omega_2 \omega^4 s^{\frac{2}{\mu}} + \ldots$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ,$$

$$1 + \omega_1 \omega + \omega_2 \omega^2 + \cdots + \omega_{\mu-1} \omega^{\mu-1} = \mu,$$

ce qui est impossible; donc

$q_1 = p_m s$ rationnel en s et en quantités connues.

Donc

$$z_1 = p_0 + s^{\frac{1}{\mu}} + f_2 s . s^{\frac{2}{\mu}} + f_3 s . s^{\frac{3}{\mu}} + \cdots + f_{\mu-1} s . s^{\frac{\mu-1}{\mu}}.$$

Soit $P = 0$ l'équation la moins élevée en s du degré ν, les ν racines de cette équation seront de la forme

$$s,\ p_{m'}^{\mu} s^{m'},\ p_{m''}^{\mu} s^{m''},\ \ldots p_{m^{(\nu-1)}}^{\mu} s^{m^{(\nu-1)}},$$

$m', m'', \ldots m^{(\nu-1)}$ se trouvant parmi celles-ci

$$2,\ 3,\ 4,\ \ldots \mu - 1.$$

$$s_1 = p_0^\mu s^m,$$

$$s_2 = p_1^\mu s_1^m,$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$s = p_{k-1}^\mu s_{k-1}^m = p_{k-1}^\mu p_{k-2}^{\mu m} p_{k-3}^{\mu m^2} \ldots p_0^{\mu m^{k-1}} s^{m^k},$$

$$\frac{m^k - 1}{\mu} = \text{entier},$$

$$k = \text{facteur de } \mu - 1,$$

$$k = \nu, \text{ ou } k < \nu.$$

Soit m une racine primitive pour le module μ, on pourra représenter z_1 par

$$z_1 = p_0 + s^{\frac{1}{\mu}} + p_1 s^{\frac{m}{\mu}} + p_2 s^{\frac{m^2}{\mu}} + \cdots + p_{\mu-2} s^{\frac{m^{\mu-2}}{\mu}}.$$

Soient $s_1, s_2, s_3, \ldots s_{\nu-1}$ les valeurs de s, on doit avoir

$$s_1^{\frac{1}{\mu}} = p_\alpha s^{\frac{m^\alpha}{\mu}},$$

$$s_2^{\frac{1}{\mu}} = p_\alpha' s_1^{\frac{m^\alpha}{\mu}},$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$s^{\frac{1}{\mu}} = p_\alpha^{(k-1)} s_{k-1}^{\frac{m^\alpha}{\mu}};$$

$$s^{\frac{1}{\mu}} = p_\alpha^{(k-1)} (p_\alpha^{(k-2)})^{m^\alpha} (p_\alpha^{(k-3)})^{m^{2\alpha}} \ldots (p_\alpha^0)^{m^{(k-1)\alpha}} . s^{\frac{m^{\alpha k}}{\mu}},$$

$$\frac{m^{\alpha k} - 1}{\mu} = \text{entier},$$

$$k = \text{facteur de } \mu - 1,$$

$$\alpha k = (\mu - 1) n,$$

$$\frac{\mu - 1}{k} = \beta,$$

$$\alpha = n\beta.$$

$$s_1^{\frac{1}{\mu}} = p s^{\frac{m^{n\beta}}{\mu}},$$

$$s_2^{\frac{1}{\mu}} = p_1 s_1^{\frac{m^{n\beta}}{\mu}} = p_1 p^{m^{n\beta}} s^{\frac{m^{2n\beta}}{\mu}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Soit $q^\mu s^{m^{\beta'}}$ une autre racine,

$$s' = q_1 s^{m^{n\beta + n'\beta'}}$$

en sera encore une.

Il faut donc que

$$k''(n\beta + n'\beta') = n''(\mu - 1);$$

$$\beta = \alpha\beta'',$$

$$\beta' = \alpha'\beta'',$$

$$\mu - 1 = e\,\alpha\alpha'\beta'';$$

$$k''(n\alpha + n'\alpha')\beta'' = n'' e\,\alpha\alpha'\beta'',$$

$$k''(n\alpha + n'\alpha') = n'' e\,\alpha\alpha';$$

$$k'' = \alpha\alpha'.k''',$$

$$k'''(n\alpha + n'\alpha') = n''e;$$

$$s'^{\frac{1}{\mu}} = q_1 s^{\frac{m^{(n\alpha+n'\alpha')\beta''}}{\mu}},$$

$$n\alpha + n'\alpha' = 1,$$

$$s'^{\frac{1}{\mu}} = q_1 s^{\frac{m^{\beta''}}{\mu}};$$

$$\mu - 1 = k\beta,$$

$$\mu - 1 = k'\beta',$$

$$\mu - 1 = k''\beta'',$$

mais $\beta'' < \beta$, $\beta'' < \beta'$; donc $k'' > k$, $k'' > k'$, ce qui est contre l'hypothèse; donc les racines de l'équation

$$P = 0$$

pourront être représentées par

$$s,$$

$$s_1 = (fs)^\mu . s^{m^\alpha},$$

$$s_2 = (fs_1)^\mu . s_1^{m^\alpha},$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$s_{\nu-1} = (fs_{\nu-2})^\mu . s_{\nu-2}^{m^\alpha};$$

où

$$s = (fs_{\nu-1})^\mu . s_{\nu-1}^{m^\alpha}$$

$$\alpha = \frac{\mu - 1}{\nu}.$$

Le degré de l'équation $P = 0$ doit donc être un facteur de $\mu - 1$.

Désignons $(fs)^\mu . s^{m^\alpha}$ par θs, les racines deviendront

$$s,\ \theta s,\ \theta^2 s,\ \theta^3 s,\ \ldots\ \theta^{\nu-1} s,\ \text{où}\ \theta^\nu s = s.$$

On a encore

$$s_1 = (fs)^\mu s^{m^\alpha},$$

$$s_2 = (fs_1)^\mu . (fs)^{\mu m^\alpha} s^{m^{2\alpha}},$$

$$s_3 = (fs_2)^\mu . (fs_1)^{\mu m^\alpha} (fs)^{\mu m^{2\alpha}} s^{m^{3\alpha}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\begin{aligned}
z_1 = p_0 &+ s^{\frac{1}{\mu}} + f_1 s . s^{\frac{m^\alpha}{\mu}} + f_2 s . s^{\frac{m^{2\alpha}}{\mu}} + \cdots + f_{\nu-1} s . s^{\frac{m^{(\nu-1)\alpha}}{\mu}} \\
&+ f_0' s . s^{\frac{m}{\mu}} + f_1' s . s^{\frac{m^{\alpha+1}}{\mu}} + f_2' s . s^{\frac{m^{2\alpha+1}}{\mu}} + \cdots + f'_{\nu-1} s . s^{\frac{m^{(\nu-1)\alpha+1}}{\mu}} \\
&+ f_0'' s . s^{\frac{m^2}{\mu}} + f_1'' s . s^{\frac{m^{\alpha+2}}{\mu}} + f_2'' s . s^{\frac{m^{2\alpha+2}}{\mu}} + \cdots + f''_{\nu-1} s . s^{\frac{m^{(\nu-1)\alpha+2}}{\mu}} \\
&+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&+ f_0^{(\alpha-1)} s . s^{\frac{m^{\alpha-1}}{\mu}} + f_1^{(\alpha-1)} s . s^{\frac{m^{2\alpha-1}}{\mu}} + f_2^{(\alpha-1)} s . s^{\frac{m^{3\alpha-1}}{\mu}} + \cdots + f_{\nu-1}^{(\alpha-1)} s . s^{\frac{m^{\nu\alpha-1}}{\mu}} .
\end{aligned}$$

$$s_n^{\frac{1}{\mu}} = f_n s . s^{\frac{m^{n\alpha}}{\mu}},$$

$$s_n^{\frac{m^\delta}{\mu}} = (f_n s)^{m^\delta} . s^{\frac{m^{\delta+n\alpha}}{\mu}},$$

$$f_n^{(\delta)} s . (f_n s)^{-m^\delta} . s_n^{\frac{m^\delta}{\mu}} = f_n^{(\delta)} s . s^{\frac{m^{n\alpha+\delta}}{\mu}} .$$

$$\begin{aligned}
z_1 = p_0 &+ s^{\frac{1}{\mu}} + s_1^{\frac{1}{\mu}} + s_2^{\frac{1}{\mu}} + \cdots + s_{\nu-1}^{\frac{1}{\mu}} \\
&+ \varphi_1 s . s^{\frac{m}{\mu}} + \varphi_1 s_1 . s_1^{\frac{m}{\mu}} + \varphi_1 s_2 . s_2^{\frac{m}{\mu}} + \cdots + \varphi_1 s_{\nu-1} . s_{\nu-1}^{\frac{m}{\mu}} \\
&+ \varphi_2 s . s^{\frac{m^2}{\mu}} + \varphi_2 s_1 . s_1^{\frac{m^2}{\mu}} + \varphi_2 s_2 . s_2^{\frac{m^2}{\mu}} + \cdots + \varphi_2 s_{\nu-1} . s_{\nu-1}^{\frac{m^2}{\mu}} \\
&+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&+ \varphi_{\alpha-1} s . s^{\frac{m^{\alpha-1}}{\mu}} + \varphi_{\alpha-1} s_1 . s_1^{\frac{m^{\alpha-1}}{\mu}} + \varphi_{\alpha-1} s_2 . s_2^{\frac{m^{\alpha-1}}{\mu}} + \cdots + \varphi_{\alpha-1} s_{\nu-1} . s_{\nu-1}^{\frac{m^{\alpha-1}}{\mu}} .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s^{\frac{1}{\mu}} &= A . a^{\frac{1}{\mu}} . a_1^{\frac{m^\alpha}{\mu}} . a_2^{\frac{m^{2\alpha}}{\mu}} \ldots a_{\nu-1}^{\frac{m^{(\nu-1)\alpha}}{\mu}}, \\
s_1^{\frac{1}{\mu}} &= A_1 . a^{\frac{m^\alpha}{\mu}} . a_1^{\frac{m^{2\alpha}}{\mu}} . a_2^{\frac{m^{3\alpha}}{\mu}} \ldots a_{\nu-1}^{\frac{1}{\mu}}, \\
s_2^{\frac{1}{\mu}} &= A_2 . a^{\frac{m^{2\alpha}}{\mu}} . a_1^{\frac{m^{3\alpha}}{\mu}} . a_2^{\frac{m^{4\alpha}}{\mu}} \ldots a_{\nu-1}^{\frac{m^\alpha}{\mu}}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
s_{\nu-1}^{\frac{1}{\mu}} &= A_{\nu-1} . a^{\frac{m^{(\nu-1)\alpha}}{\mu}} . a_1^{\frac{1}{\mu}} . a_2^{\frac{m^\alpha}{\mu}} \ldots a_{\nu-1}^{\frac{m^{(\nu-2)\alpha}}{\mu}} .
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{\mu}\log s = \log A + \frac{1}{\mu}\log a + \frac{m^{\alpha}}{\mu}\log a_1 + \frac{m^{2\alpha}}{\mu}\log a_2 + \dots$$

$$\frac{1}{\mu}\log s_1 = \log A_1 + \frac{m^{\alpha}}{\mu}\log a + \frac{m^{2\alpha}}{\mu}\log a_1 + \frac{m^{3\alpha}}{\mu}\log a_2 + \dots$$

. . . .

$$s^{\frac{m^{\alpha}}{\mu}} : s_1^{\frac{1}{\mu}} = (A^{m^{\alpha}} : A_1) \cdot a_{\nu-1}^{\frac{m^{\nu\alpha}-1}{\mu}}.$$

$$\psi(y)$$

$$y^m + f(s) \cdot y^{m-1} + f'(s) \cdot y^{m-2} + \dots = 0 = \varphi(y, s)$$

$$y^m + f(s') \cdot y^{m-1} + f'(s') \cdot y^{m-2} + \dots = 0 = \varphi(y, s')$$

$$\varphi\, \varrho = 0$$

$$\varrho, \varrho_1, \varrho_2, \dots \varrho_{\nu-1}$$

$$\varphi(s, \varrho) = 0$$

$$s, s', s'', \dots s^{(\mu-1)}$$

$$\varphi(s_1, \varrho_1) = 0$$

$$s_1, s_1', s_1'', \dots s_1^{(\mu-1)}$$

$$\varphi(s_2, \varrho_2) = 0$$

$$s_2, s_2', s_2'', \dots s_2^{(\mu-1)}$$

. . . .

$$f(y, s, \varrho) = 0$$

$$f(y, s_1, \varrho_1) = 0$$

$$f(y, s_2, \varrho_2) = 0$$

. . . .

$$f(y, s_{\nu-1}, \varrho_{\nu-1}) = 0$$

$$F(y, s, s_1, s_2, \dots s_{\nu-1}, \varrho, \varrho_1, \varrho_2, \dots \varrho_{\nu-1}) = 0$$

$$s_{\nu-1}, s_{\nu-2}, s_{\nu-3}, \dots s_{\varepsilon}$$

fonctions rationnelles de

$$s, s_1, s_2, \dots s_{\varepsilon-1}, \varrho, \varrho_1, \varrho_2, \dots \varrho_{\nu-1}$$

$F(y, s, s_1, s_2, \ldots s_{\varepsilon-1}, \varrho, \varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_{\nu-1})$ sera facteur de $\psi(y)$ pour toutes les valeurs de $s, s_1, s_2, \ldots$

Donc le degré de $\psi(y)$ est divisible par μ^ε.

Il y a deux cas:

$$\text{si } \delta\psi(y) = \mu^\varepsilon,$$
$$\text{si } \delta\psi(y) = \mu^\varepsilon \cdot \mu'.$$

Dans le premier cas:

$$y = f(s, s_1, s_2, \ldots s_{\varepsilon-1}, \varrho, \varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_{\nu-1}).$$

Dans le second cas:

$$\delta F(y, s, s_1, \ldots \varrho, \varrho_1, \ldots) = \mu',$$

$$\begin{aligned} F(y, s, s_1, \ldots \varrho, \varrho_1, \ldots) = y^{\mu'} &+ f(s, s_1, \ldots \varrho, \varrho_1, \ldots) y^{\mu'-1} \\ &+ f'(s, s_1, \ldots \varrho, \varrho_1, \ldots) y^{\mu'-2} \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Soit

$$z = F(\alpha, s, s_1, \ldots \varrho, \varrho_1, \ldots)$$

z n'obtiendra pour les différens radicaux qu'un nombre μ^ε de valeurs différentes; donc z sera racine d'une équation du degré μ^ε. Par suite

$$\psi(y) = 0$$

donne

$$y^{\mu'} + f(z) \cdot y^{\mu'-1} + f'(z) \cdot y^{\mu'-2} + \cdots = 0,$$

où z est déterminé par une équation du degré μ^ε.

$$f(y,\ s)$$

$$f\left(y,\ \sqrt[\mu]{R},\ p,\ q,\ \ldots\right)=0$$

$$f\left(y,\ \sqrt[\mu]{R_1},\ p_1,\ q_1,\ \ldots\right)=0$$

$$f\left(y,\ \sqrt[\mu]{R_2},\ p_2,\ q_2,\ \ldots\right)=0$$

. . . .

$$f\left(y,\ \sqrt[\mu]{R_{\nu-1}},\ p_{\nu-1},\ q_{\nu-1},\ \ldots\right)=0$$

$$\psi(y)=\Pi f\left(y,\ \sqrt[\mu]{R},\ p,\ q,\ \ldots\right)=\Pi f\left(y,\ \sqrt[\mu]{R_1},\ p_1,\ q_1,\ \ldots\right)=\ldots$$

$$\ldots=\Pi f\left(y,\ \sqrt[\mu]{R_{\nu-1}},\ p_{\nu-1},\ q_{\nu-1},\ \ldots\right)=0$$

$$f\left(y,\ \sqrt[\mu]{R},\ \sqrt[\mu]{R_1},\ \sqrt[\mu]{R_2},\ \ldots\ \sqrt[\mu]{R_{\nu-1}},\ p,\ q,\ \ldots\ p_1,\ q_1,\ \ldots\ p_{\nu-1},\ q_{\nu-1}\right)=0$$

$$f\left(y,\ \sqrt[\mu]{R},\ \sqrt[\mu]{R_1},\ \ldots\sqrt[\mu]{R_{\varepsilon-1}},\ p,\ q,\ \ldots p_1,\ q_1,\ \ldots p_{\nu-1},\ q_{\nu-1},\ R_\varepsilon,\ R_{\varepsilon+1}\ldots R_{\nu-1}\right)=0$$

XIX.

FRAGMENS SUR LES FONCTIONS ELLIPTIQUES.

I.

RECHERCHES SUR LES FONCTIONS ELLIPTIQUES.

SECOND MÉMOIRE.

Dans le mémoire sur les fonctions elliptiques inséré dans les tomes II et III de ce journal*) j'ai développé plusieurs propriétés de ces fonctions tirées de la considération des fonctions inverses. Je vais continuer ces recherches dans ce second mémoire.

§ 1.

Soit

(1) $$\alpha = \frac{(m+\mu)\,\omega + (m-\mu)\,\varpi i}{2n+1},$$

où m, μ, n sont des nombres entiers tels que $m+\mu$, $m-\mu$, $2n+1$ ne soient pas divisibles par le même facteur, il resulte de l'équation (31) du mémoire cité qu'on aura

(2) $$\varphi(\theta + (2n+1)\,\alpha) = \varphi\,\theta,$$

et que toutes les quantités $\varphi\theta$, $\varphi(\theta+\alpha)$, $\varphi(\theta+2\alpha)$, $\ldots$ $\varphi(\theta+2n\alpha)$ seront

---

*) Voyez t. I, p. 263 de cette édition.

différentes entre elles, en représentant par θ une quantité indéterminée. Cela posé, faisons

(3) $$\varphi_1\theta = \varphi\theta . \varphi(\alpha+\theta) . \varphi(\alpha-\theta) . \varphi(2\alpha+\theta) . \varphi(2\alpha-\theta) \dots \varphi(n\alpha+\theta) . \varphi(n\alpha-\theta)$$

il est clair qu'on aura en vertu de l'équation (2)

(4) $$\varphi_1\theta = \varphi_1(\theta \pm \alpha) = \varphi_1(\theta \pm 2\alpha) = \dots .$$

En vertu de la formule (13) tome II, p. 107:

(5) $$\varphi(\alpha+\beta) . \varphi(\alpha-\beta) = \frac{\varphi^2\alpha - \varphi^2\beta}{1 + e^2c^2\varphi^2\alpha . \varphi^2\beta},$$

on pourra écrire l'expression de $\varphi_1\theta$ comme il suit:

(6) $$\varphi_1\theta = \varphi\theta \frac{\varphi^2\alpha - \varphi^2\theta}{1+e^2c^2\varphi^2\alpha . \varphi^2\theta} . \frac{\varphi^2 2\alpha - \varphi^2\theta}{1+e^2c^2\varphi^2 2\alpha . \varphi^2\theta} \dots \frac{\varphi^2 n\alpha - \varphi^2\theta}{1+e^2c^2\varphi^2 n\alpha . \varphi^2\theta};$$

$\varphi_1\theta$ sera donc une fonction rationnelle de $\varphi\theta$. Faisons $\varphi\theta = x$, on aura l'équation

(7) $$\left\{\begin{array}{l} 0 = x(\varphi^2\alpha - x^2)(\varphi^2 2\alpha - x^2) \dots (\varphi^2 n\alpha - x^2) \\ - \varphi_1\theta . (1+e^2c^2\varphi^2\alpha . x^2)(1+e^2c^2\varphi^2 2\alpha . x^2) \dots (1+e^2c^2\varphi^2 n\alpha . x^2), \end{array}\right.$$

qui est du degré $2n+1$ par rapport à x. L'une des racines de cette équation est $x = \varphi\theta$, or d'après la formule (4) $\varphi_1\theta$ ne change pas de valeur en mettant $\theta + \nu\alpha$ au lieu de θ, où ν est un nombre entier quelconque; donc $\varphi(\theta+\nu\alpha)$ sera encore une racine. Donc puisque les $2n+1$ quantités

$$\varphi\theta, \ \varphi(\theta+\alpha), \ \varphi(\theta+2\alpha), \ \dots \ \varphi(\theta+2n\alpha)$$

sont différentes entre elles, ces quantités seront les racines de l'équation (7).

Maintenant nous allons démontrer le théorème suivant:

Toute fonction rationnelle des quantités

$$\varphi\theta, \ \varphi(\theta+\alpha), \ \dots \ \varphi(\theta+2n\alpha)$$

qui ne change pas de valeur en mettant $\theta+\alpha$ au lieu de θ, pourra être exprimée par:

$$p \pm q \sqrt{\left[1 - \left(\frac{\varphi_1\theta}{\varphi_1\frac{\omega}{2}}\right)^2\right]\left[1 - \left(\frac{\varphi_1\theta}{\varphi_1\frac{\varpi i}{2}}\right)^2\right]},$$

où p et q sont des fonctions rationnelles de $\varphi_1\theta$.

Soit $\psi\theta$ la fonction dont il s'agit et qui soit telle que

(8) $$\psi(\theta+\alpha) = \psi\theta.$$

Comme on a, en vertu de la formule (10) tome II, p. 105,

$$(9) \qquad \varphi(\theta+\nu\alpha)=\frac{\varphi\theta.f\nu\alpha.F\nu\alpha+\varphi\nu\alpha.f\theta.F\theta}{1+e^2c^2\varphi^2\theta.\varphi^2\nu\alpha},$$

on voit que $\psi\theta$ pourra s'exprimer rationnellement en $\varphi\theta$ et $f\theta.F\theta$; or on a

$$(f\theta.F\theta)^2=(1-c^2\varphi^2\theta)(1+e^2\varphi^2\theta),$$

donc $\psi\theta$ pourra être mise sous la forme

$$(10) \qquad \psi\theta=\psi_1\theta+\psi_2\theta.f\theta.F\theta,$$

où $\psi_1\theta$ et $\psi_2\theta$ sont des fonctions rationnelles de $\varphi\theta$.

Mettons maintenant, dans la fonction $\psi\theta$, $-\alpha$ au lieu de α, et désignons par $'\psi\theta$ la valeur correspondante de $\psi\theta$, il suit de l'équation (9) qu'on aura la valeur de $'\psi\theta$ en changeant, dans l'expression de $\psi\theta$, le signe du radical $f\theta.F\theta$. Donc

$$(11) \qquad '\psi\theta=\psi_1\theta-\psi_2\theta.f\theta.F\theta.$$

Il est clair de même que la fonction $'\psi\theta$ ne change pas de valeur en mettant $\theta+\alpha$ au lieu de θ, de sorte que

$$(12) \qquad '\psi(\theta+\alpha)='\psi\theta.$$

Les équations (10), (11) donneront

$$(13) \qquad \begin{cases} \psi_1\theta=\frac{1}{2}(\psi\theta+'\psi\theta), \\ \psi_2\theta.f\theta.F\theta=\frac{1}{2}(\psi\theta-'\psi\theta), \end{cases}$$

Considérons d'abord la fonction $\psi_1\theta$. En vertu des équations (8), (12) on aura $\psi_1(\theta+\alpha)=\psi_1\theta$; donc en mettant au lieu de θ successivement $\theta+\alpha$, $\theta+2\alpha$, ...,

$$\psi_1\theta=\psi_1(\theta+\alpha)=\psi_1(\theta+2\alpha)=\cdots=\psi_1(\theta+2n\alpha),$$

d'où l'on déduit

$$\psi_1\theta=\frac{1}{2n+1}\left\{\psi_1\theta+\psi_1(\theta+\alpha)+\psi_1(\theta+2\alpha)+\cdots+\psi_1(\theta+2n\alpha)\right\}.$$

Maintenant $\psi_1\theta$ est une fonction rationnelle de $\varphi\theta$, donc le second membre de cette équation est une fonction rationnelle et symétrique, donc en vertu d'un théorème connu d'algèbre on pourra exprimer $\psi_1\theta$ rationnellement par les coefficiens de l'équation (7), c'est-à-dire que $\psi_1\theta$ sera une fonction rationnelle de $\varphi_1\theta$.

En prenant le carré de la fonction $\psi_2\theta.f\theta.F\theta$, on aura une fonction

rationnelle de $\varphi\theta$ qui ne change pas de valeur en mettant $\theta+\alpha$ au lieu de θ, donc $(\psi_2\theta.f\theta.F\theta)^2$ pourra, de même que $\psi_1\theta$, s'exprimer rationnellement en $\varphi_1\theta$. On voit donc qu'on pourra faire

$$\psi\theta = p \pm \sqrt{q'},$$

où p et q' sont des fonctions rationnelles de $\varphi_1\theta$.

Or on peut extraire en partie la racine carrée de la fonction q'. Soit

$$\chi\theta = (\varphi\theta)^2\varphi(\theta+\alpha) + [\varphi(\theta+\alpha)]^2\varphi(\theta+2\alpha) + [\varphi(\theta+2\alpha)]^2\varphi(\theta+3\alpha) + \cdots$$
$$\cdots + [\varphi(\theta+(2n-1)\alpha)]^2\varphi(\theta+2n\alpha) + [\varphi(\theta+2n\alpha)]^2\varphi\theta,$$

et désignons par $'\chi\theta$ la valeur de $\chi\theta$ qui provient du changement de α en $-\alpha$; on aura selon ce qui précède

$$\chi\theta = \chi_1\theta + \chi_2\theta.f\theta.F\theta,$$
$$'\chi\theta = \chi_1\theta - \chi_2\theta.f\theta.F\theta,$$

où $\chi_1\theta$ et $\chi_2\theta$ sont des fonctions rationnelles de $\varphi\theta$.

On en tire:

(14) $$\tfrac{1}{2}(\chi\theta - '\chi\theta) = \chi_2\theta.f\theta.F\theta = \pm\sqrt{r},$$

où r sera une fonction rationnelle de $\varphi_1\theta$. Connaissant $\sqrt{r}$, on pourra trouver $\sqrt{q'}$ comme il suit.

Les équations (13), (14) donneront

$$\frac{\psi\theta - '\psi\theta}{\chi\theta - '\chi\theta} = \frac{\psi_2\theta}{\chi_2\theta} = \pi\theta;$$

où $\pi\theta$ est une fonction rationnelle de $\varphi\theta$, qui reste la même en changeant θ en $\theta+\alpha$; donc on pourra exprimer $\pi\theta$ rationnellement en $\varphi_1\theta$. On aura donc

$$\psi\theta - '\psi\theta = q(\chi\theta - '\chi\theta),$$

où q est une fonction rationnelle de $\varphi_1\theta$. Donc en vertu de l'équation (14)

$$\tfrac{1}{2}(\psi\theta - '\psi\theta) = \pm q\sqrt{r},$$

et par suite

$$\psi\theta = p \pm q\sqrt{r}.$$

La fonction r, qui aura la même valeur quelle que soit la forme de la fonction $\psi\theta$, peut être trouvée de la manière suivante:

D'abord je dis que r doit être une fonction entière de $\varphi_1\theta$. En effet, si l'on avait $r = \frac{r''}{r'}$, où r'' et r' sont des fonctions entières de $\varphi_1\theta$, r' aurait

un facteur $\varphi_1\theta - \varphi_1\delta$, où $\varphi_1\delta$ n'est pas infini. Or si r' est divisible par $\varphi_1\theta - \varphi_1\delta$, la fonction r sera infinie pour $\theta = \delta$; c'est-à-dire on aura en vertu de l'équation (14)

$$\chi\delta - '\chi\delta = \tfrac{1}{0};$$

mais l'expression de $\chi\theta$ nous montre que cette équation ne saura avoir lieu, à moins qu'une quantité de la forme $\varphi(\delta \pm \nu\alpha)$ ne soit infinie. Or, en vertu de l'équation (3), cela donnerait $\varphi_1\delta = \frac{1}{0}$, ce qui est impossible. Donc nous concluons que r doit être une fonction entière de $\varphi_1\theta$.

Cela posé, soit $\varphi\theta = x$, et concevons qu'on développe les fonctions $\varphi_1\theta$ et $\chi\theta$, $'\chi\theta$ suivant les puissances descendantes de x, il est clair par les expressions de ces fonctions qu'on aura

$$\varphi_1\theta = ax + \varepsilon, \quad \chi\theta - '\chi\theta = Ax^2 + \varepsilon',$$

où a et A sont constans, et où ε et ε' ne contiendront que des puissances respectivement inférieures à x et x^2. En supposant donc que r soit du degré ν par rapport à $\varphi_1\theta$, on aura en vertu de l'equation (14)

$$r = \tfrac{1}{4}(\chi\theta - '\chi\theta)^2,$$

$$a'.x^\nu + \cdots = \tfrac{1}{4}A^2.x^4 + \cdots;$$

donc $\nu = 4$, et par conséquent r sera du quatrième degré. Maintenant l'équation (14) fait voir que la fonction r s'évanouira en attribuant à θ une quelconque des quatres valeurs: $\frac{\omega}{2}$, $-\frac{\omega}{2}$, $\frac{\varpi}{2}i$, $-\frac{\varpi}{2}i$. En effet on a $f\left(\pm\frac{\omega}{2}\right) = 0$, et $F\left(\pm\frac{\varpi}{2}i\right) = 0$. En remarquant donc que $\varphi_1\left(-\frac{\omega}{2}\right) = -\varphi_1\left(\frac{\omega}{2}\right)$, $\varphi_1\left(-\frac{\varpi}{2}i\right) = -\varphi_1\left(\frac{\varpi}{2}i\right)$, on voit que r sera divisible par la fonction

$$\left[1 - \left(\frac{\varphi_1\theta}{\varphi_1\frac{\omega}{2}}\right)^2\right]\left[1 - \left(\frac{\varphi_1\theta}{\varphi_1\frac{\varpi}{2}i}\right)^2\right],$$

car $\varphi_1\frac{\varpi}{2}i$ est différent de $\varphi_1\frac{\omega}{2}$.

Puisque donc r est du quatrième degré, on aura

$$r = C\left[1 - \left(\frac{\varphi_1\theta}{\varphi_1\frac{\omega}{2}}\right)^2\right]\left[1 - \left(\frac{\varphi_1\theta}{\varphi_1\frac{\varpi}{2}i}\right)^2\right],$$

où C est une constante. Ainsi notre théorème est démontré.

Dans le cas où $\psi\theta$ est une fonction entière des quantités $\varphi\theta$, $\varphi(\theta+\alpha)$, $\varphi(\theta+2\alpha)$, ... $\varphi(\theta+2n\alpha)$, p et q seront de même des fonctions entières de $\varphi_1\theta$. En effet c'est ce qu'on pourra démontrer entièrement de la manière que pour la fonction r. De même, si l'on désigne par ν l'exposant qui affecte la puissance la plus élevée des quantités $\varphi\theta$, $\varphi(\theta+\alpha)$, ... dans la fonction $\psi\theta$, on verra, en développant suivant les puissances descendantes de $\varphi\theta$, que les fonctions p et q seront respectivement tout au plus du degré ν et $\nu-2$ par rapport à $\varphi_1\theta$. On aura donc ce théorème:

Une fonction quelconque entière P des quantités

$$\varphi\theta,\ \varphi(\theta+\alpha),\ \dots\ \varphi(\theta+2n\alpha),$$

qui ne change pas de valeur en mettant $\theta+\alpha$ au lieu de θ, pourra être exprimée par

$$P=p\pm q\sqrt{\left[1-\left(\frac{\varphi_1\theta}{\varphi_1\frac{\omega}{2}}\right)^2\right]\left[1-\left(\frac{\varphi_1\theta}{\varphi_1\frac{\varpi}{2}i}\right)^2\right]},$$

où p et q sont des fonctions entières de $\varphi_1\theta$, la première du degré ν et la seconde du degré $\nu-2$, en supposant que P soit du degré ν par rapport à une des quantités

$$\varphi\theta,\ \varphi(\theta+\alpha),\ \dots\ \varphi(\theta+2n\alpha).$$

Si l'on suppose $\nu=1$, q sera égal à zéro. Dans ce cas P sera donc une fonction entière de la forme

$$P=A+B.\varphi_1\theta,$$

où A et B sont des constantes. On aura la valeur de A en faisant $\theta=0$, et celle de B en faisant $\varphi\theta=\frac{1}{0}$ après avoir divisé par $\varphi\theta$.

Soit par exemple

$$P=\pi(\theta)+\pi(\theta+\alpha)+\pi(\theta+2\alpha)+\cdots+\pi(\theta+2n\alpha),$$

où

$$\pi\theta=\varphi\theta.\varphi(\theta+\nu_1\alpha).\varphi(\theta+\nu_2\alpha)\dots\varphi(\theta+\nu_\omega\alpha),$$

où ν_1, ν_2, ... ν_ω sont des nombres entiers inégaux et moindres que $2n+1$. En faisant $\theta=0$, on aura

$$A=\pi(\alpha)+\pi(2\alpha)+\cdots+\pi(2n\alpha).$$

On trouvera la valeur de B en différentiant et faisant ensuite $\theta=0$, savoir

$$B=\frac{dP}{d\theta}\ \text{pour}\ \theta=0.$$

Il est à remarquer que l'une des quantités A et B est toujours égale à zéro, savoir on aura $B=0$, si ω est un nombre impair, et $A=0$, si ω est un nombre pair. Ainsi par exemple si $\omega=0$,

$$\varphi\theta+\varphi(\theta+\alpha)+\varphi(\theta+2\alpha)+\cdots+\varphi(\theta+2n\alpha)=B.\varphi_1\theta,$$

et si $\omega=1$, $\nu_1=1$,

$$\varphi\theta.\varphi(\theta+\alpha)+\varphi(\theta+\alpha).\varphi(\theta+2\alpha)+\cdots+\varphi(\theta+2n\alpha)\varphi\theta$$
$$=\varphi\alpha.\varphi 2\alpha+\varphi 2\alpha.\varphi 3\alpha+\cdots+\varphi(2n-1)\alpha.\varphi 2n\alpha.$$

II.

On pourra encore trouver d'autres relations entre les quantités de la forme $\varphi\left(\frac{m\omega+m'\varpi i}{2n+1}\right)$ à l'aide de la formule

$$\psi\theta.\psi_1\theta=A(y^2-f^2).$$

En effet, en y mettant pour y et f leurs valeurs $\varphi_1(a\theta)$ et $\varphi_1\left(\frac{m\varpi_1 i}{2n+1}\right)=\varphi_1\left(\frac{m\varpi i}{2n+1}a\right)$, il viendra:

$$\psi\theta.\psi_1\theta=A\left\{\varphi_1^2(a\theta)-\varphi_1^2\left(a\frac{m\varpi i}{2n+1}\right)\right\},$$

d'où l'on tire, en faisant $\theta=\frac{m\varpi i}{2n+1}$,

$$\psi\frac{m\varpi i}{2n+1}.\psi_1\frac{m\varpi i}{2n+1}=0,$$

c'est-à-dire:

$$0=\varphi\left(\frac{m\varpi i}{2n+1}\right)+\delta^{\mu}\varphi\left(\frac{m\varpi i}{2n+1}+\alpha\right)+\delta^{2\mu}\varphi\left(\frac{m\varpi i}{2n+1}+2\alpha\right)+\cdots+\delta^{2n\mu}\varphi\left(\frac{m\varpi i}{2n+1}+2n\alpha\right),$$

en déterminant convenablement le nombre entier m.

En faisant pour abréger $\frac{m\varpi i}{2n+1}=\theta i$, on pourra écrire la formule précédente comme il suit:

$$0=\varphi(\theta i)+\delta^{n\mu}\varphi\left(\frac{\alpha}{2}-\theta i\right)-\delta^{-n\mu}\varphi\left(\frac{\alpha}{2}+\theta i\right)-\delta^{2n\mu}\varphi(\alpha-\theta i)+\delta^{-2n\mu}\varphi(\alpha+\theta i)+\cdots$$

. . . .

Si l'on fait $n\mu = t(2n+1)+\nu$, on a

$$\delta^{n\mu} = \delta^{\nu}; \quad \varphi\left(k\frac{\alpha}{2} \pm \frac{2n^2\mu}{2n+1}\varpi i\right) = \varphi\left(k\frac{\alpha}{2} \pm 2nt\,\varpi i \pm \frac{2n\nu}{2n+1}\varpi i\right),$$

$$= \varphi\left(k\frac{\alpha}{2} \pm \frac{2n\nu}{2n+1}\varpi i\right) = \varphi\left(k\frac{\alpha}{2} \pm \nu\varpi i \mp \frac{\nu\varpi i}{2n+1}\right) = (-1)^{\nu}\varphi\left(k\frac{\alpha}{2} \mp \frac{\nu\varpi i}{2n+1}\right);$$

donc en substituant,

$$0 = \varphi\left(\frac{\nu\varpi i}{2n+1}\right) + \delta^{\nu}\varphi\left(\frac{\omega+\nu\varpi i}{2n+1}\right) - \delta^{-\nu}\varphi\left(\frac{\omega-\nu\varpi i}{2n+1}\right) - \delta^{2\nu}\varphi\left(\frac{2\omega+\nu\varpi i}{2n+1}\right) + \delta^{-2\nu}\varphi\left(\frac{2\omega-\nu\varpi i}{2n+1}\right)$$
$$+ \cdots + (-1)^{n+1}\left\{\delta^{n\nu}\varphi\left(\frac{n\omega+\nu\varpi i}{2n+1}\right) - \delta^{-n\nu}\varphi\left(\frac{n\omega-\nu\varpi i}{2n+1}\right)\right\},$$

où ν peut être un nombre entier quelconque.

En changeant c en e, et e en c, on en déduira cette autre formule:

$$0 = \varphi\left(\frac{\nu\omega}{2n+1}\right) + \delta^{\nu}\varphi\left(\frac{\nu\omega-\varpi i}{2n+1}\right) + \delta^{-\nu}\varphi\left(\frac{\nu\omega+\varpi i}{2n+1}\right) - \delta^{2\nu}\varphi\left(\frac{\nu\omega-2\varpi i}{2n+1}\right) - \delta^{-2\nu}\varphi\left(\frac{\nu\omega+2\varpi i}{2n+1}\right)$$
$$+ \cdots + (-1)^{\nu+1}\left\{\delta^{n\nu}\varphi\left(\frac{\nu\omega-n\varpi i}{2n+1}\right) + \delta^{-n\nu}\varphi\left(\frac{\nu\omega+n\varpi i}{2n+1}\right)\right\}.$$

Si l'on fait par exemple $n = 1 = \nu$, on aura

. . . .

III.

Nous avons parlé ci-dessus d'une manière particulière de déterminer les fonctions entières p et q dans la formule . Nous allons l'exposer dans ce qui va suivre.

Si l'on fait, pour abréger, $f(2n+1)\theta \,.\, F(2n+1)\theta = r$, on aura

$$(\psi\theta)^{2n+1} = p + qr,$$

et de là, en mettant $\omega - \theta$ au lieu de θ,

$$[\psi(\omega-\theta)]^{2n+1} = p - qr,$$

par conséquent en multipliant,

$$[\psi\theta \,.\, \psi(\omega-\theta)]^{2n+1} = p^2 - q^2 \,.\, r^2.$$

Maintenant on a $\psi(\theta+\alpha)=\delta^{-k}.\psi\theta$, donc en mettant $\omega-\alpha-\theta$ au lieu de θ, $\psi(\omega-\theta)=\delta^{-k}.\psi\big(\omega-(\theta+\alpha)\big)$, d'où $\psi\big(\omega-(\theta+\alpha)\big)=\delta^{k}\psi(\omega-\theta)$, et par suite

$$\psi(\theta+\alpha).\psi\big(\omega-(\theta+\alpha)\big)=\psi\theta.\psi(\omega-\theta).$$

De la même manière on a

$$\psi(\theta+\beta).\psi\big(\omega-(\theta+\beta)\big)=\psi\theta.\psi(\omega-\theta).$$

La fonction $\psi\theta.\psi(\omega-\theta)$, qui est, comme il est aisé de voir, une fonction entière des racines de l'équation , a donc la propriété de ne pas changer de valeur par le changement de θ en $\theta+\alpha$ ou en $\theta+\beta$. Par conséquent on aura, en vertu du théorème 1er,

$$\psi\theta.\psi(\omega-\theta)=v+v'.f(2n+1)\theta.F(2n+1)\theta,$$

où v et v' sont des fonctions entières de $\varphi(2n+1)\theta$, la première du degré 2, et la seconde du degré zéro. v' est donc constante, et v de la forme $A+B\varphi(2n+1)\theta+C[\varphi(2n+1)\theta]^2$. En changeant θ en $\omega-\theta$, on a

$$\psi(\omega-\theta).\psi\theta=v-v'.f(2n+1)\theta.F(2n+1)\theta,$$

donc $v'=0$. On a encore $\psi(\omega+\theta)=-\psi\theta$, et $\psi(-\theta)=-\psi(\omega-\theta)$, donc v doit rester le même en changeant θ en $-\theta$. Par conséquent on aura $B=0$, et

$$\psi\theta.\psi(\omega-\theta)=C\{[\varphi(2n+1)\theta]^2-f^2\},$$

C et f étant deux constantes.

Cela posé, l'équation donne celle-ci:

$$p^2-q^2r=C^{2n+1}\{[\varphi(2n+1)\theta]^2-f^2\}^{2n+1}.$$

Les fonctions entières p et q doivent donc être telles, qu'elles satisfassent à cette équation pour une valeur quelconque de $\varphi(2n+1)\theta$. Or cette condition suffira pour les déterminer, si l'on connaît seulement la valeur de C. Celle-ci se trouve en faisant, dans l'équation , $\varphi\theta=\frac{1}{0}$ après avoir divisé les deux membres par $(\varphi\theta)^2$. On obtiendra alors, en remarquant que

$$\frac{\psi\theta}{\varphi\theta}=1=\frac{\psi(\omega-\theta)}{\varphi\theta}, \quad \text{et} \quad \frac{\varphi(2n+1)\theta}{\varphi\theta}=\frac{1}{2n+1},$$

$$C=(2n+1)^2.$$

Connaissant C, on aura f en faisant $\theta=0$, savoir

$$\psi 0.\psi\omega=-Cf^2=-(2n+1)^2f^2.$$

Maintenant il est clair par la formule que

$$\psi 0 = -\psi\omega = \sum_0^{2n}{}_m \sum_0^{2n}{}_\mu \varphi(m\alpha + \mu\beta) . \delta^{mk+\mu k'},$$

donc, en substituant et extrayant la racine carrée,

$$f = \frac{1}{2n+1} \cdot \sum_0^{2n}{}_m \sum_0^{2n}{}_\mu \varphi(m\alpha + \mu\beta) . \delta^{mk+\mu k'}.$$

Cela posé, reprenons l'équation ; en y faisant $\varphi(2n+1)\theta = y$, on aura

$$p = a_0 y + a_1 y^3 + a_2 y^5 + \cdots + a_n y^{2n+1},$$
$$q = b_0 \quad + b_1 y^2 + b_2 y^4 + \cdots + b_{n-1} y^{2n-2},$$
$$r = (1 - c^2 y^2)(1 + e^2 y^2),$$

donc

$$(a_0 y + a_1 y^3 + \cdots + a_n y^{2n+1})^2 - (b_0 + b_1 y^2 + \cdots + b_{n-1} y^{2n-2})^2 (1 - c^2 y^2)(1 + e^2 y^2)$$
$$= (2n+1)^2 (y^2 - f^2)^{2n+1}.$$

XX.

EXTRAITS DE QUELQUES LETTRES A HOLMBOE.

Copenhague, l'an $\sqrt[3]{6064321219}$ *)
(en comptant la fraction décimale.)

Le petit mémoire qui, comme tu te le rappelles, traite des fonctions inverses de transcendantes elliptiques, et dans lequel j'avais prouvé une chose impossible, j'ai prié M. *Degen* de le parcourir; mais il ne pouvait trouver de vice de conclusion ni comprendre où était la faute. Du diable si je sais comment m'en tirer.

J'ai cherché à démontrer l'impossibilité de l'équation

$$a^n = b^n + c^n$$

en nombres entiers, lorsque n est plus grand que 2, mais je ne suis parvenu qu'aux théorèmes suivans qui sont assez curieux.

Théorème I.

L'équation $a^n = b^n + c^n$, où n est un nombre premier, est impossible, lorsqu'une ou plusieurs des quantités a, b, c, $a+b$, $a+c$, $b-c$, $\sqrt[m]{a}$, $\sqrt[n]{b}$, $\sqrt[m]{c}$ sont des nombres premiers.

---

*) Le 3 août 1823.

Théorème II.

Si l'on a

$$a^n = b^n + c^n,$$

chacune des quantités a, b, c sera toujours résoluble en deux facteurs, premiers entre eux, de telle sorte qu'en posant $a = \alpha . a'$, $b = \beta . b'$, $c = \gamma . c'$, l'un des 5 cas suivans aura lieu:

1. $a = \frac{a'^n + b'^n + c'^n}{2}$, $b = \frac{a'^n + b'^n - c'^n}{2}$, $c = \frac{a'^n + c'^n - b'^n}{2}$.

2. $a = \frac{n^{n-1} a'^n + b'^n + c'^n}{2}$, $b = \frac{n^{n-1} a'^n + b'^n - c'^n}{2}$, $c = \frac{n^{n-1} a'^n + c'^n - b'^n}{2}$.

3. $a = \frac{a'^n + n^{n-1} b'^n + c'^n}{2}$, $b = \frac{a'^n + n^{n-1} b'^n - c'^n}{2}$, $c = \frac{a'^n + c'^n - n^{n-1} b'^n}{2}$.

4. $a = \frac{n^{n-1}(a'^n + b'^n) + c'^n}{2}$, $b = \frac{n^{n-1}(a'^n + b'^n) - c'^n}{2}$, $c = \frac{n^{n-1}(a'^n - b'^n) + c'^n}{2}$.

5. $a = \frac{a'^n + n^{n-1}(b'^n + c'^n)}{2}$, $b = \frac{a'^n + n^{n-1}(b'^n - c'^n)}{2}$, $c = \frac{a'^n - n^{n-1}(b'^n - c'^n)}{2}$.

Théorème III.

Pour que l'équation $a^n = b^n + c^n$ soit possible, il faut que a ait une des trois formes suivantes:

1. $a = \frac{x^n + y^n + z^n}{2}$,

2. $a = \frac{x^n + y^n + n^{n-1} z^n}{2}$,

3. $a = \frac{x^n + n^{n-1}(y^n + z^n)}{2}$,

x, y et z n'ayant pas de facteurs communs.

Théorème IV.

La quantité a ne peut être moindre que $\frac{9^n + 5^n + 4^n}{2}$, et la plus petite des quantités a, b, c ne peut être moindre que $\frac{9^n - 5^n + 4^n}{2}$.

Le 16 janvier 1826.

Depuis mon arrivée à Berlin je me suis aussi occupé de la solution du problème général suivant: *Trouver toutes les équations qui sont résolubles algébriquement.* Je ne l'ai pas encore achevée, mais autant que j'en puis juger, j'y réussirai. Tant que le degré de l'équation est un nombre premier, la difficulté n'est pas si grande, mais lorsque ce nombre est composé, le diable s'en mêle. J'ai fait application aux équations du cinquième degré, et je suis heureusement parvenu à résoudre le problème dans ce cas. J'ai trouvé un grand nombre d'équations résolubles, outre celles qui sont connues jusqu'à présent. Lorsque j'aurai terminé le mémoire ainsi que je l'espère, je me flatte qu'il sera bon. Il sera général, et on y trouvera de la méthode, ce qui me semble le plus essentiel.

Un autre problème qui m'occupe beaucoup, c'est la sommation de la série

$$\cos mx + m\cos(m-2)x + \frac{m(m-1)}{2}\cos(m-4)x + \cdots$$

Lorsque m est un nombre entier positif, la somme de cette série est, comme tu sais, $(2\cos x)^m$, mais lorsque m n'est pas un nombre entier, cela n'a plus lieu, à moins que x ne soit moindre que $\frac{\pi}{2}$. Il n'y a pas de problème qui ait plus occupé les mathématiciens, dans les derniers temps, que celui-là. *Poisson*, *Poinsot*, *Plana*, *Crelle* et une foule d'autres ont cherché à le résoudre, et *Poinsot* est le premier qui ait trouvé une somme juste, mais son raisonnement est tout faux, et personne n'en est encore venu à bout. J'ai été assez heureux pour la démontrer rigoureusement.

J'ai trouvé

$$\cos mx + m\cos(m-2)x + \cdots = (2+2\cos 2x)^{\frac{m}{2}}\cos mk\pi$$

$$\sin mx + m\sin(m-2)x + \cdots = (2+2\cos 2x)^{\frac{m}{2}}\sin mk\pi.$$

m est une quantité comprise entre les limites -1 et $+\infty$, k est un entier, et x une quantité comprise entre les limites $(k-\frac{1}{2})\pi$ et $(k+\frac{1}{2})\pi$. Lorsque m est compris entre -1 et $-\infty$, les deux séries sont divergentes, et par conséquent elles n'ont pas de somme. Les séries divergentes sont en général quelque chose de bien fatal, et c'est une honte qu'on ose y fonder aucune

démonstration. On peut démontrer tout ce qu'on veut en les employant, et ce sont elles qui ont fait tant de malheurs et qui ont enfanté tant de paradoxes. Peut-on imaginer rien de plus horrible que de débiter

$$0 = 1 - 2^n + 3^n - 4^n + \text{etc.},$$

n étant un nombre entier positif? Enfin mes yeux se sont dessillés d'une manière frappante, car à l'exception des cas les plus simples, par exemple les séries géométriques, il ne se trouve dans les mathématiques presque aucune série infinie dont la somme soit déterminée d'une manière rigoureuse, c'est-à-dire que la partie la plus essentielle des mathématiques est sans fondement. Pour la plus grande partie les résultats sont justes, il est vrai, mais c'est là une chose bien étrange. Je m'occupe à en chercher la raison, problème très intéressant. Je crois que tu ne pourras me proposer qu'un très petit nombre de théorèmes contenant des séries infinies, à la démonstration desquels je ne puisse faire des objections bien fondées. Fais cela, et je te répondrai. La formule binôme elle-même n'est pas encore rigoureusement démontrée. J'ai trouvé qu'on a

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2}x^2 + \cdots$$

pour toutes les valeurs de m, lorsque x est moindre que l'unité. Lorsque x est égal à $+1$, la même formule a lieu, mais seulement si m est plus grand que -1, et lorsque x est égal à -1, la formule n'a lieu que pour des valeurs positives de m. Pour toutes les autres valeurs de x et de m, la série $1 + mx + \text{etc.}$ est divergente. Le théorème de *Taylor*, base de tout le calcul infinitésimal, n'est pas mieux fondé. Je n'en ai trouvé qu'une seule démonstration rigoureuse, et celle-ci est de M. *Cauchy* dans son *Résumé des leçons sur le calcul infinitésimal*, où il a démontré qu'on aura

$$\varphi(x+\alpha) = \varphi x + \alpha\varphi' x + \frac{\alpha^2}{2}\varphi'' x + \cdots$$

tant que la série est convergente; mais on l'emploie sans façon dans tous les cas. Pour montrer par un exemple général (*sit venia verbo*) comme on raisonne mal, et combien il faut être sur ses gardes, je choisirai le suivant. Soit

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \text{etc.}$$

une série infinie quelconque, tu sais qu'une manière très ordinaire pour en trouver la somme c'est de chercher la somme de celle-ci:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

et faire ensuite $x = 1$ dans le résultat. Cela est bien juste, mais il me semble qu'on ne doit pas l'admettre sans démonstration; car quoiqu'on ait démontré que

$$\varphi x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

pour toutes les valeurs de x qui sont inférieures à l'unité, il ne s'ensuit pas que la même chose ait lieu pour x égal à 1. Il serait bien possible que la série $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$ s'approchât d'une quantité toute différente de $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots$, lorsque x s'approche indéfiniment de l'unité. C'est ce qui est clair dans le cas général où la série est divergente; car alors elle n'a pas de somme. J'ai démontré que ce procédé est juste lorsque la série est convergente. L'exemple suivant montre comme on peut se tromper. On peut démontrer rigoureusement qu'on aura pour toutes les valeurs de x inférieures à π

$$\frac{x}{2} = \sin x - \tfrac{1}{2}\sin 2x + \tfrac{1}{3}\sin 3x - \text{etc.}$$

Il semble qu'on en pourrait conclure que la même formule aurait lieu pour $x = \pi$; mais cela donnerait

$$\frac{\pi}{2} = \sin \pi - \tfrac{1}{2}\sin 2\pi + \tfrac{1}{3}\sin 3\pi - \text{etc.} = 0,$$

résultat absurde. On peut trouver une infinité d'exemples pareils.

La théorie des séries infinies en général est jusqu'à présent très mal fondée. On applique aux séries infinies toutes les opérations, comme si elles étaient finies; mais cela est-il bien permis? je crois que non. Où est-il démontré qu'on obtient la différentielle d'une série infinie en prenant la différentielle de chaque terme? Rien n'est plus facile que de donner des exemples où cela n'est pas juste; par exemple

$$\frac{x}{2} = \sin x - \tfrac{1}{2}\sin 2x + \tfrac{1}{3}\sin 3x - \text{etc.}$$

En différentiant on obtient

$$\tfrac{1}{2} = \cos x - \cos 2x + \cos 3x - \text{etc.},$$

résultat tout faux, car cette série est divergente.

La même chose a lieu par rapport à la multiplication et à la division des séries infinies. J'ai commencé à examiner les règles les plus importantes qui (à présent) sont ordinairement approuvées à cet égard, et à montrer en quels cas elles sont justes ou non. Cela va assez bien et m'intéresse infiniment.

Paris, le 24 octobre 1826.

Comme il me tarde d'avoir de tes nouvelles! tu ne saurais t'en faire idée. Ainsi donc ne va pas me tromper dans mon attente, fais-moi parvenir quelques lignes consolatrices dans l'isolement où je me trouve; car, à te dire vrai, cette capitale la plus bruyante du continent me fait pour le moment l'effet d'un désert. Je ne connais presque personne; c'est que pendant la belle saison tout le monde est à la campagne; ainsi ce monde n'est pas visible. Jusqu'à présent je n'ai fait connaissance qu'avec MM. *Legendre*, *Cauchy* et *Hachette*, et quelques mathématiciens moins célèbres quoique fort habiles: M. *Saigey*, rédacteur du Bulletin des Sciences, et M. *Lejeune-Dirichlet*, Prussien qui vint me voir l'autre jour me croyant son compatriote. C'est un mathématicien d'une grande pénétration. Il a prouvé avec M. *Legendre* l'impossibilité de résoudre en nombres entiers l'équation $x^5 + y^5 = z^5$, et d'autres fort belles choses. *Legendre* est d'une complaisance extrême, mais malheureusement fort vieux. *Cauchy* est fou, et avec lui il n'y a pas moyen de s'entendre, bien que pour le moment il soit celui qui sait comment les mathématiques doivent être traitées. Ce qu'il fait est excellent, mais très brouillé. D'abord je n'y compris presque rien; maintenant j'y vois plus clair. Il fait publier une série de mémoires sous titre d'*Exercices de mathématiques*. Je les achète et les lis assidûment. Il en a paru 9 livraisons depuis le commencement de cette année. *Cauchy* est à présent le seul qui s'occupe des mathématiques pures. *Poisson*, *Fourier*, *Ampère* etc. s'occupent exclusivement du magnétisme et d'autres sujets physiques. M. *Laplace* n'écrit plus rien, je pense. Son dernier ouvrage fut un supplément à sa *Théorie des probabilités*. Je l'ai souvent vu à l'Institut. C'est un petit homme très gaillard. *Poisson* est un petit monsieur; il sait se comporter avec beaucoup de dignité; M. *Fourier* de même. *Lacroix* est bien vieux. M. *Hachette* va me présenter à plusieurs de ces messieurs.

Les Français sont beaucoup plus réservés avec les étrangers que les Allemands. Il est fort difficile de gagner leur intimité, et je n'ose pousser mes prétensions jusque-là; enfin tout commençant a bien de la peine à se

faire remarquer ici. Je viens de finir un grand traité sur une certaine classe de fonctions transcendantes pour le présenter à l'Institut, ce qui aura lieu lundi prochain. Je l'ai montré à M. *Cauchy*, mais il daigna à peine y jeter les yeux. Et j'ose dire, sans me vanter, que c'est un bon travail. Je suis curieux d'entendre l'opinion de l'Institut là-dessus. Je ne manquerai pas de t'en faire part. J'ai écrit plusieurs autres mémoires surtout pour le journal de M. *Crelle*, dont 3 livraisons ont paru; de même pour les Annales de M. *Gergonne*. Un extrait de mon mémoire sur l'impossibilité de résoudre les équations algébriques a été inséré dans le bulletin de M. *Férussac*. Je l'ai fait moi-même. J'ai fait et je ferai d'autres articles pour ce bulletin. C'est un travail bien ennuyeux quand on n'a pas écrit le traité soi-même, mais enfin, c'est pour M. *Crelle*, l'homme le plus honnête du monde. J'entretiens avec lui une correspondance soutenue. Je travaille en ce moment à la théorie des équations, mon thème favori, et me voilà enfin parvenu à trouver le moyen de résoudre le problème général que voici: *Déterminer la forme de toutes les équations algébriques qui peuvent être résolues algébriquement.* J'en ai trouvé un nombre infini du 5me, 6me et 7me degré qu'on n'a pas flairé jusqu'à présent. J'ai en même temps la solution la plus directe des équations des 4 premiers degrés, avec la raison évidente pourquoi celles-ci sont les seules résolubles et non pas les autres. Quant aux équations du 5me degré j'ai trouvé que quand une telle équation est résoluble algébriquement, il faut que la racine ait la forme suivante:

$$x = A + \sqrt[5]{R} + \sqrt[5]{R'} + \sqrt[5]{R''} + \sqrt[5]{R'''},$$

où R, R', R'', R''' sont les 4 racines d'une équation du 4me degré qui sont exprimables par des racines carrées seules. Pour les expressions et les signes, ce problème m'a fait bien des difficultés. En outre je m'occupe des quantités imaginaires, où il reste encore beaucoup à faire; puis du calcul intégral, et surtout de la théorie des séries infinies, si mal basée jusqu'ici. Cependant je ne puis m'attendre à en voir un résultat satisfaisant avant d'être installé chez moi, si cela se réalise jamais. Je regrette d'avoir fixé deux ans pour mes voyages, un an et demi aurait suffi. J'ai le mal du pays, et dès à présent mon séjour à l'étranger, ici ou ailleurs, ne m'offre plus tant d'avantages qu'on croirait. Je suis maintenant au fait de tout ce que les mathématiques pures offrent de plus ou moins essentiel, et il me tarde seulement de pouvoir consacrer mon temps exclusivement à rédiger ce que j'ai recueilli. Il me reste tant de choses à faire, mais tant que je serai en pays étranger,

tout cela va assez mal. Si j'avais mon professorat comme M. *Keilhau* a le sien! Ma position n'est pas assurée, il est vrai, mais je n'en suis pas en peine; si la fortune m'abandonne d'une part elle me sourira peut-être de l'autre.

[Paris, décembre 1826.]*)

Tu m'apprends que tu as lu les deux premiers fascicules du journal de M. *Crelle*. Les mémoires que j'y ai fait insérer, à l'exception de celui des équations, ne valent pas grand'chose, mais cela viendra, tu verras. J'espère que tu seras satisfait d'un long mémoire sur une intégrale qui se trouve au 3me fascicule; mais celui qui me fait le plus de plaisir c'est un mémoire, actuellement sous presse pour le 4me fascicule, sur la simple série $1 + mx + \frac{m(m-1)}{2} x^2 + \cdots$ J'ose dire que c'est la première démonstration rigoureuse de la formule binôme dans tous les cas possibles, ainsi que d'un grand nombre d'autres formules, en partie connues, il est vrai, mais bien faiblement démontrées. Dans le fascicule prochain (janvier) des Annales de M. *Gergonne* il paraîtra un petit mémoire de moi sur l'élimination. C'était pour voir s'il le publierait. Un de ces jours je lui en enverrai un meilleur sur le développement de fonctions continues ou discontinues, selon des cosinus ou sinus d'arcs multiples. J'y démontre une formule connue, mais jusq'ici prouvée assez nonchalamment. De même j'enverrai à M. *Gergonne* un grand mémoire sur les fonctions elliptiques où il y a bien des choses curieuses, qui ne manqueront pas, je m'en flatte, de frapper quelques lecteurs par-ci par-là. Entre autres choses il traite de la division de l'arc de la lemniscate. Tu verras comme c'est gentil. J'ai trouvé qu'avec le compas et la règle on peut diviser la lemniscate en $2^n + 1$ parties égales, lorsque ce nombre est premier. La division dépend d'une équation du degré $(2^n + 1)^2 - 1$; mais j'en ai trouvé la solution complète à l'aide des racines carrées. Cela m'a fait pénétrer en même temps le mystère qui a régné sur la théorie de M. *Gauss* sur la division de la circonférence du cercle. Je vois clair comme le jour comment il y est parvenu. Ce que je viens de dire de la lemniscate est un des

*) Cette lettre est sans date.

fruits de mes recherches sur la théorie des équations. Tu ne saurais t'imaginer combien j'y ai trouvé de théorèmes délicieux, par exemple celui-ci: Si une équation $P=0$, dont le degré est $\mu\nu$, μ et ν étant des nombres premiers entre eux, est résoluble d'une manière quelconque par des radicaux, ou P sera décomposable en μ facteurs du degré ν, dont les coefficiens dépendent d'une seule équation du degré μ, ou bien en ν facteurs du degré μ, dont les coefficiens dépendent d'une seule équation du degré ν.

Berlin, le 4 mars 1827.

Il y a un mois environ que je t'ai fait parvenir par M. *P.* le 3me fascicule du journal de M. *Crelle* et un peu plus de la moitié du 4me, maintenant fini. Que penses-tu de mon mémoire qui s'y trouve inséré? J'y ai tâché d'être tellement rigoureux qu'il sera impossible d'y faire aucune objection fondée. J'ai déjà préparé un mémoire développé, où il y a bien des choses curieuses (fonctions elliptiques). Ainsi j'ai trouvé qu'avec la règle et le compas on peut diviser la circonférence de la lemniscate dans le même nombre de parties égales que l'a montré M. *Gauss* pour le cercle, p. ex. en 17 parties. Ceci n'est qu'une conséquence très spéciale, et [il y a] une foule d'autres propositions plus générales. Ce sont mes recherches générales sur les équations qui m'y ont porté. Dans la théorie des équations je me suis proposé et j'ai résolu le problème suivant, qui en renferme tous les autres: *Trouver toutes les équations d'un degré déterminé qui sont résolubles algébriquement.* Par là je suis parvenu à une foule de théorèmes magnifiques. Mais le plus beau de tout ce que j'ai fait c'est ma *Théorie des fonctions trancendantes en général et celle des fonctions elliptiques en particulier:* mais il faut attendre mon retour pour t'en faire part. Enfin j'ai fait un grand nombre de découvertes. Encore si je les eusse arrangées et mises par écrit; car la plupart n'en sont encore qu'à l'état de projet. Il ne faut pas y penser avant que je sois bien installé chez moi. Alors je travaillerai comme un piocheur, mais avec plaisir s'entend. Il me tarde maintenant d'être chez moi, comme je ne vois pas de grand profit à prolonger mon séjour ici. Chez soi on se fait souvent des illusions sur l'étranger, on se figure tout plus grand que la réalité. En général le monde est un peu bête, mais pas trop malhonnête. Nulle part il n'est plus facile de faire son chemin qu'en France et en Allemagne. J'apprends que tu es allé à Upsal et à Stockholm; pourquoi pas plutôt à Paris? Il faut que j'y revienne une fois avant de mourir.

XXI.

EXTRAIT D'UNE LETTRE A HANSTEEN.

Dresde, le 29 mars 1826.

Je serai bien aise de revenir chez moi travailler à mon aise. J'espère que mes travaux iront bien; ce ne sont pas les matériaux qui me manqueront, j'en ai pour plusieurs années, et d'autres me viendront probablement en route, car précisément en ce moment-ci j'ai des idées plein la tête. Il faut que les mathématiques pures, au sens plus propre du mot, deviennent l'étude de ma vie. Je consacrerai toutes mes forces à répandre de la lumière sur l'immense obscurité qui règne aujourd'hui dans l'analyse. Elle est tellement dépourvue de tout plan et de tout système, qu'on s'étonne seulement qu'il y ait tant de gens qui s'y livrent — et ce qui pis est, elle manque absolument de rigueur. Dans l'Analyse Supérieure bien peu de propositions sont démontrées avec une rigueur définitive. Partout on trouve la malheureuse manière de conclure du spécial au général, et ce qu'il y a de merveilleux, c'est qu'après un tel procédé on ne trouve que rarement ce qu'on appelle des paradoxes. Il est vraiment très-intéressant de rechercher la raison de ceci. Cette raison, à mon avis il faut la voir dans ce que les fonctions dont s'est jusqu'ici occupée l'analyse, peuvent s'exprimer pour la plupart par des puissances Quand il s'y en mêle d'autres, ce qui, il est vrai, n'arrive pas souvent, on ne réussit plus guère, et pour peu qu'on tire de fausses conclusions, il en naît une infinité de propositions vicieuses qui se tiennent les unes les autres. J'ai examiné plusieurs de celles-ci et j'ai été assez heureux pour en venir à bout. Quand on procède par une méthode générale, ce n'est pas trop difficile; mais j'ai dû être très circonspect, car les propositions une fois acceptées sans preuve rigoureuse

(i. e. sans preuve aucune) ont pris tellement racine chez moi, que je risque à chaque moment de m'en servir sans examen ultérieur. Ces petits travaux paraîtront dans le journal publié par M. *Crelle*. Dans cet homme j'ai fait une connaissance précieuse, et je ne puis pas assez louer l'heureux destin qui m'a porté à Berlin. Décidément, j'ai de la chance. Il est vrai qu'il y a peu de personnes qui s'intéressent à moi, mais ces quelques personnes me sont infiniment chères, parce qu'elles m'ont témoigné tant de bonté. Puissé-je répondre en quelque manière à leur attente de moi, car il doit être dur à un bienfaiteur de voir sa peine perdue. Il faut que je vous conte une offre que m'a fait M. *Crelle* avant que je partisse de Berlin. Il voulait absolument me persuader à me fixer à Berlin pour toujours, et s'étendait sur les avantages d'un tel arrangement. Il ne tenait qu'à moi de devenir rédacteur en chef du journal, entreprise qui sera avantageuse aussi au point de vue économique. Il semblait vraiment y tenir beaucoup; naturellement j'ai refusé. Pourtant j'y ai donné une forme adoucie, en disant que j'accepterais (ce que je ferai), si je ne trouvais chez moi de quoi vivre. Il finit par dire qu'il répèterait son offre quand je voudrais l'accepter. Je ne nie pas que j'en fus très-flatté; mais vrai, c'était gentil, n'est-ce pas? Il fallut absolument lui promettre de revenir à Berlin avant que de retourner chez moi, et cela ne pourra que m'être très-avantageux. C'est qu'il s'est engagé à trouver un éditeur pour mes mémoires developpés et figurez-vous! on me payera rondement. D'abord nous sommes convenus de publier à nous deux de temps en temps un recueil de travaux développés, à commencer tout de suite. Mais reflexion faite et ayant consulté un libraire auquel nous l'offrîmes, nous trouvâmes mieux d'attendre que le journal fût en bon train. Quand je serai de retour à Berlin, j'espère que notre plan se réalisera. Tout cela n'est-il pas beau? et n'ai-je pas raison de me louer de mon séjour à Berlin? Il est vrai que je n'ai rien appris d'autres personnes pendant ce voyage, mais je n'ai point vu là le but principal de mon voyage. Faire des connaissances, c'est là ce qu'il me faut pour l'avenir. N'êtes vous pas de mon avis? A Freiberg je suis resté un mois. J'ai fait, chez M. *Keilhau*, la connaissance d'un jeune mathématicien très-zélé, frère de M. *Naumann* qui fut autrefois en Norvège. C'est un homme très-aimable; nous nous convenons parfaitement.

Dans votre lettre à M. *Boeck* vous demandez ce que je vais faire à Leipsic et sur les rives du Rhin; mais je voudrais bien savoir ce que vous allez dire quand vous saurez que je vais à Vienne et en Suisse. D'abord j'avais compté aller tout droit de Berlin à Paris, heureux de la promesse de

M. *Crelle* de m'y accompagner. Mais maintenant M. *Crelle* en est empêché, et il m'aurait fallu voyager seul. Or je suis ainsi fait que je ne puis pas supporter la solitude. Seul, je m'attriste, je me fais du mauvais sang, et j'ai peu de disposition pour le travail. Alors je me dis qu'il vaut mieux aller avec M. *Boeck* à Vienne, et ce voyage me semble justifié par le fait qu'à Vienne il y a des hommes comme *Littrow*, *Burg* et d'autres encore, tous en vérité des mathématiciens excellens; ajoutez à cela que je ne ferai que ce seul voyage dans ma vie. Peut-on trouver rien que de raisonnable à ce que je désire voir aussi un peu de la vie du midi? Pendant mon voyage je pourrai travailler assez assidûment. Une fois à Vienne et partant de là pour Paris, c'est presque tout droit par la Suisse. Pourquoi n'en verrais-je pas un peu aussi? Mon Dieu! J'ai, moi aussi, un peu de goût pour les beautés de la nature, tout comme un autre. Tout ce voyage me fera venir à Paris deux mois plus tard, voilà tout. Je rattraperai vite le temps perdu. Ne croyez-vous pas qu'un tel voyage me ferait du bien?

XXII.

EXTRAITS DE QUELQUES LETTRES A CRELLE.

1.

Freiberg, le 14 mars 1826.

Si une équation du cinquième degré dont les coefficiens sont *des nombres rationnels*, est résoluble algébriquement, on peut donner aux racines la forme suivante:

$$x = c + A \cdot a^{\frac{1}{5}} \cdot a_1^{\frac{2}{5}} \cdot a_2^{\frac{4}{5}} \cdot a_3^{\frac{3}{5}} + A_1 \cdot a_1^{\frac{1}{5}} \cdot a_2^{\frac{2}{5}} \cdot a_3^{\frac{4}{5}} \cdot a^{\frac{3}{5}}$$

$$+ A_2 \cdot a_2^{\frac{1}{5}} \cdot a_3^{\frac{2}{5}} \cdot a^{\frac{4}{5}} \cdot a_1^{\frac{3}{5}} + A_3 \cdot a_3^{\frac{1}{5}} \cdot a^{\frac{2}{5}} \cdot a_1^{\frac{4}{5}} \cdot a_2^{\frac{3}{5}},$$

où

$$a = m + n\sqrt{1+e^2} + \sqrt{h(1+e^2+\sqrt{1+e^2})},$$

$$a_1 = m - n\sqrt{1+e^2} + \sqrt{h(1+e^2-\sqrt{1+e^2})},$$

$$a_2 = m + n\sqrt{1+e^2} - \sqrt{h(1+e^2+\sqrt{1+e^2})},$$

$$a_3 = m - n\sqrt{1+e^2} - \sqrt{h(1+e^2-\sqrt{1+e^2})},$$

$$A = K + K'a + K''a_2 + K'''aa_2, \quad A_1 = K + K'a_1 + K''a_3 + K'''a_1 a_3,$$

$$A_2 = K + K'a_2 + K''a + K'''aa_2, \quad A_3 = K + K'a_3 + K''a_1 + K'''a_1 a_3.$$

Les quantités c, h, e, m, n, K, K', K'', K''' sont des nombres *rationnels*.

Mais de cette manière l'équation $x^5 + ax + b = 0$ n'est pas résoluble, tant que a et b sont des quantités quelconques. J'ai trouvé de pareils théorèmes pour les équations du $7^{\text{ème}}$, $11^{\text{ème}}$, $13^{\text{ème}}$ etc. degré.

2.

Paris, le 9 août 1826.

Une propriété générale des fonctions dont la différentielle est algébrique, consiste en ce que la somme d'un nombre *quelconque* de fonctions peut être exprimée par un nombre déterminé des mêmes fonctions. Savoir:

$$\varphi(x_1)+\varphi(x_2)+\varphi(x_3)+\cdots+\varphi(x_\mu)=v-[\varphi(z_1)+\varphi(z_2)+\varphi(z_3)+\cdots+\varphi(z_n)].$$

$x_1, x_2, \ldots x_\mu$ sont des quantités quelconques, $z_1, z_2, \ldots z_n$ des fonctions algébriques de ces quantités, et v une fonction algébrique et logarithmique des mêmes quantités. n est un nombre déterminé indépendant de μ. Si par exemple φ est une fonction elliptique, on a, comme on sait, $n=1$. Si la fonction n'est pas elliptique, on n'en connaît jusqu'à présent aucune propriété. Comme un des cas les plus remarquables je vais rapporter le suivant:

En désignant la fonction

$$\int \frac{(\alpha+\beta x)\,.\,dx}{\sqrt{a+a_1 x+a_2 x^2+a_3 x^3+a_4 x^4+a_5 x^5+x^6}}$$

par φx, on a

$$(1)\qquad \varphi(x_1)+\varphi(x_2)+\varphi(x_3)=C-[\varphi(y_1)+\varphi(y_2)],$$

x_1, x_2, x_3 étant trois quantités variables indépendantes, C une constante et y_1, y_2 les deux racines de l'équation

$$y^2-\left(\frac{c_2^2+2c_1-a_4}{2c_2-a_5}-x_1-x_2-x_3\right)y+\frac{\left(\frac{c^2-a}{x_1\,.\,x_2\,.\,x_3}\right)}{2c_2-a_5}=0.$$

Les quantités c, c_1, c_2 sont déterminées par les trois équations linéaires:

$$c+c_1x_1+c_2x_1^2+x_1^3=\sqrt{a+a_1x_1+a_2x_1^2+\cdots+x_1^6},$$

$$c+c_1x_2+c_2x_2^2+x_2^3=\sqrt{a+a_1x_2+a_2x_2^2+\cdots+x_2^6},$$

$$c+c_1x_3+c_2x_3^2+x_3^3=\sqrt{a+a_1x_3+a_2x_3^2+\cdots+x_3^6}.$$

Toute la théorie de la fonction φ est comprise dans l'équation (1), car la propriété exprimée par cette équation détermine, comme on peut le démontrer, cette fonction complètement.

3.

Paris, le 4 décembre 1826.

Quand on décrit une courbe $AMBN$, dont l'équation est

$$x = \sqrt{\cos 2\varphi},$$

où

$$x = AM, \quad \varphi = MAB,$$

alors l'arc AM est donné par l'expression suivante

$$s = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}},$$

et dépend par conséquent des fonctions elliptiques.

Or j'ai trouvé qu'on peut toujours diviser la périphérie $AMBN$ géométriquement (c'est-à-dire par la règle et le compas) en n parties égales, quand n est un nombre premier de la forme $2^m + 1$, ou quand

$$n = 2^\mu (2^m + 1)(2^{m'} + 1) \ldots (2^{m^{(k)}} + 1),$$

$2^m + 1$, $2^{m'} + 1$ etc. étant des nombres premiers.

Comme vous voyez, ce théorème est exactement le même que celui de *Gauss* pour le cercle. On peut de cette manière diviser la courbe susdite par exemple en 2, 3, 5, 17 etc. parties égales. Ma théorie des équations, combinée avec la théorie des nombres, m'a conduit à ce théorème. J'ai lieu de croire que *Gauss* y a été porté aussi.

4.

Christiania, le 15 novembre 1827.

J'ai trouvé la somme de la série suivante

$$\sin\varphi \cdot \frac{a}{1+a} + \sin 3\varphi \cdot \frac{a^3}{1+a^3} + \sin 5\varphi \cdot \frac{a^5}{1+a^5} + \cdots;$$

a et φ sont des quantités réelles quelconques. Elle peut s'exprimer par des fonctions elliptiques.

5.

Christiania, le 18 octobre 1828.

Théorèmes sur les équations.

A. Soient $x_1, x_2, \ldots x_n$ des quantités inconnues quelconques et $\varphi(x_1, x_2 \ldots x_n)$ une fonction entière de ces quantités du degré m, n étant un nombre premier quelconque; si l'on suppose entre $x_1, x_2, \ldots x_n$ les n équations suivantes:

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0,$$
$$\varphi(x_2, x_3, \ldots x_n, x_1) = 0,$$
$$\varphi(x_3, x_4, \ldots x_n, x_1, x_2) = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\varphi(x_n, x_1, x_2, \ldots x_{n-1}) = 0,$$

on en pourra généralement éliminer $n-1$ quantités, et une quelconque x sera déterminée à l'aide d'une équation du degré m^n. Il est clair que le premier membre de cette équation sera divisible par la fonction $\varphi(x, x, x, \ldots x)$ qui est du degré m. On aura donc une équation en x du degré $m^n - m$.

Cela posé, je dis que cette équation sera décomposable en $\frac{m^n - m}{n}$ équations, chacune du degré n, et dont les coefficiens sont déterminés à l'aide d'une équation du degré $\frac{m^n - m}{n}$. En supposant connues les racines de cette équation, les équations du degré n seront résolubles *algébriquement*.

Par exemple si l'on suppose $n = 2$, $m = 3$, on aura une équation en x du degré $3^2 - 3 = 6$. Cette équation du sixième degré sera résoluble algébriquement, car en vertu du théorème, on pourra la décomposer en trois équations du second degré. Pareillement si l'on cherche les valeurs inégales de x_1, x_2, x_3 propres à satisfaire aux équations

$$x_2 = \frac{a + bx_1 + cx_1^2}{\alpha + \beta x_1}, \quad x_3 = \frac{a + bx_2 + cx_2^2}{\alpha + \beta x_2}, \quad x_1 = \frac{a + bx_3 + cx_3^2}{\alpha + \beta x_3},$$

on aura pour déterminer x_1, x_2, x_3 une équation du sixième degré, mais elle sera décomposable en deux équations du troisième degré, les coefficiens de ces équations étant déterminés par une équation du second degré.

B. Si trois racines d'une équation quelconque irréductible dont le degré est un nombre premier, sont liées entre elles de sorte que l'une de ces racines puisse être exprimée rationnellement par les deux autres, l'équation en question sera toujours résoluble à l'aide de radicaux.

C. Si deux racines d'une équation irréductible dont le degré est un nombre premier, ont entre elles un rapport tel qu'on puisse exprimer une des deux racines rationnellement par l'autre, cette équation sera toujours résoluble à l'aide de radicaux.

XXIII.

LETTRE A LEGENDRE.

Monsieur. La lettre que Vous avez bien voulu m'adresser en date du 25 octobre m'a causé la plus vive joie. Je compte parmi les momens les plus heureux de ma vie celui où j'ai vu mes essais mériter l'attention de l'un des plus grands géomètres de notre siècle. Cela a porté au plus haut degré mon zèle pour mes études. Je les continuerai avec ardeur, mais si je suis assez heureux pour faire quelques découvertes, je les attribuerai à Vous plutôt qu'à moi, car certainement je n'aurais rien fait sans avoir été guidé par Vos lumières.

J'accepte avec reconnaissance l'exemplaire de Votre traité des fonctions elliptiques que Vous voulez bien m'offrir.

Je m'empresserai de Vous donner les éclaircissemens que Vous m'avez fait l'honneur de me demander. Lorsque je dis que le nombre de transformations différentes, correspondantes à un nombre premier n, est $6(n+1)$, j'entends par cela qu'on peut trouver $6(n+1)$ valeurs différentes pour le module c', en supposant l'équation différentielle

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-c'^2y^2)}}=\varepsilon\cdot\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}},$$

et en mettant pour y une fonction rationnelle de la forme:

$$y=\frac{A_0+A_1x+A_2x^2+\cdots+A_nx^n}{B_0+B_1x+B_2x^2+\cdots+B_nx^n}.$$

C'est en effet ce qui a lieu; mais parmi les valeurs de c' il y en aura $n+1$ qui répondent à la forme suivante de y:

$$y=\frac{A_1x+A_3x^3+A_5x^5+\cdots+A_nx^n}{1+B_2x^2+B_4x^4+\cdots+B_{n-1}x^{n-1}}.$$

Ce sont ces $n+1$ modules dont parle M. *Jacobi*. Ils sont en effet racines d'une même équation du degré $n+1$. Ces $n+1$ valeurs étant supposées connues, il est facile d'avoir les $5(n+1)$ autres.

En effet, en désignant par c' un quelconque des modules, on aura encore ceux-ci:

$$\frac{1}{c'},\quad \left(\frac{1-\sqrt{c'}}{1+\sqrt{c'}}\right)^2,\quad \left(\frac{1+\sqrt{c'}}{1-\sqrt{c'}}\right)^2,\quad \left(\frac{1-\sqrt{-c'}}{1+\sqrt{-c'}}\right)^2,\quad \left(\frac{1+\sqrt{-c'}}{1-\sqrt{-c'}}\right)^2,$$

auxquelles répondent les valeurs suivantes de y:

$$c'y',\quad \frac{1+\sqrt{c'}}{1-\sqrt{c'}}\cdot\frac{1\pm y'\sqrt{c'}}{1\mp y'\sqrt{c'}},\quad \frac{1-\sqrt{c'}}{1+\sqrt{c'}}\cdot\frac{1\pm y'\sqrt{c'}}{1\mp y'\sqrt{c'}},\quad \frac{1+\sqrt{-c'}}{1-\sqrt{-c'}}\cdot\frac{1\pm y'\sqrt{-c'}}{1\mp y'\sqrt{-c'}},$$

$$\frac{1-\sqrt{-c'}}{1+\sqrt{-c'}}\cdot\frac{1\pm y'\sqrt{-c'}}{1\mp y'\sqrt{-c'}},$$

ce qu'il est facile de vérifier, en faisant la substitution dans l'équation différentielle.

Toutes les $6(n+1)$ valeurs du module c' sont différentes entre elles, excepté pour quelques valeurs particulières de c. Dans ce qui précède, n est supposé impair et plus grand que l'unité. Si n est égal à deux, c' aura encore $6(n+1)=18$ valeurs différentes. De ces 18 valeurs il y aura six qui répondent à une valeur de y de la forme:

$$y=\frac{a+bx^2}{a'+b'x^2};$$

ce sont:

$$c'=\frac{1\pm c}{1\mp c},\quad \frac{1\pm\sqrt{1-c^2}}{1\mp\sqrt{1-c^2}},\quad \frac{c\pm\sqrt{c^2-1}}{c\mp\sqrt{c^2-1}}.$$

Il y en aura quatre qui répondent à une valeur de y de la forme $y=\frac{ax}{1+bx^2}$, savoir:

$$c'=\frac{2\sqrt{\pm c}}{1\pm c},\quad \frac{1\pm c}{2\sqrt{\pm c}},\quad y=(1\pm c)\frac{x}{1\pm cx^2}\ \text{etc.}$$

Enfin pour les huit autres modules, y aura la forme:

$$a \frac{A + Bx + Cx^2}{A - Bx + Cx^2}.$$

Ces huit modules seront

$$c' = \left(\frac{\sqrt{1 \pm c} \pm \sqrt{\pm 2 \sqrt{\pm c}}}{\sqrt{1 \pm c} \mp \sqrt{\pm 2 \sqrt{\pm c}}} \right)^2.$$

J'ai donné des développemens plus étendus sur cet objet dans un mémoire imprimé dans le cahier 4 du tome III du journal de M. *Crelle**). Peut-être en aurez-vous déjà connaissance.

Les fonctions elliptiques jouissent d'une certaine propriété bien remarquable et que je crois nouvelle. Si l'on fait pour abréger:

$$\Delta x = \pm \sqrt{(1 - x^2)(1 - c^2 x^2)},$$

$$\Pi x = \int \frac{dx}{\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \Delta x}, \quad \varpi x = \int \frac{dx}{\Delta x}, \quad \varpi_0 x = \int \frac{x^2\, dx}{\Delta x},$$

on aura toujours:

$$\varpi x_1 + \varpi x_2 + \cdots + \varpi x_\mu = C,$$

$$\varpi_0 x_1 + \varpi_0 x_2 + \cdots + \varpi_0 x_\mu = C + p,$$

où p est une quantité algébrique, et

$$\Pi x_1 + \Pi x_2 + \cdots + \Pi x_\mu = C - \frac{a}{2\Delta a} \log \left(\frac{fa + \varphi a . \Delta a}{fa - \varphi a . \Delta a} \right),$$

si l'on suppose les variables $x_1, x_2 \ldots x_\mu$ liées entre elles de manière à satisfaire à une équation de la forme:

$$(fx)^2 - (\varphi x)^2 (1 - x^2)(1 - c^2 x^2) = A (x^2 - x_1^2)(x^2 - x_2^2) \ldots (x^2 - x_\mu^2);$$

fx et φx étant deux fonctions entières quelconques de *l'indéterminée* x, mais dont l'une est *paire*, l'autre *impaire*. Cette propriété me paraît d'autant plus remarquable qu'elle appartiendra à toute fonction transcendante

$$\Pi x = \int \frac{dx}{\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \Delta x},$$

en supposant $(\Delta x)^2$ fonction entière quelconque de x^2. J'en ai donné la démonstration dans un petit mémoire inséré dans le cahier 4 du tome III du journal de M. *Crelle***). Vous verrez que rien n'est plus simple que d'établir

*) T. I, p. 457 de cette édition.
**) T. I, p. 444 de cette édition.

cette propriété générale. Elle m'a été fort utile dans mes recherches sur les fonctions elliptiques. En effet j'ai fondé sur elle toute la théorie de ces fonctions. Les circonstances ne me permettent point de publier un ouvrage de quelque étendue que j'ai composé depuis peu, car ici je ne trouverai personne qui le fasse imprimer à ses frais. C'est pourquoi j'en ai fait un extrait, qui paraîtra dans le journal de M. *Crelle**). La première partie, dans laquelle j'ai considéré les fonctions elliptiques en général, doit paraître dans le cahier prochain. Il me serait infiniment intéressant de savoir votre jugement sur ma méthode. Je me suis surtout attaché à donner de la généralité à mes recherches. Je ne sais si j'ai pu y réussir. La seconde partie qui suivra incessament la première, traitera principalement des fonctions avec des modules réels et moindres que l'unité. C'est surtout la fonction inverse de la première espèce qui est l'objet de mes recherches dans cette seconde partie. Cette fonction, dont j'ai démontré quelques-unes des propriétés les plus simples dans mes recherches sur les fonctions elliptiques, est d'un usage infini dans la théorie des fonctions elliptiques en général. Elle facilite à un degré inespéré la théorie de la transformation. Un premier essai sur cet objet est contenu dans le mémoire inséré dans le No. 138 du journal de M. *Schumacher***), mais actuellement je puis rendre cette théorie beaucoup plus simple.

La théorie des fonctions elliptiques m'a conduit à considérer deux nouvelles fonctions qui jouissent de plusieurs propriétés remarquables. Si l'on fait

$$y = \lambda(x),$$

où

$$x = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-c^2y^2)}},$$

$\lambda(x)$ sera la fonction inverse de la première espèce. J'ai trouvé qu'on peut développer cette fonction de la manière suivante:

$$\lambda(x) = \frac{x + A_1 x^3 + A_2 x^5 + A_3 x^7 + \cdots}{1 + B_2 x^4 + B_3 x^6 + B_4 x^8 + \cdots},$$

où le numérateur et le dénominateur sont des séries *toujours convergentes* quelles que soient les valeurs de la variable x et du module c, réelles ou imaginaires. Les coefficiens $A_1, A_2, \ldots B_2, B_3, \ldots$ sont des fonctions entières de c^2. Si l'on pose

*) T. I, p. 518 de cette édition.
**) T. I, p. 403 de cette édition.

$$\varphi x = x + A_1 x^3 + A_2 x^5 + \cdots,$$
$$f x = 1 + B_2 x^4 + B_3 x^6 + \cdots.$$

où φx et $f x$ sont les deux fonctions en question, elles auront la propriété exprimée par les deux équations:

$$\varphi(x+y)\,.\,\varphi(x-y) = (\varphi x\,.\,fy)^2 - (\varphi y\,.\,fx)^2;$$
$$f(x+y)\,.\,f(x-y) = (fx\,.\,fy)^2 - c^2(\varphi x\,.\,\varphi y)^2,$$

x et y étant des quantités quelconques. On pourra représenter ces fonctions de beaucoup de manières. Par exemple on a:

$$\varphi\left(x\frac{\varpi}{\pi}\right) = A e^{ax^2} \sin x (1 - 2\cos 2x\,.\,q^2 + q^4)(1 - 2\cos 2x\,.\,q^4 + q^8)(1 - 2\cos 2x\,.\,q^6 + q^{12})\ldots,$$

$$\varphi\left(x\frac{\omega}{\pi}\right) = A' e^{a'x^2}(e^x - e^{-x})(1 - p^2 e^{2x})(1 - p^2 e^{-2x})(1 - p^4 e^{2x})(1 - p^4 e^{-2x})\ldots,$$

$$f\left(x\frac{\varpi}{\pi}\right) = B e^{ax^2}(1 - 2\cos 2x\,.\,q + q^2)(1 - 2\cos 2x\,.\,q^3 + q^6)\ldots,$$

$$f\left(x\frac{\omega}{\pi}\right) = B' e^{a'x^2}(1 - p e^{-2x})(1 - p e^{2x})(1 - p^3 e^{-2x})(1 - p^3 e^{2x})\ldots,$$

où A, A', B, B', a, a' sont des quantités indépendantes de x, $q = e^{\frac{\varpi}{\omega}\pi}$, $p = e^{-\frac{\omega}{\varpi}\pi}$; $\frac{\omega}{2}$ et $\frac{\varpi}{2}$ enfin sont les *fonctions complètes* correspondantes aux modules $b = \sqrt{1 - c^2}$ et c.

Outre les fonctions elliptiques, il y a deux autres branches de l'analyse dont je me suis beaucoup occupé, savoir la théorie de l'intégration des formules différentielles algébriques et la théorie des équations. A l'aide d'une méthode particulière j'ai trouvé beaucoup de résultats nouveaux, qui surtout jouissent d'une très grande généralité. Je suis parti du problème suivant de la théorie de l'intégration:

"Etant proposé un nombre quelconque d'intégrales $\int y\,dx$, $\int y_1\,dx$, $\int y_2\,dx$ etc., où y, y_1, y_2, ... sont des fonctions algébriques quelconques de x, trouver toutes les relations possibles entre elles qui soient exprimables par des fonctions algébriques et logarithmiques".

J'ai trouvé d'abord qu'une relation quelconque doit avoir la forme suivante:

$$A\int y\,dx + A_1\int y_1\,dx + A_2\int y_2\,dx + \cdots = u + B_1 \log v_1 + B_2 \log v_2 + \cdots,$$

où A, A_1, A_2, ... B_1, B_2, ... etc. sont des constantes, et u, v_1, v_2, ... des fonctions *algébriques* de x. Ce théorème facilite extrêmement la solution du problème; mais le plus important est le suivant:

"Si une intégrale $\int y\,dx$, où y est lié à x par une équation algébrique quelconque, peut être exprimée d'une manière quelconque *explicitement ou implicitement* à l'aide de fonctions algébriques et logarithmiques, on pourra toujours supposer:

$$\int y\,dx = u + A_1 \log v_1 + A_2 \log v_2 + \cdots + A_m \log v_m,$$

où A_1, A_2, ... sont des constantes, et u, v_1, v_2, ... v_m des *fonctions rationnelles* de x et y".

P. ex. si $y = \frac{r}{\sqrt{R}}$, où r et R sont des fonctions rationnelles, on aura dans tous les cas où $\int \frac{r\,dx}{\sqrt{R}}$ est intégrable

$$\int \frac{r\,dx}{\sqrt{R}} = p\sqrt{R} + A_1 \log\left(\frac{p_1 + q_1\sqrt{R}}{p_1 - q_1\sqrt{R}}\right) + A_2 \log\left(\frac{p_2 + q_2\sqrt{R}}{p_2 - q_2\sqrt{R}}\right) + \cdots$$

où p, p_1, p_2, ... q_1, q_2, ... sont des fonctions rationnelles de x.

J'ai réduit de cette manière au plus petit nombre possible les fonctions transcendantes contenues dans l'expression:

$$\int \frac{r\,dx}{\sqrt[m]{R}},$$

où R est une fonction entière, et r une fonction rationnelle. J'ai découvert de même des propriétés générales de ces fonctions. Savoir:

Soient p_0, p_1, p_2, ... p_{m-1} des fonctions entières quelconques d'une quantité indéterminée x, et regardons les coefficiens des puissances de x dans ces fonctions comme des *variables*. Soient de même α^0, α^1, α^2, ... α^{m-1} les racines de l'équation $\alpha^m = 1$, m étant premier ou non, et faisons:

$$s_k = p_0 + \alpha^k p_1 R^{\frac{1}{m}} + \alpha^{2k} p_2 R^{\frac{2}{m}} + \cdots + \alpha^{(m-1)k} R^{\frac{m-1}{m}}.$$

Cela posé, en formant le produit:

$$s_0 s_1 s_2 \ldots s_{m-1} = V,$$

V sera comme vous voyez une fonction entière de x. Maintenant si l'on désigne par x_1, x_2, ... x_μ les racines de l'équation $V = 0$, la fonction transcendante

$$\psi x = \int \frac{dx}{(x-a) R^{\frac{n}{m}}},$$

où $\frac{n}{m} < 1$, et a une quantité quelconque, aura la propriété suivante:

$$\psi(x_1) + \psi(x_2) + \cdots + \psi(x_\mu)$$
$$= C + \frac{1}{R'^{\frac{n}{m}}} \left(\log(s_0') + \alpha^n \log(s_1') + \alpha^{2n} \log(s_2') + \cdots + \alpha^{(m-1)n} \log(s'_{m-1})\right),$$

C étant une constante, et

$$R',\ s_0',\ s_1',\ \ldots\ s'_{m-1}$$

les valeurs que prendront respectivement les fonctions

$$R,\ s_0,\ s_1,\ \ldots\ s_{m-1},$$

en écrivant simplement a au lieu de x.

Rien n'est plus facile que la démonstration de ce théorème. Je la donnerai dans un de mes mémoires prochains dans le journal de M. *Crelle*. Un corollaire bien remarquable du théorème précédent est le suivant.

Si l'on fait $\varpi(x) = \int \frac{r\,dx}{R^{\frac{n}{m}}}$, où r est une fonction quelconque entière de x, dont le degré est moindre que $\frac{n}{m}\nu - 1$, où ν est le degré de R, la fonction $\varpi(x)$ est telle que

$$\varpi(x_1) + \varpi(x_2) + \cdots + \varpi(x_\mu) = \text{const.}$$

Si par exemple $m = 2$, $n = 1$, $\nu = 4$, on aura $r = 1$, donc

$$\varpi(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{R}} \quad \text{et} \quad \varpi(x_1) + \varpi(x_2) + \cdots + \varpi(x_\mu) = C.$$

C'est le cas des fonctions elliptiques de la première espèce.

Les belles applications que vous avez données des fonctions elliptiques à l'intégration des formules différentielles, m'ont engagé à considérer un problème très général à cet égard, savoir:

Trouver s'il est possible d'exprimer une intégrale de la forme $\int y\,dx$, où y est une fonction algébrique quelconque, par des fonctions algébriques, logarithmiques et *elliptiques* de la manière suivante:

$$\int y\,dx = \text{fonct. algéb. de } (x,\ \log v_1,\ \log v_2,\ \log v_3,\ \ldots\ \Pi_1 z_1,\ \Pi_2 z_2,\ \Pi_3 z_3,\ \ldots),$$

$v_1, v_2, v_3, \dots z_1, z_2, z_3, \dots$ étant des fonctions algébriques de x les plus générales possibles, et Π_1, Π_2, Π_3, etc. désignant des fonctions elliptiques quelconques en nombre fini. J'ai fait le premier pas vers la solution de ce problème, en démontrant le théorème suivant:

"S'il est possible d'exprimer $\int y\,dx$ comme on vient de le dire, on pourra toujours donner à son expression la forme suivante:

$$\int y\,dx = t + A_1 \log t_1 + A_2 \log t_2 + \cdots + B_1 \Pi_1(y_1) + B_2 \Pi_2(y_2) + B_3 \Pi_3(y_3) + \cdots,$$

où $t, t_1, t_2, \dots y_1, y_2, y_3, \dots$ sont toutes des fonctions *rationnelles* de x et y; mais en conservant à la fonction y toute sa généralité, j'ai été arrêté là par des difficultés qui surpassent mes forces et que je ne vaincrai jamais. Je me suis donc contenté de quelques cas particuliers, surtout de celui où y est de la forme $\frac{r}{\sqrt{R}}$, r et R étant deux fonctions rationnelles quelconques de x. Cela est déjà très général. J'ai reconnu qu'on pourra mettre l'intégrale $\int \frac{r\,dx}{\sqrt{R}}$ sous cette forme:

$$\int \frac{r\,dx}{\sqrt{R}} = p\sqrt{R} + A' \log\left(\frac{p' + \sqrt{R}}{p' - \sqrt{R}}\right) + A'' \log\left(\frac{p'' + \sqrt{R}}{p'' - \sqrt{R}}\right) + \cdots$$
$$\cdots + B_1 \Pi_1(y_1) + B_2 \Pi_2(y_2) + B_3 \Pi_3(y_3) + \cdots,$$

où toutes les quantités $y_1, y_2, y_3, \dots p, p', p'', \dots$ sont des fonctions *rationnelles* de la variable x".

J'ai démontré ce théorème dans le mémoire sur les fonctions elliptiques qui va être imprimé dans le journal de M. *Crelle**). Il m'a été extrêmement utile pour donner la généralité la plus grande possible à la théorie de la transformation. Ainsi j'ai non seulement comparé entre elles deux fonctions, mais un nombre quelconque de fonctions. Je suis conduit à ce résultat remarquable:

Si l'on a entre un nombre quelconque de fonctions elliptiques des trois espèces avec les modules $c, c', c'', c''', \dots$ une relation quelconque de la forme:

$$A\,\Pi x + A'\Pi_1 x_1 + A''\Pi_2 x_2 + A'''\Pi_3 x_3 + \cdots + A^{(n)}\Pi_n x_n = v,$$

---

*) T. I, p. 518 de cette édition.

où $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ sont des variables liées entre elles par un nombre quelconque d'équations algébriques, et v une expression algébrique et logarithmique: les modules $c', c'', c''', \ldots$ doivent être tels qu'on puisse satisfaire aux équations:

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}} = a'\frac{dx'}{\sqrt{(1-x'^2)(1-c'^2x'^2)}} = a''\frac{dx''}{\sqrt{(1-x''^2)(1-c''^2x''^2)}} = \text{etc.}$$

en mettant pour $x', x'', x''', \ldots$ des fonctions *rationnelles* de x; $a', a'', \ldots$ étant des constantes. Ce théorème réduit la théorie générale des fonctions elliptiques à celle de la transformation d'une fonction en une autre.

Ne soyez pas fâché, Monsieur, que j'aie osé vous présenter encore une fois quelques-unes de mes découvertes. Si vous me permettez de vous écrire, je désirerais bien vous en communiquer un bon nombre d'autres, tant sur les fonctions elliptiques et les fonctions plus générales, que sur la théorie des équations algébriques. J'ai été assez heureux pour trouver une règle sûre à l'aide de laquelle on pourra reconnaître si une équation quelconque proposée est résoluble à l'aide de *radicaux* ou non. Un corollaire de ma théorie fait voir que généralement il est *impossible* de résoudre les équations supérieures au quatrième degré.

Agréez etc.

Christiania, le 25 novembre 1828.

Il me tarde beaucoup de connaître l'ouvrage de M. *Jacobi*. Il doit s'y trouver des choses merveilleuses. Certainement M. *Jacobi* va perfectionner à un degré inespéré non seulement la théorie des fonctions elliptiques, mais encore les mathématiques en général. Je l'estime on ne peut plus.

NOTES.

APERÇU DES MANUSCRITS D'ABEL CONSERVÉS JUSQU'A PRÉSENT.

Après la publication des "Oeuvres complètes" *Holmboe* resta propriétaire des manuscrits laissés par Abel. En 1850 sa maison fut ravagée d'un incendie; c'est à cet accident qu'il faut attribuer la perte d'un grand nombre de manuscrits d'où *Holmboe* a tiré la plus grande partie de son second volume. Ce qui nous reste consiste en cinq livres manuscrits et quelques feuilles, que nous allons énumérer en indiquant sommairement le contenu.

A. In-folio de 202 pages, portant la marque d'un magasin de Paris; sur la première page on trouve le titre: "*Mémoires de mathématiques par N. H. Abel*" avec la date: "*Paris le* 9 *août* 1826".

Pages 3—57 contiennent une ébauche du mémoire présenté par Abel à l'Académie des Sciences de Paris; p. 53 et 54 on trouve un morceau intitulé: "§ 11. *Sur l'intégrale* $\int \frac{dx}{x-a} e^{-\int \frac{\varphi x}{fx} dx} = y$", ce qui fait présumer qu'Abel a pensé un moment à donner à son mémoire un onzième paragraphe sur la permutation du paramètre et de l'argument.

Pages 63—74 traitent encore de la permutation du paramètre et de l'argument; pour la plupart il n'est question que de cas spéciaux. Il est remarquable qu'Abel suppose p. 63 que la variable de l'intégrale passe par une suite de valeurs imaginaires: en faisant

$$\psi' x . \varphi x + fx . \psi x = 0$$

il considère l'intégrale

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\varphi(\theta(t) + \sqrt{-1} . \theta_1(t)) . (\theta'(t) + \sqrt{-1} . \theta_1'(t)) \, dt}{\theta(t) + \sqrt{-1} . \theta_1(t) - F(\alpha) - \sqrt{-1} . F_1(\alpha)},$$

t_0 et t_1 étant des quantités réelles.

Pages 75—79 on trouve une suite de calculs sous le titre "*Sur une espèce particulière de fonctions entières nées du développement de la fonction* $\frac{1}{1-v}e^{-\frac{xv}{1-v}}$ *suivant les puissances de* v".

En faisant

$$\frac{1}{1-v}e^{-\frac{xv}{1-v}} = \Sigma\, \varphi_m x \,.\, v^m,$$

Abel trouve

$$\varphi_m x = 1 - mx + \frac{m(m-1)}{2}\frac{x^2}{2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{2\,.\,3}\frac{x^3}{2\,.\,3} + \cdots$$

$$\pm m \frac{x^{m-1}}{2\,.\,3\ldots(m-1)} \mp \frac{x^m}{2\,.\,3\ldots m}.$$

En multipliant l'équation

$$\frac{1}{(1-v)(1-u)}e^{-\frac{xv}{1-v}-\frac{xu}{1-u}} = \Sigma\Sigma\, \varphi_m x \,.\, \varphi_n x \,.\, v^m \,.\, u^n$$

de part et d'autre par $e^{-x}dx$, et intégrant de $x=0$ à $x=\infty$, il trouve

$$\frac{1}{1-vu} = \Sigma\Sigma\, u^m \,.\, v^n \int_0^\infty e^{-x}\varphi_m x \,.\, \varphi_n x \,.\, dx,$$

d'où il conclut que l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-x}\varphi_m x \,.\, \varphi_n x \,.\, dx$$

est égale à l'unité si $m=n$, mais nulle si $m \gtrless n$. En faisant

$$x^\mu = A_0\varphi_0 x + A_1\varphi_1 x + \cdots + A_\mu \varphi_\mu x$$

il trouve

$$A_m = (-1)^m \,.\, \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(m+1)} \,.\, \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu-m+1)}.$$

Pages 80—100 sont remplies de calculs sur des intégrales dont les variables passent par des valeurs imaginaires; p. 100 Abel écrit l'équation

$$\varphi(x+y\sqrt{-1}) = p + q\sqrt{-1},$$

et en déduit les suivantes

$$\frac{d^2p}{dx^2} = -\frac{d^2p}{dy^2}\,;\quad \frac{d^2q}{dx^2} = -\frac{d^2q}{dy^2}.$$

Ces pages ainsi que la page 63, dont nous avons parlé plus haut, indiquent sans doute qu'Abel s'est occupé du "Mémoire sur les intégrales définies prises entre des limites imaginaires", de *Cauchy*.

Pages 102—115 traitent de la résolution des équations par radicaux.

Pages 117—118 contiennent une ébauche du mémoire XIII du 1[er] tome.

Pages 119—121 traitent de la transformation des intégrales elliptiques. Voici le commencement:

"SUR LA TRANSFORMATION DE L'INTÉGRALE

$$\int \frac{p\,dx}{\sqrt{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4}} = \int \frac{p\,dy}{\sqrt{(1-c^2y^2)(1-e^2y^2)}}.$$

$$y = \sqrt{\frac{r}{s}}$$

$$dy = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{s}{r}} \cdot \frac{s\,dr - r\,ds}{s^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{s\,dr - r\,ds}{s\sqrt{rs}}$$

$$1 - c^2y^2 = \frac{s - c^2 r}{s}, \quad 1 - e^2y^2 = \frac{s - e^2 r}{s}$$

$$\varphi(y) = (1-c^2y^2)(1-e^2y^2) = \frac{(s-c^2r)(s-e^2r)}{s^2}$$

$$\frac{dy}{\sqrt{\varphi y}} = \frac{1}{2}\frac{s\,dr - r\,ds}{\sqrt{rs(s-c^2r)(s-e^2r)}} = \frac{1}{2}\frac{A\,dx}{\sqrt{(1-m^2x^2)(1-n^2x^2)}} = \frac{1}{2}\frac{A\,dx}{\sqrt{fx}}$$

$$rs(s-c^2r)(s-e^2r) = v^2(1-m^2x^2)(1-n^2x^2)$$

$$A = \frac{s\,dr - r\,ds}{v\,dx}.$$

$$r = v_0^2(1-m^2x^2), \quad s - c^2 r = t_0^2$$

$$v = v_0 v_1 t_0 t_1$$

$$s = v_1^2(1-n^2x^2), \quad s - e^2 r = t_1^2,$$

$$s\,dr - r\,ds = (c^2 r + t_0^2)\,dr - r(c^2\,dr + 2t_0\,dt_0) = t_0(t_0\,dr - 2r\,dt_0)$$

donc

$$s\,dr - r\,ds = t_0 t_1 v_0 v_1 B = Bv \quad \text{où } B \text{ fonction entière}$$

B est constante".

Le reste traite de la transformation des intégrales de la seconde espèce.

Pages 124—127 traitent de la convergence des séries, pages 129—133 des équations abéliennes. Page 135 on trouve notés les résultats d'Abel sur la division de la lemniscate.

Presque tout le reste du livre est rempli de calculs par lesquels Abel paraît avoir préparé la rédaction de ses "Recherches sur les fonctions elliptiques"; il s'agit principalement de tout ce qui est nécessaire pour arriver à la résolution des équations traitées dans le mémoire mentionné, surtout de l'équation dont dépend la division de la lemniscate; on n'y trouve rien sur les développemens en séries. D'ailleurs en écrivant ces pages Abel s'occupa aussi d'autres fonctions elliptiques singulières: on y trouve mentionné l'intégrale $\int \frac{dz}{\sqrt{1-z^3}}$, le module $c = \left(\frac{1 \pm i\sqrt{7}}{2}\right)^2$ et l'équation $\omega' = m\omega + n\omega\sqrt{\alpha}\,.\,i$.

En somme le livre A traite précisément des choses qui d'après les lettres d'Abel l'occupèrent pendant son séjour à Paris. Probablement il fut rempli pendant l'hiver 1826—1827.

B. In-folio de 178 pages; en le comparant, dans les archives, à des régistres de la même époque, on a pu constater qu'il est fait par un relieur de Christiania.

Pages 3—11 contiennent le commencement d'un mémoire intitulé "*Développement de* $(\cos x)^n$ *et* $(\sin x)^n$ *en séries*", dont le but est indiqué par la phrase suivante:

"*L'objet de ce mémoire est de trouver la somme des séries connues:*

$$\cos mx + m\cos(m-2)x + \frac{m(m-1)}{1.2}\cos(m-4)x + \cdots,$$

$$\sin mx + m\sin(m-2)x + \frac{m(m-1)}{1.2}\sin(m-4)x + \cdots,$$

sans aucune considération de quantités imaginaires; m et x sont supposés d'être réelles".

La méthode est celle des "Recherches sur la série $1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \cdots$".

Pages 13—38. Ébauche du mémoire XXV du premier tome.

Pages 47—81 contiennent une suite de notices sur les séries infinies dont nous avons donné un extrait t. II, mém. XVI. Pages 47—50 on trouve à la marge une ébauche du mémoire XVIII du premier tome, qui fait voir qu'Abel eut primitivement le dessein d'y insérer une suite de théorèmes sur la convergence des séries. Nous croyons qu'en y renonçant il se proposait d'y revenir plus tard dans un mémoire plus développé.

Pages 85—178 Abel fait l'ébauche d'un traité en allemand des fonctions elliptiques. Les vingt premières pages seulement ont reçu une rédaction un peu complète; le contenu en est à peu près celui du "Précis d'une théorie des fonctions elliptiques" chap. I, II et IV. Le reste n'est pour la plupart que des calculs sans texte. Page 107—120 Abel considère l'intégrale

$$\int_0^r \frac{e^{\alpha i}\,dr}{\sqrt{(1-e^{2\alpha i}r^2)(1-c^2e^{2\alpha i}r^2)}};$$

ayant séparé la partie reelle de l'imaginaire, il les discute dans plusieurs cas différens; mais nous n'avons pu saisir aucun résultat de quelque importance.

Depuis la page 125 il est question de la fonction $\lambda\theta$; surtout la théorie des transformations rationnelles est étudiée d'une manière très complète p. 125—163.

Pages 164—178 traitent des cas où le module est transformé en lui même. Abel fait

$$a\omega = \mu\omega + \nu\omega',$$

$$a\omega' = \mu'\omega' + \nu'\omega,$$

ω et ω' étant les périodes, a le multiplicateur; il en conclut

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{1}{2\nu'}\left[\mu - \mu' + \sqrt{(\mu-\mu')^2 + 4\nu\nu'}\right],$$

$$a = \tfrac{1}{2}\left[\mu + \mu' + \sqrt{(\mu-\mu')^2 + 4\nu\nu'}\right],$$

Plus bas il prend pour exemples les modules $i(2+\sqrt{3})$, $\sqrt{2}-1$.

C. In-folio de 215 pages, qui porte la marque d'un relieur de Christiania; il est écrit en français.

Pages 2—12 traitent de la transformation des intégrales elliptiques de la seconde et de la troisième espèce. C'est une continuation de la dernière partie du livre B.

Pages 14—56 traitent presque exclusivement des équations algébriques. Jusqu'à la page 28 il s'agit de la résolution des équations par radicaux en général. Le reste consiste pour la plupart de calculs sur la division en sept parties égales des périodes de la fonction elliptique $\lambda\theta$ définie par les équations

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+2\sqrt{3}\,x^2+x^4}}=\theta, \quad x=\lambda\theta.$$

C'est l'une des fonctions mentionnées dans la dernière partie du livre B. Pages 51, 52 on trouve une ébauche de l'introduction et une table des matières du mémoire XXV du premier tome. Il faut croire que ces deux pages furent écrites vers la fin du mois de mars 1828.

Pages 64—83 contiennent le morceau intitulé "Mémoire sur les fonctions transcendantes de la forme $\int y\,dx$, où y est une fonction algébrique de x", que nous avons imprimé t. II, p. 206—216.

Pages 88—107 sont remplies de calculs qui paraissent être faits pendant la rédaction du mémoire XIX du premier tome, "Solution d'un problème général" etc.

Pages 128—164 contiennent le "Mémoire sur la résolution algébrique des équations", imprimé au second tome.

Le reste du livre contient des calculs concernant les fonctions elliptiques, qui semblent faites à l'occasion des derniers travaux d'Abel, surtout du "Précis d'une théorie etc." Il y a aussi quelques calculs sur les équations différentielles qui sont satisfaites par les périodes des fonctions elliptiques, et de plus l'ébauche de la lettre à *Legendre* qu'on trouve t. II, p. 271—279.

Les livres B et C embrassent le temps depuis le retour d'Abel en Norvège au mois de mai 1827 jusqu'à sa dernière maladie, qui survint en janvier 1829; le premier paraît être terminé et le second entamé à peu près au commencement de l'année 1828.

D. Cahier in-quarto de 136 pages, écrit en français. La première page porte le titre "*Remarques sur divers points de l'analyse par N. H. Abel, 1*[er] *cahier*", et la date "*le 3 sept. 1827*".

Pages 5, 6 on trouve indiqué le théorème suivant: Toute fonction algébrique déterminée par une équation du degré m satisfait à une équation différentielle linéaire de l'ordre $m-1$. Page 66 contient un calcul par lequel Abel détermine la forme de la racine d'une équation abélienne dont le degré est un nombre premier donné, et dont les coefficiens sont des nombres rationnels. Le reste du cahier est rempli de calculs sur les

séries infinies, les équations abéliennes et les intégrales dont les variables passent par des valeurs imaginaires. Il paraît écrit en même temps que le livre B.

E. Cahier in-quarto de 192 pages écrit en norvégien. Il contient ce qui paraît être des extraits de traités de mathématiques lus par Abel étant encore élève du gymnase de Christiania. Ce sont pour la plupart des développemens en séries, mais on y trouve aussi d'autres choses, par exemple la résolution des équations binômes au moyen des fonctions trigonométriques, celle des équations du troisième et du quatrième degré. Le cahier paraît être fini déjà en 1820.

Des feuilles libres la partie la plus intéressante consiste de dix morceaux qui traitent des fonctions elliptiques, en conservant la première notation d'Abel: $\varphi\alpha$, $f\alpha$, $F\alpha$. Ce sont des feuilles in-octavo d'un papier mince, ou des fragmens de telles feuilles, remplies d'une écriture serrée; elles semblent faites pour être envoyées par la poste. Voici leur contenu

N° 1 contient le commencement d'un mémoire intitulé: *Recherches sur les fonctions elliptiques. Second mémoire.*

N°s 2, 3 traitent des relations qui ont lieu entre les quantités $\varphi\frac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}$.

N°s 4—8 sont des fragmens d'une théorie de la transformation moins générale que celle de la "Solution d'un problème général etc."; les deux périodes ω et ϖi sont divisées chacune par un nombre différent.

N° 9 traite de la résolution de l'équation de division des périodes.

N° 10 le théorème d'Abel appliqué à la fonction $\varphi\alpha$.

Nous avons imprimé les n°s 1, 2, 9 sous le titre "Fragmens sur les fonctions elliptiques"; le n° 3 ne contient que les dernières lignes d'un paragraphe et le commencement du suivant; n° 10 a conservé la place qu'il avait dans l'édition de *Holmboe* (Démonstration de quelques formules elliptiques).

Des autres feuilles nous avons publié deux, t. I, p. 609. Une feuille est peut-être un fragment d'un mémoire qu'Abel présenta en 1824 au Sénat Académique de l'Université de Christiania; il y traite de l'intégration des différentielles de la forme $\frac{Pdx}{\sqrt{\varphi x}}$ au moyen des fonctions algébriques, logarithmiques et exponentielles. Le reste offre moins d'interêt; il y en a des feuilles d'ont nous n'avons pu deviner le sens.

De ces manuscrits le cahier D appartient à M. *Bjerknes*, et le cahier E à M. *Broch*. Les autres appartiennent à la bibliothèque de l'Université de Christiania, qui possède en outre onze lettres d'Abel à *Holmboe* et deux lettres de *Crelle* à Abel. La seconde des

deux lettres qu'Abel a adressées à *Legendre* est aussi conservée; elle appartient maintenant à M. *Weierstrass*.

Il existe bien quelques autres lettres d'Abel, mais excepté une lettre à *Hansteen*, elles ne contiennent rien d'un intérêt scientifique.

L'Académie Royale des Sciences de Berlin possède les manuscrits qui ont servi à l'impression des cinq mémoires d'Abel qui furent publiés dans le quatrième tome du Journal de *Crelle* (t. I, mém. XXIV—XXVIII de la présente édition), et à celle des extraits des lettres d'Abel qui se trouvent dans le cinquième tome. Ce sont des copies des originaux d'Abel que *Crelle* a fait prendre, et sur lesquelles il a fait un grand nombre de corrections, sans doute sur la demande d'Abel, qui n'était pas sûr de son français. Ces corrections se distinguent aisément de l'écriture du copiste. Dans les notes suivantes, quand nous aurons à parler de ces copies, nous les nommerons simplement les copies de *Crelle*.

NOTES AUX MÉMOIRES DU TOME I.

Le mémoire I fut publié en norvégien dans le Magasin des Sciences naturelles, tome I, fascicule 1, Christiania 1823.

Le mémoire II fut publié en norvégien dans le Magasin des Sciences naturelles, tome II, fascicules 1 et 2. Dans l'édition de *Holmboe* les numéros 1 et 4 ont été supprimés, le premier, sans doute, parce que le même problème a été traité depuis par Abel (t. I, mém. IX.)

Page 11, ligne 16. Au lieu de $AM = s$ on lit dans le Magasin $KM = s$, ce qui est en contradiction avec l'équation:

$$dt = -\frac{ds}{h}.$$

Cette inexactitude est corrigée vers la fin du numéro (p. 18 ligne 8) par la phrase: "*le point le plus bas est fixe*", que nous avons supprimée, en effectuant la correction.

Comme l'a remarqué M. *Bertrand* (Annali di matematica pura ed applicata, série I, t. 1), les formules du numéro 2 sont inexactes, l'intégrale double qui exprimerait $\varphi(x + y\sqrt{-1}) + \varphi(x - y\sqrt{-1})$ étant évidemment nulle. Au sujet du numéro 3 M. *Bertrand* fait une observation historique: que l'expression des nombres de *Bernoulli* était déjà trouvée en 1814 (Mémoires des Savants étrangers t 1, p. 736, an. 1827), et que la formule qui exprime $\Sigma\varphi x$ appartient à *Plana* (Mémoires de Turin t. 25, 1820).

Sylow.

Mémoire III. En 1821, avant de quitter le gymnase, Abel crut un moment avoir trouvé la résolution par radicaux de l'équation générale de cinquième degré, et chercha même à faire présenter par l'intermédiaire de *Hansteen* un mémoire sur ce sujet à la Société Royale des Sciences de Copenhague. Mais quand on lui demanda une déduction plus détaillée et l'application à un exemple numérique, il découvrit lui même l'erreur

qu'il avait commise. Loin de se rebuter il se proposa de trouver cette résolution ou d'en démontrer l'impossibilité. Le mémoire III fut rédigé en français, et Abel le fit imprimer à ses frais.

Sylow.

Le mémoire IV fut publié en norvégien dans le Magasin des Sciences naturelles, tome III, fascicule 2, Christiania 1825.

Page 34, ligne 10: La formule (1) n'est pas généralement juste. Aussi les formules trouvées dans le mémoire ne valent qu'en des cas particuliers.

Page 35, ligne 12. Après cette ligne *Holmboe* avait intercalé dans son édition la phrase suivante:

„*Maintenant on tire de l'équation* (1) *en intégrant*

$$\int \varphi x \, . \, dx = \int\int e^{vx} dx \, fv \, dv = \int e^{vx} \frac{fv}{v} dv;$$

donc

$$\Sigma \varphi x = \int \varphi x \, dx - \tfrac{1}{2} \varphi x + 2 \int_0^{\frac{1}{0}} \frac{dt}{e^{2\pi t} - 1} \int e^{vx} fv \, . \sin vt \, dv.\text{"}$$

Page 39, ligne 6. Dans son édition *Holmboe* avait ajouté à la fin du mémoire le morceau suivant que nous reproduisons, parce qu'il est peut-être tiré d'un manuscrit d'Abel.

„*On peut aussi par ce qui précède trouver la valeur de la série*

$$\varphi a - \varphi(a+1) + \varphi(a+2) - \varphi(a+3) + \cdots .$$

En effet, en mettant $\varphi(2x)$ *au lieu de* φx, *et* $\frac{1}{2} a$ *au lieu de* a, *on obtiendra*

$$\varphi a + \varphi(a+2) + \varphi(a+4) + \cdots$$
$$= \tfrac{1}{2} \int_a^{\frac{1}{0}} \varphi x \, dx + \tfrac{1}{2} \varphi a - 2 \int_0^{\frac{1}{0}} \frac{dt}{e^{2\pi t} - 1} \, \frac{\varphi(a + 2t\sqrt{-1}) - \varphi(a - 2t\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}};$$

donc

$$2\varphi a + 2\varphi(a+2) + 2\varphi(a+4) + \cdots$$
$$= \int_a^{\frac{1}{0}} \varphi x \, dx + \varphi a - 2 \int_0^{\frac{1}{0}} \frac{dt}{e^{\pi t} - 1} \, \frac{\varphi(a + t\sqrt{-1}) - \varphi(a - t\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}.$$

En retranchant l'équation (6) *de cette équation, on obtiendra, toutes réductions faites:*

$$\varphi a - \varphi(a+1) + \varphi(a+2) - \varphi(a+3) + \cdots$$
$$= \tfrac{1}{2} \varphi a - 2 \int_0^{\frac{1}{0}} \frac{dt}{e^{\pi t} - e^{-\pi t}} \, \frac{\varphi(a + t\sqrt{-1}) - \varphi(a - t\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}.$$

Soit par exemple $\varphi x = \frac{1}{x}$ *on aura*

$$\frac{\varphi(a + t\sqrt{-1}) - \varphi(a - t\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}} = -\frac{t}{a^2 + t^2}$$

donc

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{a+1} + \frac{1}{a+2} - \frac{1}{a+3} + \cdots = \frac{1}{2a} + 2 \int_0^{\frac{1}{0}} \frac{t \, dt}{(a^2 + t^2)(e^{\pi t} - e^{-\pi t})}$$

et en faisant $a = 1$,

$$\log 2 - \tfrac{1}{2} = 2\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{t\,dt}{(1+t^2)(e^{\pi t} - e^{-\pi t})} \text{."}$$

Voyez au reste le mémoire II, n° 4 (tome I, p. 25).

Lie.

Le mémoire V, inséré en norvégien dans les Mémoires de la Société Royale Norvégienne des Sciences, tome II, Throndhjem 1824—1827, n'a pas été imprimé dans l'édition de *Holmboe*, comme il dit lui-même, parce que les résultats en sont contenus dans deux mémoires posthumes, t. II, p. 43—54 de notre édition.

Page 45, ligne 2. Le numérateur $\left(\psi\frac{\varphi'}{\varphi} + f'\right)^{(p+p'+1)}$ doit être remplacé par $\left(\psi\frac{\varphi'}{\varphi} + \psi f'\right)^{(p+p'+1)}$, de sorte que la valeur correcte de $\varphi(p\,p')$ devient

$$\varphi(p, p') = \frac{(p+1)\,\psi^{(p+p'+2)}}{2\,.\,3\ldots(p+p'+2)} + \frac{\left(\psi\frac{\varphi'}{\varphi} + \psi f'\right)^{(p+p'+1)}}{2\,.\,3\ldots(p+p'+1)}.$$

Nous n'avons pas corrigé cette faute, qui affecte plusieurs des formules suivantes, parce qu'il aurait fallu refaire entièrement les formules de l'article *f*, p. 51—52.

Lie.

Le mémoire VI, rédigé en français par Abel, fut traduit en allemand par *Crelle* et inséré dans le Journal de *Crelle*, tome I, fascicule 1, qui fut publié à ce qu'il paraît au mois de février ou mars 1826.

Le mémoire VII fut écrit pendant le séjour d'Abel en Allemagne en 1825: il était rédigé en français, mais en l'insérant dans le premier cahier de son Journal, *Crelle* le traduisit en allemand. La publication eut lieu dans les premiers mois de l'an 1826.

Page 67, lignes 24—29. Voici le texte du Journal de Crelle:

Wenn $f(x', x'', \ldots)$ *und* $\varphi(x'\ x'', \ldots)$ *zwei ganze Functionen sind, so ist klar, dass der Quotient*

$$\frac{f(x', x'', \ldots)}{\varphi(x', x'', \ldots)}$$

ein besonderer Fall der Resultate der drei ersten Operationen ist, welche rationale Functionen geben. Man kann also eine rationale Function als das Resultat der Wiederholung dieser Operation betrachten.

Ce passage est sans doute le résultat d'une inadvertance du traducteur. Ce qu'a voulu dire Abel nous paraît si évident que nous avons cru devoir corriger le texte.

Page 72. La proposition qui termine le § 1 a été critiquée par *Hamilton* (Transactions of the R. Irish Acad. Vol. XVIII, Part II, p. 248, Dublin 1839) et par M. *Königsberger* (Mathematische Annalen herausgegeben von *Clebsch* und *Neumann*, Bd. I, p 168, Leipzig 1870). En effet, si la fonction algébrique v est primitivement de l'ordre μ, elle sera après la transformation généralement de l'ordre $\mu + 1$ et du degré 1. M. *Königsberger* ajoute avec raison que cela n'infirme pas les conclusions suivantes.

Page 83. Un autre point que *Hamilton* trouve obscur est la démonstration du théorème de la page 83. Il faut avouer qu'elle aurait pu être plus courte et plus claire; mais quant à la rigueur elle est à l'abri de toute objection sérieuse. Le seul point qu'on pourrait revoquer en doute serait les équations $v_1 + v_2 = \varphi x_1$, $v_2 + v_3 = \varphi x_2$ etc. Pour les justifier, il suffit de faire voir qu'il existe une substitution des cinq quantités qui transforme v_1 en v_2, en remplaçant x_1 par une autre lettre x_2. Or dans le cas contraire il faudrait que chaque substitution qui change v_1 en v_2 laisse x_1 à sa place, mais on se convaincra aisément que dans cette supposition le nombre de valeurs de v_1 serait un nombre pair. La même chose aurait encore lieu, si la fonction φx_1 était symétrique par rapport aux cinq quantités $x_1, x_2 \ldots x_5$.

Page 87. L'article du Bulletin de *Férussac* que nous avons placé après le mémoire n'est pas signé, mais Abel s'en est déclaré auteur dans une lettre à *Holmboe* (voyez t. II, p. 260). L'article fut suivi de quelques lignes du redacteur, *Saigey*; les voici:

"*Note du rédacteur.* Dans un *Mémoire sur l'insolubilité des équations algébriques générales d'un degré supérieur au quatrième* (*Société Italienne des Sciences* tome 9) et dans sa "*Théorie générale des équations (ibid.), Ruffini,* géomètre italien, mort il y a quelques "années, a démontré la proposition qui fait le sujet de cet article; un second mémoire "du même auteur sur *l'insolubilité des équations algébriques générales d'un degré supérieur* "*au quatrième, soit algébriquement, soit d'une manière transcendante,* se trouve dans les Mé"moires de l'Instit. nat. italien, t. 1, part. 2. Ce dernier mémoire avait été lu le 22 "novemb. 1805. Dans les *Mémoires de l'Institut imp. et roy. de Milan,* tome 1, un autre "auteur fait voir que l'impossibilité de la résolution de l'équation générale du cinquième "degré est contradictoire avec une proposition que nous ne pouvons rapporter ici, ou du "moins il demande la solution d'une difficulté qui n'avait pas été prévue. M. *Cauchy* a "revu la démonstration de Ruffini, et il en a fait un rapport favorable à *l'Académie des* "*sciences,* il y a quelques années. D'autres géomètres avouent n'avoir pas compris cette "démonstration, et il y en a qui ont fait la remarque très-juste que *Ruffini* en prouvant "trop, pourrait n'avoir rien prouvé d'une manière satisfaisante; en effet, on ne conçoit pas "comment une équation du cinquième degré, par exemple, n'admettrait pas de racines "*transcendantes,* qui équivalent à des séries infinies de termes algébriques, puisqu'on dé"montre que toute équation de degré impair a nécessairement une racine *quelconque.* "M. *Abel,* au moyen d'une analyse plus profonde, vient de prouver que de telles racines "ne peuvent exister algébriquement; mais il n'a pas résolu négativement la question de "l'existence des racines transcendantes. Nous recommandons cette question aux géomè"tres qui en ont fait une étude spéciale".

Le point faible du raisonnement de *Ruffini,* c'est qu'il suppose, sans démonstration, que les radicaux qui concourent à la résolution de l'équation s'expriment rationnellement par les racines. Ce défaut de son raisonnement, ou plutôt un défaut analogue, a contribué à produire le résultat faux dont parle *Saigey;* il y a d'ailleurs aussi d'autres objections à faire à cette partie de ses travaux, au reste si pleins de mérite.

Sylow.

Les mémoires VIII, IX et X rédigés en français furent publiés en traduction allemande dans le deuxième fascicule du premier tome du Journal de *Crelle.* La publication eut lieu à ce qu'il paraît en juin 1826.

La formule développé dans le mémoire X est un cas spécial d'une formule donnée antérieurement par *Cauchy* dans ses Exercices de Mathématiques, II[ème] livraison, page 53 équation (36).

Lie.

Le mémoire XI rédigé en français fut publié en traduction allemande dans le Journal de *Crelle* tome I, fascicule 2. La publication eut lieu à ce qu'il paraît en juin 1826.

Page 133, lignes 7—9. Voici le texte du Journal de *Crelle:*

$$\mu_{m+n} = a^{\pm 1} \mu_{n-1}.$$

Das Zeichen + muss genommen werden, wenn n gerade ist, und das Zeichen —, wenn n ungerade ist.

Page 141, ligne 6—7 en remontant. Voici le texte du journal de *Crelle:* *Wenn man Zähler und Nenner des Differentials mit x multiplicirt.*

Lie.

Mémoire XII. Dans le Recueil des Savants Étrangers le mémoire est suivi d'une note de *Libri* que nous reproduisons:

"L'Académie m'ayant fait l'honneur de me charger de surveiller l'impression de ce "Mémoire, je me suis appliqué à corriger, autant que possible, les fautes d'impression. "Cependant, n'ayant pas le manuscrit sous les yeux au moment où je livrais les épreuves, "je ne saurais me flatter d'avoir toujours réussi. Il m'a semblé que dans certains endroits "(notamment dans les conséquences et les développements numériques tirés de l'inégalité "103), il y avait quelques inexactitudes de calcul: mais je ne me suis pas cru autorisé "à rien changer dans ce beau travail. J'ai donc obtenu de l'Académie la permission "d'insérer ici cette note, que je ne saurais terminer sans exprimer encore une fois mon "admiration pour l'illustre géomètre de Christiania, dont la science déplorera toujours la "fin prématurée".

Il nous a paru très désirable de pouvoir collationner le mémoire imprimé avec l'original, et M. *Lie* obtint en 1874 de l'Académie des Sciences de Paris la permission de consulter le manuscrit d'Abel; mais il fut constaté dans les archives de l'Académie, que le manuscrit ne s'y est pas trouvé après l'impression du mémoire. Quant à la remarque de *Libri,* nous renvoyons aux notes suivantes.

Pages 153, 154. Les formules (23) doivent être interprétées de la manière suivante: Les lettres $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_\alpha$ désignent les valeurs de x qui annulent l'une ou l'autre des fonctions $F_0 x, f_2 x$; les exposans $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_\alpha, m_1, m_2, \ldots m_\alpha$ sont donc nuls ou positifs; ensuite $k_1, k_2, \ldots k_\alpha$ désignent aussi des nombres nuls ou positifs, mais on suppose que $k_1 \leqq \mu_1 + m_1$, $k_2 \leqq \mu_2 + m_2$, $\ldots k_\alpha \leqq \mu_\alpha + m_\alpha$. En posant



$$\frac{Rx}{f_2x \cdot F_0x} = \frac{R_1x}{\theta_1x}$$

on a donc opéré une réduction quelconque de la première fraction, sans toutefois supposer que la seconde soit irréductible. Ce dernier point résulte de la remarque faite p. 160: "on peut faire la même supposition dans tous les cas".

Pages 156—159. La détermination des coefficiens $A_1\, A_2 \ldots A_\nu$ souffre d'une incorrection qui influe sur une grande partie des formules suivantes. En effet, on trouve

$$A_\nu = \left[\frac{(x-\beta)^\nu R_3x}{\theta_1x}\right]_{(x=\beta)}; \quad A_{\nu-1} = \left[\frac{d}{dx}\frac{(x-\beta)^\nu \cdot R_3x}{\theta_1x}\right]_{(x=\beta)};$$

$$\ldots A_1 = \frac{1}{\Gamma\nu}\left[\frac{d^{\nu-1}}{dx^{\nu-1}}\frac{(x-\beta)^\nu R_3x}{\theta_1x}\right]_{(x=\beta)}.$$

tandis qu'Abel écrit

$$A_\nu = \frac{\Gamma(\nu+1)R_3\beta}{\theta_1^\nu\beta} = p; \quad A_{\nu-1} = \frac{dp}{d\beta}; \quad A_{\nu-2} = \frac{d^2p}{\Gamma3 \cdot d\beta^2}; \quad \ldots A_1 = \frac{d^{\nu-1}p}{\Gamma\nu \cdot d\beta^{\nu-1}}.$$

Il y a deux manières d'interpréter ces formules. D'abord on peut regarder β comme un symbole qui désigne successivement chacune des quantités $\beta_1\, \beta_2 \ldots \beta_\alpha$; c'est ce qui est le plus naturel, mais dans ce cas la différentiation par rapport à x ne peut être remplacée par une différentiation par rapport à β, à moins qu'on n'ait le soin de regarder les coefficiens de la fonction R_3x comme constans lors même qu'ils contiennent les quantités $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_\alpha$. Si au contraire on regarde β comme une quantité entièrement indéterminée, qu'on n'égale aux constantes $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_\alpha$ qu'après la différentiation, cet inconvénient est écarté, mais alors il faudra remplacer $\theta_1^{(\nu)}x$ par $\Gamma(\nu+1)\frac{\theta_1x}{(x-\beta)^\nu}$, c'est-à-dire qu'on fera

$$\text{pour } \beta = \beta_1, \quad \theta_1^{(\nu)}x = \Gamma(\nu_1+1)(x-\beta_2)^{\nu_2}(x-\beta_3)^{\nu_3}\ldots(x-\beta_\alpha)^{\nu_\alpha},$$

$$\text{pour } \beta = \beta_2, \quad \theta_1^\nu(x) = \Gamma(\nu_2+1)(x-\beta_1)^{\nu_1}(x-\beta_3)^{\nu_3}\ldots(x-\beta_\alpha)^{\nu_\alpha}$$

etc.

Il est à peine nécessaire d'ajouter qu'avec la première interprétation les formules finales seront correctes, si les fonctions $f_1(x, y)$ et θy sont indépendantes des quantités $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_\alpha$.

Il paraît qu'Abel a mêlé les deux manières de voir, car dans la formule (34) il remplace la lettre β par x, et dans la suite du mémoire il emploie tour à tour x et β.

Pour écrire les formules d'une manière correcte, le plus commode serait peut-être de représenter la fonction $\frac{\theta_1x}{(x-\beta)^\nu}$ par une nouvelle lettre, par exemple en posant

$$\vartheta_ix = (x-\beta_1)^{\nu_1}(x-\beta_2)^{\nu_2}\ldots(x-\beta_{i-1})^{\nu_{i-1}}(x-\beta_{i+1})^{\nu_{i+1}}\ldots(x-\beta_\alpha)^{\nu_\alpha};$$

on aura alors, en regardant β comme une indéterminée, qu'on remplace après la différentiation par $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_\alpha$,

$$\Sigma \frac{R_3 x}{\theta_1 x \,.\, F' x} = \Sigma' \frac{1}{\Gamma \nu} \frac{d^{\nu-1}}{d\beta^{\nu-1}} \left(\frac{R_3 \beta}{\vartheta \beta} \Sigma \frac{1}{(x-\beta) F x} \right).$$

Par là on aura, au lieu des formules (33) et (34), les suivantes:

$$dv = -\Pi \frac{R_1 x}{\theta_1 x \,.\, F x} + \Sigma' \frac{1}{\Gamma \nu} \frac{d^{\nu-1}}{d\beta^{\nu-1}} \left(\frac{R_1 \beta}{\vartheta \beta \,.\, F \beta} \right).$$

ou bien

$$dv = -\Pi \frac{R_1 x}{\theta_1 x \,.\, F x} + \Sigma' \frac{1}{\Gamma \nu} \frac{d^{\nu-1}}{dx^{\nu-1}} \left(\frac{R_1 x}{\vartheta x \,.\, F x} \right).$$

$$(x = \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_\alpha).$$

Au lieu des équations (38) et (39) on aura donc

$$\Sigma \frac{f_1(x, y)}{f_2 x \,.\, \chi' y} \log \theta y = \varphi x,$$

$$\frac{F_2 x}{\vartheta x} \Sigma \frac{f_1(x, y)}{\chi' y} \log \theta y = \varphi_1 x,$$

$$v = C - \Pi \varphi x + \Sigma' \frac{1}{\Gamma \nu} \frac{d^{\nu-1} \varphi_1 x}{dx^{\nu-1}}.$$

Il nous paraît superflu de répéter ces remarques pour les formules plus spéciales qui se trouvent en grand nombre dans la suite du mémoire.

Page 161, lignes 13—16. Le texte du Recueil des Savants Étrangers est:

"*Or, en observant que ces quantités* $a, a', a'', \ldots$ *sont toutes arbitraires, il est clair* "*que la fonction* $\Sigma \frac{f_1(x, y)}{\chi'(y)} \log \theta y$ *développée suivant les puissances descendantes de* x, *on aura* "*la formule suivante:*

$$R \log x = \left\{ \begin{array}{l} A_0 x^{\mu_0} + A_1 x^{\mu_0 - 1} + \cdots \\ + A_{\mu_0} + \frac{A_{\mu_0+1}}{x} + \frac{A_{\mu_0+2}}{x^2} + \cdots. \end{array} \right.$$

C'est évidemment une faute d'écriture, ou d'Abel ou de *Libri*.

Page 162, lignes 1—6 en remontant. On peut justifier cette assertion par le raisonnement suivant, qui coïncide avec celui dont M. *Elliot* a fait usage dans son mémoire sur les intégrales abéliennes (Annales scientifiques de l'École Normale supérieure, année 1876, p. 404—406):

Si les inégalités (52) n'avaient pas lieu, il faudrait que, dans le développement de $f_1(x, y)$ suivant les puissances descendantes de x, les termes les plus élevés se détruisissent. Soit $f_1(x, y) = \Sigma A x^r y^\varrho$, et considérons les termes $A x^r y^\varrho$ et les valeurs de y pour lesquelles la différence

$$h(A x^r y^\varrho) - (h \chi' y - 1)$$

est maximum. Adoptons les notations employées par Abel aux paragraphes 5 et 7, seulement en désignant par y_i une quelconque des valeurs

$$y^{(k^{(i-1)}+1)}, \; y^{(k^{(i-1)}+2)}, \; \ldots \, y^{(k)^{(i)}},$$

et soient

$$(a) \qquad A x^{r} y_i^{\varrho} + A_1 x^{r_1} y_i^{\varrho_1} + \cdots + A_\nu x^{r_\nu} y_i^{\varrho_\nu}$$

les termes en question, ordonnés suivant les puissances descendantes de y_i. Cela posé, il faudrait en premier lieu que la valeur de

$$h(x^{r_j} y_i^{\varrho_j}) - (h\chi' y_i - 1)$$

n'augmentât pas en remplaçant y_i par y_{i-1} ou par y_{i+1}. Or, puisque

$$h\chi' y_i - h\chi' y_{i+1} = (n - k_i - 1)(\sigma_i - \sigma_{i+1}),$$

$$h\chi' y_{i-1} - h\chi' y_i = (n - k_{i-1} - 1)(\sigma_{i-1} - \sigma_i),$$

cela donne pour ϱ_j les limites suivantes:

$$\varrho_j \geqq n - k_i - 1,$$

$$\varrho_j \leqq n - k_{i-1} - 1,$$

donc on aurait

$$\varrho - \varrho_\nu \leqq k_i - k_{i-1} = n_i \mu_i.$$

En second lieu il faudrait que le polynôme (a) s'annulât en faisant $y_i = a_i x^{\sigma_i}$. On aurait donc d'abord

$$r_1 = r + p_1 m_i, \quad r_2 = r + p_2 m_i, \quad \ldots r_\nu = r + p_\nu m_i,$$

$$\varrho_1 = \varrho - p_1 \mu_i, \quad \varrho_2 = \varrho - p_2 \mu_i, \quad \ldots \varrho_\nu = \varrho - p_\nu \mu_i,$$

$p_1, p_2, \ldots p_\nu$ étant des nombres entiers et positifs, et puis

$$A a_i^{p_\nu \mu_i} + A_1 a_i^{(p_\nu - p_1)\mu_i} + \cdots + A_\nu = 0.$$

Cette équation devrait être satisfaite par les $n_i \mu_i$ valeurs de a_i, qui par hypothèse sont toutes distinctes, de sorte que p_ν serait au moins égal à n_i, c'est-à-dire qu'on aurait

$$\varrho - \varrho_\nu \geqq n_i \mu_i.$$

Il faudrait donc que

$$\varrho = n - k_{i-1} - 1,$$

$$\varrho_\nu = n - k_i - 1.$$

On en tire

$$h(x^{r_\nu} y_i^{\varrho_\nu}) - (h\chi' y_i - 1) = h(x^{r_\nu} y_{i+1}^{\varrho_\nu}) - (h\chi' y_{i+1} - 1).$$

La fonction $f_1(x, y)$ contiendrait donc aussi les n_{i+1} termes:

$$A_\nu x^{r_\nu} y^{\varrho_\nu} + B_1 x^{r_1'} y^{\varrho_1'} + \cdots + B_{\nu'} x^{r'_{\nu'}} y^{\varrho'_{\nu'}},$$

qui se détruisent en faisant $y_{i+1} = a_{i+1} x^{\sigma_{i+1}}$, et où $\varrho'_{\nu'} = n - k_{i+1} - 1$. En continuant ce raisonnement on parviendrait à un dernier groupe de termes:

$$C x^{r''} y^{\varrho''} + \cdots + C_{\nu''} x^{r''_{\nu''}} y^{\varrho''_{\nu''}},$$

qui devraient se détruire dans la supposition de $y = a_\varepsilon x^{\sigma_\varepsilon}$, et où l'on aurait

$$\varrho'' \leqq n - k_{\varepsilon-1} - 1 = n_\varepsilon \mu_\varepsilon - 1.$$

On aurait donc une équation en a_ε du degré $n_\varepsilon \mu_\varepsilon - 1$, qui serait satisfaite par les $n_\varepsilon \mu_\varepsilon$ valeurs différentes de a_ε, ce qui est absurde.

Pages 166, 167. En cherchant le nombre β', Abel ne parle pas des cas où $\frac{\mu'}{m'}+1$ est égal ou supérieur à $n'\mu'$. Mais si l'on examine ces cas, on verra que la valeur trouvée de β' est correcte toutes les fois que la fonction cherchée $f_1(x, y)$ existe réellement. Si elle n'existe pas, l'équation $\chi y=0$ est, ou linéaire en x, ou de la forme

$$y^2+(Ax+B)y+Cx^2+Dx+E=0.$$

Page 169, lignes 9, 10 en remontant: "*Alors la formule dont il s'agit cesse d'avoir lieu*". Abel a voulu dire que si l'équation $r=0$ a des racines constantes, l'équation (43), dont il est parti, cesse d'avoir lieu, et doit être remplacée par la formule (40); il se propose de démontrer que la formule (59) a toujours lieu, pourvu seulement que la fonction $\frac{f_1(x, y)}{\chi' y}$ reste finie pour $x=\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_\alpha$.

Page 173, ligne 16. En écrivant l'équation

$$h(q_m y^m)=hq_m+mhy$$

Abel suppose que la fonction q_m ne soit pas nulle; le cas où l'on voudrait omettre quelques-unes des puissances de y n'est donc pas traité.

Page 179, lignes 2—4. On lit dans les Mémoires présentés par divers Savants: "*c'est-à-dire entre* $n-1-k^{(m)}$ *et* $n-1-k^{(m+1)}$; *il est clair que le second membre de cette équation sera toujours positif si* $m\geq\delta+1$, *et toujours négatif si* $m\leqq\delta-1$".

Ce sont évidemment des fautes d'impression ou d'écriture

Page 179, inégalités (103). *Libri* a remarqué qu'il y a quelques inexactitudes dans les conséquences tirées des inégalités (103). En effet, il ne suffit pas que le nombre θ_δ y satisfasse; il faut en outre que la quantité

$$(\varrho_\delta-\varrho_{\delta+1})[\theta_\delta\sigma_\delta+(1-\theta_\delta)\sigma_{\delta+1}]$$

soit un nombre entier, condition qu'il n'est pas toujours possible de remplir pour des valeurs données de ϱ_δ et $\varrho_{\delta+1}$. Mais on voit aisément qu'en prenant pour ϱ_m les valeurs les plus grandes possibles, savoir $\varrho_m=n-1-k^{(m-1)}$, on peut faire $\theta_\delta=1$; de même, si l'on prend $\varrho_m=n-k^{(m)}$, on peut faire $\theta_\delta=0$.

Remarques sur les nombres γ et $\mu-\alpha$.

En déterminant au cinquième paragraphe le nombre γ, Abel n'a eu qu'à calculer le nombre des intégrales de la forme $\int\frac{f_1(x, y)\,dx}{\chi' y}$, indépendantes les unes des autres, qui conservent des valeurs finies pour une valeur infinie de x. Donc, si la courbe représentée par l'équation $\chi y=0$ n'a pas de point multiple dans le fini, si les points multiples situés à l'infini sont compatibles avec les équations (50), c'est-à-dire si la courbe a seulement deux points multiples situés à l'infini sur les axes des coordonnées, si de plus les développemens des diverses valeurs de y suivant les puissances descendantes de x se distinguent par leurs premiers termes, le nombre γ est celui que *Riemann* a depuis désigné par p (Journal f. d. reine u. angew. Math. t. 54).

Au septième paragraphe au contraire, où il cherche la valeur du nombre $\mu - \alpha$, Abel a dû avoir égard aux singularités que puisse présenter la courbe pour des valeurs finies de x. Il suppose en effet que le nombre des équations de condition à satisfaire pour que la fonction entière r soit divisible par le polynôme indépendant des paramètres $F_0 x$, soit égal à $h F_0 x - A$. Dans le calcul de $\mu - \alpha$ il ne fait plus expressément les mêmes suppositions sur les développemens des valeurs de y; mais ayant trouvé d'abord $\mu - \alpha = \gamma - A$ (104), il ajoute que dans certains cas spéciaux on peut réduire le degré de la fonction r de A' unités, en établissant entre les paramètres un nombre $A' - B$ d'équations de condition, et que dans ces cas la valeur minimum de $\mu - \alpha$ sera $\gamma - A - B$. Cela arrive évidemment quand deux ou plusieurs valeurs de y, développées suivant les puissances descendantes de x, commencent par un même terme. On peut donc dire que dans l'équation (107)

$$\mu - \alpha = \gamma - A - B,$$

la lettre A désigne la réduction que subit la valeur minimum de $\mu - \alpha$ par la présence de singularités situées dans le fini, tandis que $-B$ désigne la correction qu'il faut ajouter à la valeur trouvée de γ (62), dans le cas où deux ou plusieurs valeurs de y ne se distinguent pas par les premiers termes de leurs développement suivant les puissances descendantes de x.

En somme Abel a complètement déterminé la valeur minimum qu'on peut ordinairement donner au nombre $\mu - \alpha$ pour une équation fondamentale $\chi y = 0$ d'un degré donné, dont les coefficiens sont des polynômes entiers de x de degrés donnés; il a indiqué seulement la réduction qu'elle peut subir pour des valeurs spéciales des coefficiens de ces polynômes.

Mais la portée de la formule (62) est beaucoup plus grande: elle suffit pour trouver la valeur du nombre A dans un cas très étendu. En effet, si l'on suppose qu'il n'y ait pas de points multiples situés à l'infini sur l'axe des y, l'ordre de la courbe sera n ou $n+1$. Admettons qu'il soit n (l'autre cas donnera le même resultat par un raisonnement semblable), et que par suite $m^{(i)} \leqq \mu^{(i)}$, et faisons, pour avoir la valeur de γ dans le cas où il n'y a aucune singularité, $\varepsilon = 1$, $m' = \mu' = 1$, $n' = n$, nous aurons

$$\gamma = \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

On aura évidemment la même valeur, si l'on fait $m^{(i)} = \mu^{(i)} = 1$, et qu'on remplace ensuite $n^{(i)}$ par $n^{(i)}\mu^{(i)}$, donc

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2} = n'\mu'\left\{\frac{n'\mu'-1}{2} + n''\mu'' + n'''\mu''' + \cdots + n^{(\varepsilon)}\mu^{(\varepsilon)}\right\} - n'\mu' + 1$$

$$+ n''\mu''\left\{\frac{n''\mu''-1}{2} + n'''\mu''' + \cdots + n^{(\varepsilon)}\mu^{(\varepsilon)}\right\} - n''\mu''$$

$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ n^{(\varepsilon)}\mu^{(\varepsilon)}\left\{\frac{n^{(\varepsilon)}\mu^{(\varepsilon)}-1}{2}\right\} - n^{(\varepsilon)}\mu^{(\varepsilon)},$$

ce qui est d'ailleurs facile à vérifier. Donc si l'on désigne par J la réduction du nombre $\mu - \alpha$ causée par un point multiple situé à l'infini sur l'axe des x, on a

$$\begin{aligned} J = n'(\mu' - m') & \left\{ \frac{n'\mu' - 1}{2} + n''\mu'' + n'''\mu''' + \cdots + n^{(\varepsilon)}\mu^{(\varepsilon)} \right\} - \frac{n'(\mu' - 1)}{2} \\ & + n''(\mu'' - m'') \left\{ \frac{n''\mu'' - 1}{2} + n'''\mu''' + \cdots + n^{(\varepsilon)}\mu^{(\varepsilon)} \right\} - \frac{n''(\mu'' - 1)}{2} \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & \qquad + n^{(\varepsilon)}(\mu^{(\varepsilon)} - m^{(\varepsilon)}) \frac{n^{(\varepsilon)}\mu^{(\varepsilon)} - 1}{2} - \frac{n^{(\varepsilon)}(\mu^{\varepsilon} - 1)}{2}. \end{aligned}$$

formule qui a lieu toutes les fois que les divers développemens de y se distinguent par leurs premiers termes. Si $m' = \mu' = 1$, les n' valeurs correspondantes de y n'appartiennent pas au point considéré, mais dans ce cas les termes contenant m', μ', n' disparaissent. On peut donc admettre que les nombres $m^{(i)}$, $\mu^{(i)}$, $n^{(i)}$ n'ont rapport qu'aux valeurs que prend y dans le voisinage du point singulier. On en déduit par une transformation la formule analogue pour un point singulier à l'origine des coordonnées:

$$(b) \qquad \begin{aligned} J = n'm' & \left\{ \frac{n'\mu' - 1}{2} + n''\mu'' + n'''\mu''' + \cdots + n^{(\varepsilon)}\mu^{(\varepsilon)} \right\} - \frac{n'(\mu' - 1)}{2} \\ & + n''m'' \left\{ \frac{n''\mu'' - 1}{2} + n'''\mu''' + \cdots + n^{(\varepsilon)}\mu^{(\varepsilon)} \right\} - \frac{n''(\mu'' - 1)}{2} \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & \qquad + n^{(\varepsilon)}m^{(\varepsilon)} \frac{n^{(\varepsilon)}\mu^{(\varepsilon)} - 1}{2} - \frac{n^{(\varepsilon)}(\mu^{(\varepsilon)} - 1)}{2}. \end{aligned}$$

Ici $\frac{m^{(i)}}{\mu^{(i)}}$ désigne l'exposant de x dans le premier terme du développement d'une valeur de y suivant les puissances ascendantes de x, et l'on a

$$0 < \frac{m'}{\mu'} < \frac{m''}{\mu''} < \frac{m'''}{\mu'''} < \cdots < \frac{m^{(\varepsilon)}}{\mu^{(\varepsilon)}}.$$

Page 183—185. Dans la détermination numérique de θ_1, θ_2, θ_3 il s'est glissé quelques fautes de calcul, indiquées dans la note de *Libri*. En redressant ces fautes, qui influent sur presque toutes les valeurs numériques du reste du paragraphe, il est devenu nécessaire de supprimer la phrase suivante: "*La fonction* q_0 *peut être de trois degrés différents* θ, $\theta + 1$, $\theta + 2$" qui se trouvait après les mots "*où* θ *est le degré de la fonction* q_{12}" au bas de la page 184. D'après le calcul d'Abel toutes les fonctions q seraient de degrés complètement déterminés, hormis seulement q_0.

Page 188, équation (122). Abel dit que les fonctions r_1, r_2, .. r_ε ne doivent pas avoir de facteurs égaux. Mais puisqu'il dit page 200 que la valeur trouvée (172) de $\mu - \alpha$ est la plus petite possible, il faut croire qu'il suppose encore la décomposition telle

qu'il n'y ait pas de facteur commun à deux de ces fonctions. Ce n'est que dans cette supposition que l'équation (172) donne réellement la valeur minimum de $\mu - \alpha$, comme il est aisé de voir par une discussion de la formule.

Page 191, équation (141) Pour utiliser la singularité que présente la fonction y pour les valeurs de x qui annulent le polynôme r_m, Abel veut rendre tous les termes de la fonction θy divisibles par une puissance de $r_m^{\frac{1}{n}}$. En désignant cette puissance par $r_m^{\theta_m + \frac{\alpha_m}{n}}$, il faut pour cela que q_π soit divisible par $r_m^{\theta_m - E\frac{\pi\mu_m - \alpha_m}{n}}$. L'exposant $\theta_m - E\frac{\pi\mu_m - \alpha_m}{n}$ devant être un nombre nul ou positif, il faut que

$$\theta_m \geqq E\frac{(n-1)\mu_m - \alpha_m}{n}.$$

C'est là seule condition à imposer au nombre θ_m; l'équation (141) n'est pas en vérité nécessaire, quoique Abel en ait fait usage à la page 197 (ligne 12). En effet, si en calculant α (pages 196, 197), on substitue pour $\delta_{m,0} + \delta_{m,1} + \cdots + \delta_{m,n-1}$ la valeur équivalente:

$$n\theta_m + \alpha_m - \frac{n-1}{2}\mu_m + \frac{n-k_m}{2}.$$

et qu'on élimine les quantités $\delta_{m,\varrho}$ [équation (168)] par l'équation (142), on trouve la formule (171) sans avoir recours à la relation

$$\theta_m = \frac{n-1}{2}\mu_m - \frac{n_m - 1}{2}k_m,$$

issue de (141).

Page 193 équations (153) et page 197 équation (170). En désignant par $\frac{\beta_m}{n}$ la plus petite des fractions $k_{m,\pi}$, l'équation (146) fait voir que θy est divisible par $r_m^{\theta_m + \frac{\alpha_m + \beta_m}{n}}$. Donc si l'on veut que $n\theta_m + \alpha_m$ soit l'exposant de la plus grande puissance de r_m qui divise le polynôme r, ce qui est exigé par les équations (153), il faut que β_m soit nul; en d'autres termes, il faut que α_m soit divisible par le plus grand facteur commun aux nombres μ_m et n.

Page 200, lignes 12—15. Abel dit que la valeur de $\mu - \alpha$, donnée par la formule (172), est la plus petite possible. On peut vérifier l'exactitude de cette assertion au moyen de la formule (*b*) page 300.

On a en effet le cas où le nombre B est nécessairement nul, et où la formule dont nous parlons est applicable. Pour avoir le nombre $\varDelta$ pour une valeur de x qui annule le facteur r_m, il faut faire $\varepsilon = 1$, $m' = \mu_m'$, $\mu' = n_m$, $n' = k_m$, d'où il résulte:

$$\varDelta = k_m \mu_m' \frac{k_m n_m - 1}{2} - \frac{k_m(n_m - 1)}{2} = \mu_m \frac{n-1}{2} - \frac{n-k_m}{2}.$$

En faisant la somme des nombres $\varDelta$ pour toutes les valeurs de x qui annulent la fonction y, on obtient

$$\Sigma \Delta = \frac{n-1}{2}(\mu_1 h r_1 + \mu_2 h r_2 + \cdots + \mu_\varrho h r_\varrho)$$
$$-\left(\frac{n-k_1}{2} h r_1 + \frac{n-k_2}{2} h r_2 + \cdots + \frac{n-k_\varepsilon}{2} h r_\varepsilon\right).$$

D'autre part on a par la formule (139)

$$\gamma = \frac{n-1}{2}(\mu_1 h r_1 + \mu_2 h r_2 + \cdots + \mu_\varepsilon h r_\varepsilon) - \frac{n+n'}{2} + 1.$$

Donc

$$\gamma - \Sigma \Delta = \mu - \alpha = \frac{n-k_1}{2} h r_1 + \frac{n-k_2}{2} h r_2 + \cdots + \frac{n-k_\varepsilon}{2} h r_\varepsilon - \frac{n+n'}{2} + 1,$$

ce qui est l'équation (172).

Page 201, ligne 11—20. Puisque $h\frac{fx \cdot \varphi x}{s_m(x)}$ est un nombre entier, il est évident que φx n'est pas généralement du degré zéro, mais cette circonstance n'infirme pas les conclusions suivantes.

Pages 203—208. Nous avons changé les α désignant dans les Mémoires présentés les coefficiens du polynôme $r_0 x$ en des a, pour les distinguer des α désignant les coefficiens de φx; en outre nous avons redressé quelques fautes insignifiantes d'écriture ou d'impression.

Sylow.

Le mémoire XIII, qui ne se trouve pas dans l'édition de *Holmboe*, fut publié en janvier 1827 dans les Annales de Mathématiques pures et appliquées de *Gergonne*, tome XVII.

Le mémoire XIV fut inséré dans la quatrième livraison du Journal de *Crelle*, laquelle parut au mois de février ou de mars 1827, comme nous l'apprend une lettre d'Abel à *Holmboe* (voyez t. II, p. 262). Il fut rédigé en français pendant l'hiver 1825—1826 et puis traduit en allemand par *Crelle*.

Page 223. La démonstration du théorème IV a été trouvée difficile à comprendre (Voyez Journal de mathématiques pures et appliquées publié par *Joseph Liouville*, année 1862, p. 253), mais elle nous semble tout à fait rigoureuse. En effet on peut prendre m assez grand pour que p soit numériquement moindre que $\frac{1}{3}\varepsilon$; cela fait, si l'on détermine β de sorte que la valeur absolue de $\varphi\alpha - \varphi(\alpha-\beta)$ soit moindre que $\frac{1}{3}\varepsilon$, celle de $f\alpha - f(\alpha-\beta)$, ou de

$$\varphi\alpha - \varphi(\alpha-\beta) + \psi(\alpha) - \psi(\alpha-\beta)$$

devient moindre que ε, ε désignant une quantité donnée, aussi petite qu'on voudra.

Il est même possible que la rédaction originale d'Abel (lignes 11—14 en remontant) ait été la suivante:

"*On pourra donc prendre m assez grand pour qu'on ait, pour toute valeur de α égale* "*ou inférieure à δ,*

$$\psi\alpha = \omega".$$

Page 224. La démonstration du théorème V a un point faible. En effet il ne suffit pas que $\psi x = \omega$, il faut encore qu'on ait $\psi(x-\beta) = \omega$; or il est possible que la valeur de m qui satisfait à cette condition soit dépendante de β, et qu'elle dépasse tout nombre donné à mesure que β converge vers zéro; si cela a lieu, on ne peut admettre la supposition de

$$\varphi x - \varphi(x-\beta) = \omega,$$

puisque la forme de la fonction φ dépend de β.

Toutefois le théorème subsiste pourvu que le terme général $v_m \delta^m$, pour toutes valeurs de x depuis $x - x'$ jusqu'à $x + x''$, reste moindre qu'une même quantité positive M, indépendante de m. Dans ce cas, en effet, les valeurs absolues de ψx et de $\psi(x-\beta)$ sont moindres que $M \dfrac{\left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^m}{1-\frac{\alpha}{\delta}}$; on peut donc prendre m assez grand pour qu'on ait

$$\psi x < \tfrac{1}{3}\varepsilon, \quad \psi(x-\beta) < \tfrac{1}{3}\varepsilon.$$

Maintenant m est un nombre déterminé, on peut donc prendre β assez petit pour que

$$\varphi(x) - \varphi(x-\beta) < \tfrac{1}{3}\varepsilon,$$

ce qui entraîne

$$f(x) - f(x-\beta) < \varepsilon.$$

Plus tard Abel a senti l'insuffisance de sa démonstration, car il y est revenu dans un de ses livres manuscrits, voyez t. II, p. 201. M. *Paul du Bois-Reymond* a généralisé le théorème, et l'a muni d'une démonstration rigoureuse (Mathematische Annalen t. IV, p. 135).

Page 225. Le théorème VI est dû à *Cauchy*, mais la forme nouvelle qu'il a reçue page 226 appartient à Abel.

Page 231, lignes 2 et 3: "*En effet, d'après le théorème V, p et q sont évidemment des fonctions continues*". Cette conclusion reste légitime malgré la restriction à laquelle il faut soumettre le théorème V. En effet, s'il s'agit de démontrer que p et q sont des fonctions continues de k et k' pour des valeurs données de ces variables et pour une valeur donnée de α, moindre que l'unité, prenons trois nombres positifs ϱ, r, s, tels qu'on ait, sans égard aux signes,

$$\alpha < \varrho < 1, \quad r > k, \quad s > k',$$

et remplaçons α, k, k' respectivement par ϱ, $-r$, s. En désignant par δ_μ', λ_μ' les valeurs de δ_μ, λ_μ ainsi obtenues, nous aurons

$$\delta_\mu' > \delta_\mu, \quad \text{et par suite} \quad \lambda_\mu' > \lambda_\mu.$$

Or, la série

$$1 + \varrho\lambda_1' + \varrho^2\lambda_2' + \varrho^3\lambda_3' + \cdots$$

étant convergente, il est possible de choisir un nombre M plus grand que tout terme de cette série: on a donc à plus forte raison

$$M > \lambda_\mu \varrho^\mu \cos\theta_\mu$$

pour toute valeur de μ, et pour toutes les valeurs de k et k', numériquement moindres que r et s; cela étant, le théorème est applicable. De la même manière on peut justifier l'emploi du théorème V p. 236, 237.

Page 233, ligne 13. Nous avons conservé la formule

$$\psi(k, k'+l') = 2m\pi + \psi(k, k') + \psi(0, l')$$

intercalée par *Holmboe.*

Page 239, lignes 6—8 en remontant. Le texte du Journal de *Crelle* est le suivant:

"*Zu dem Ende wollen wir drei Fälle unterscheiden: wenn* $k = -1$ *ist, oder zwischen* "-1 *und* $-\infty$ *liegt; wenn k zwischen* 0 *und* $+\infty$ *liegt, und wenn k zwischen* 0 *und* "-1 *eingeschlossen ist*".

Cette rédaction, qui laisse incertain auquel des cas il faut compter la valeur $k=0$, doit être attribuée à une inadvertance, ou d'Abel, ou peut-être de son traducteur. Nous avons cru devoir corriger le texte, mais par une faute d'impression, qui malheureusement est restée inaperçue pendant la correction des épreuves, les mots intercalés, "égal à zéro ou", ont été placés à tort. Lisez:

"*A cet effet il faut distinguer trois cas: lorsque k est égal à* -1, *ou compris entre* "-1 *et* $-\infty$; *lorsque k est compris entre* 0 *et* $+\infty$, *et lorsque k est égal à zéro ou com*-"*pris entre* 0 *et* -1".

Page 240 première ligne, les mots "*égal ou*" sont intercalés par nous.

Page 242, ligne 6 en remontant. Nous avons intercalé les mots: "*égale à zéro ou*". De même page 243 ligne 12, où nous avons en outre changé $\sin\frac{\varphi}{2}$ en $\cos\frac{\varphi}{2}$.

Page 245, ligne 9. Nous avons supprimé la parenthèse $(a=\cos\varphi,\ b=\sin\varphi)$ qui se trouve dans le Journal de *Crelle* après l'équation $\sqrt{a^2+b^2}=1$.

Page 247, lignes 10—13. C'est par inadvertance, sans doute, qu'Abel cite le théorème II pour prouver la convergence des séries (34). Vraisemblablement il s'est servi du théorème III; en effet, puisqu'on a

$$\cos m\varphi - \cos(m+1)\varphi + \cdots \pm \cos(m+n)\varphi = \frac{\cos(m-\frac{1}{2})\varphi \pm \cos(m+n+\frac{1}{2})\varphi}{2\cos\frac{1}{2}\varphi},$$

expression dont la valeur numérique ne peut surpasser celle de $\frac{1}{\cos\frac{1}{2}\varphi}$, on conclut d'après le théorème III que la valeur numérique des $n+1$ termes

$$\frac{1}{m}\cos m\varphi - \frac{1}{m+1}\cos(m+1)\varphi + \cdots \pm \frac{1}{m+n}\cos(m+n)\varphi$$

est moindre que celle de l'expression $\frac{1}{m\cos\frac{1}{2}\varphi}$. Donc la première série (34) est convergente, si l'on n'a pas $\varphi = (2\mu+1)\pi$.

Page 250, lignes 1, 2. Voici le texte du Journal de *Crelle:*

"*Diese Ausdrücke gelten für jeden Werth von x, wenn m positiv ist. Liegt m zwischen* "*— 1 und 0, so muss man* 1) *unter den Werthen von x in den Formeln* (1), (2), (5), (6), "*die Werthe* $x = 2\varrho\pi - \frac{\pi}{2}$ *und* $x = 2\varrho\pi + \frac{\pi}{2}$, 2) *in den Formeln* (3), (4), (7), (8), *die* "*Werthe* $x = 2\varrho\pi$ *und* $x = (2\varrho + 1)\pi$ *ausnehmen.*

"*In jedem anderen Falle sind die in Rede stehenden Reihen convergent*".

Sylow.

Le mémoire XV fut publié le 5 juillet 1827; vraisemblablement il fut écrit avant le retour d'Abel en Norvège, c'est-à-dire avant le mois de mai de la même année. Il était rédigé en français et fut traduit en allemand par *Crelle.*

Mémoire XVI. La première partie contenant les sept premiers paragraphes fut publié le 20 septembre 1827 dans le second cahier du second tome du Journal de *Crelle;* la seconde partie qu'Abel fit parvenir à *Crelle* sous la date du 12 février 1828, fut publié le 26 mai 1828.

Déjà en 1823, Abel avait considéré la fonction inverse des transcendantes elliptiques (voy. tom. II, p. 254). Dans une lettre datée Vienne, le 16 avril 1826, il dit: "*Quand je serai venu à Paris, ce qui aura lieu en juillet ou en août à peu près, je commencerai à travailler furieusement, à lire et à écrire. Alors je rédigerai mes Intégrales, ma Théorie des fonctions elliptiques etc.*" De ses lettres (T. II, p. 261, 262, 268), ainsi que des manuscrits qu'il a laissés (T. II, p. 285), on peut voir que pendant son séjour à Paris et à Berlin à la fin de 1826 et au commencement de 1827, il s'est occupé de la théorie des fonctions elliptiques. Comme on le voit, dans ses manuscrits il est question aussi de la théorie de la transformation. Comme Abel parle à plusieurs reprises, dans ses lettres de cette époque à *Holmboe* et à *Crelle*, de la division de la lemniscate, on peut regarder comme assuré qu'il ne l'a trouvée qu'à Paris. Abel lui-même a dit à *Holmboe* "que déjà lors de son séjour à Paris en 1826, il avait achevé le plus important de ce qu'il a exposé depuis sur ces fonctions etc." (Magasin des Sciences Naturelles, tome IX, Christiania 1828—1829). Dans la préface de son édition des Oeuvres d'Abel, publiée en 1839, *Holmboe* cite les paroles d'Abel un peu différemment: "Abel me dit que lors de son séjour à Paris en 1826 il avait déjà achevé la partie essentielle des principes qu'il avançait dans la suite sur ces fonctions etc." Probablement c'est la version la plus ancienne qui est la plus fidèle.

Page 265, ligne 3 en remontant. Plus bas (p. 314, ligne 11, 12 en remontant) Abel s'exprime d'une manière moins décisive sur le même sujet. Voyez au reste p. 527, ligne 4.

Page 294, ligne 9. Plus bas (voyez les formules 234, 236, 247, 254) Abel démontre que la fonction $\varphi_1\beta$ est elle-même une fonction elliptique de β et des nouveaux modules c_1, e_1. Le symbole φ_1 nous semble même choisi pour indiquer l'analogie qui existe entre les deux fonctions $\varphi\beta$ et $\varphi_1\beta$. Nous ne croyons donc pas qu'Abel ait passé par "le medium des transformations" sans le soupçonner (voyez Annales de l'École

Normale année 1869, p. 154, ou Journal für die reine und angewandte Mathematik, tome 80, p. 247, Correspondance mathématique entre *Legendre* et *Jacobi*).

Page 306. Entre les formules (92) et (93), les lettres m et μ sont confondues plusieurs fois dans le journal de *Crelle* et aussi dans l'édition de *Holmboe*.

Page 314, ligne 11 en remontant. Comme on le voit, Abel parle déjà dans la première partie de son mémoire de modules singuliers. Dans la seconde partie (§ X, p. 377) il s'occupe d'une classe étendue de tels modules, qu'il trouve par la théorie de la transformation.

Page 323 et suiv. La méthode dont se sert Abel pour déduire les expressions des fonctions $\varphi\alpha$, $f\alpha$ et $F\alpha$ en séries et en produits infinis ne nous semble pas satisfaisante dans tous ses détails.

Page 333, ligne 2. Nous avons intercalé le passage:
En vertu de l'équation (131) *le second membre prend la forme suivante*

$$\frac{(-1)^n}{2n+1} f\beta + \frac{(-1)^n}{2n+1} \sum_1^n {}_m (-1)^m \left[f\left(\beta + \frac{m\omega}{2n+1}\right) + f\left(\beta - \frac{m\omega}{2n+1}\right)\right]$$

$$+ \frac{(-1)^n}{2n+1} \sum_1^n {}_\mu \left[f\left(\beta + \frac{\mu\varpi i}{2n+1}\right) + f\left(\beta - \frac{\mu\varpi i}{2n+1}\right)\right]$$

$$+ \frac{(-1)^n}{2n+1} \sum_1^n {}_m \sum_1^n {}_\mu (-1)^m \left[f\left(\beta + \frac{m\omega + \mu\varpi i}{2n+1}\right) + f\left(\beta - \frac{m\omega + \mu\varpi i}{2n+1}\right)\right]$$

$$+ \frac{(-1)^n}{2n+1} \sum_1^n {}_m \sum_1^n {}_\mu (-1)^m \left[f\left(\beta + \frac{m\omega - \mu\varpi i}{2n+1}\right) + f\left(\beta - \frac{m\omega - \mu\varpi i}{2n+1}\right)\right].$$

Page 352, ligne 13 en remontant. Abel a en vue le mémoire XXV, où cependant l'application aux fonctions elliptiques ne fut pas faite.

Page 356, ligne 8 en remontant. Entre le morceau qui finit par: "*Donc etc.*" et le morceau suivant qui commence par: "*Toutes les racines*", nous avons supprimé avec *Holmboe* le passage suivant qui se trouve dans le journal de *Crelle*:

"*Cela posé: soit* ϱ *plus grand que* $\frac{\alpha^2+\beta^2-1}{4} - 1 \; (=\nu - 1)$ *et faisons*

$$\varrho = \nu + \theta\text{"}.$$

Page 366, ligne 8. Nous avons intercalé les mots: "*dans la formule* (235)".

Page 372, lignes 5—7. Ces deux phrases sont incorrectes ou du moins incorrectement formulées. Le degré de l'équation dont il s'agit peut être déduit de l'expression de l'ordre du groupe linéaire de substitutions à deux indices (voyez le Traité des Substitutions par M. *C. Jordan*, p. 95).

Page 373, ligne 1. *Holmboe* a intercalé les mots: "α_μ *entier*".

Page 379, ligne 7 en remontant. *Holmboe* a intercalé l'équation

$$a = \frac{\varphi^2\left(\frac{\omega}{3}\right)}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{6}\right)} \cdot \frac{1}{e},$$

que nous avons gardée.

Page 383, lignes 10—13 en remontant. Voyez page 426, ligne 8 et page 526, lignes 4—5 en remontant. *Lie.*

Le mémoire XVII, redigé en françtis, fut publié en traduction allemande le 12 janvier 1828 dans le journal de *Crelle*, tome II, fascicule 4.

Page 396, ligne 11. Pour démontrer d'une manière plus satisfaisante que la fonction f déterminée par l'équation (14) satisfait à l'équation de condition, introduisons dans l'équation identique $f\eta = f\eta$ la valeur $\eta = \frac{1}{\alpha'} f\eta \cdot \log \frac{f\eta}{\alpha}$ tirée de (14). Cela donne

$$f\eta = f\left(\frac{f\eta \cdot \log \frac{f\eta}{\alpha}}{\alpha'}\right).$$

Or cette équation doit subsister identiquement pour chaque valeur de la quantité $f\eta$, donc aussi en faisant

$$f\eta = \frac{fx \cdot fy}{\alpha},$$

ce qui donne

$$\frac{fx \cdot fy}{\alpha} = f\left(\frac{fx \cdot fy \cdot \log \frac{fx \cdot fy}{\alpha^2}}{\alpha\alpha'}\right)$$

c'est-à-dire l'équation de condition cherchée. *Lie.*

Le mémoire XVIII fut publié le 25 mars 1828 dans le journal de *Crelle*, tome III, fascicule 1.

Le mémoire XIX fut publié au mois de juin 1828.

Page 404, lignes 2—5. Pour la réduction des transformations algébriques aux transformations rationnelles voyez Précis d'une théorie des fonctions elliptiques chap. II (t. I, pages 545—557).

Page 417. Nous avons ajouté aux seconds membres des formules (47) le facteur $(-1)^n$, parce que $\frac{1}{e_1}$ et $\frac{1}{c_1}$ sont définis comme les valeurs de y pour $\theta = \frac{\omega}{2}$ et $\frac{\omega'}{2}$.

Pages 420, 421. Dans la formule (56) nous avons rétabli le facteur $-\frac{1}{\varphi\delta}$, omis par Abel; par conséquent la valeur de $1 - c_1^2 y^2$ et les seconds membres des équations (59), (60), (61) diffèrent des expressions correspondantes des Astr. Nachr. par des facteurs constans.

Page 421. On ne peut supposer que $1 - e_1^2 y^2$ s'annule pour $x = \lambda \frac{\omega - \beta}{2}$ que dans le cas où le degré de la transformation est un nombre impairement pair. Si par exemple $\lambda\left(\theta + \frac{\beta}{2}\right)$ ou $\lambda\left(\theta + \omega + \frac{\beta}{2}\right)$ est une des racines, on aura $\varphi \frac{\omega - \beta}{2} = \pm \varphi \frac{\omega}{2}$.

de sorte qu'on aura $1 - c_1^2 y^2 = 0$ pour $x = \lambda \frac{\omega - \beta}{2}$. Pour avoir des formules générales on supposera que $\lambda(\theta + \beta)$ fasse partie d'un cycle de racines d'ordre 2^ν, mais qu'il ne soit contenu dans aucun cycle d'ordre $2^{\nu+1}$. Les racines seront représentées par les expressions

$$\lambda(\theta + p\varepsilon),\ \lambda(\theta + p\varepsilon + \alpha_q),\ \lambda(\theta + p\varepsilon - \alpha_q),$$

où

$$\left.\begin{array}{l} p = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots 2^\nu - 1 \\ q = \quad 1,\ 2,\ \ldots m \end{array}\right\},\quad \lambda(\theta + 2^\nu\varepsilon) = \lambda\theta.$$

Le degré de l'équation $p - qy = 0$ sera par conséquent $2^\nu(2m+1)$. Cela posé $1 - \frac{\varphi^2\theta}{\varphi^2\left(\frac{\omega - \varepsilon}{2}\right)}$ sera un carré parfait; on peut donc supposer que $1 - e_1^2 y^2$ s'annule pour $\theta = \frac{\omega - \varepsilon}{2}$. Les équations (62) subsisteront avec la seule modification qu'on aura

$$e_1 = k \cdot \varphi \frac{\omega - \varepsilon}{2}.$$

On aura de plus $\varphi\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) = 0$, ce qui permet de décomposer le numérateur de la fonction $\varphi\theta$ en facteurs linéaires, en se servant de la formule (56).

Page 422, lignes 3—6. Voici le texte des Astr. Nachr.:

$$\varphi\theta = \lambda\theta + \lambda(\theta + \omega) + \lambda(\theta + \alpha_1) + \lambda(\theta - \alpha_1) + \cdots + \lambda(\theta + \alpha_n) + \lambda(\theta - \alpha_n)$$

"où cette quantité se réduit à zéro pour une valeur quelconque de θ d'où l'on pourra se convaincre aisément que $\varphi\theta$ doit rester le même en changeant $\theta + \omega$ en θ c'est-à-dire $+\theta$ en "$-\theta$".

La formule (65) fut plus tard démontrée par Abel au moyen du développement de la fonction λ en produit (t. I, p. 434—436).

Page 423. Dans le livre manuscrit C Abel démontre la formule (67) en décomposant le second membre de l'équation

$$\frac{d\psi}{d\varphi} = a \frac{\sqrt{1 - e_1^2 \sin^2\psi}}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2\varphi}},$$

qui est une fonction rationnelle de $\sin^2\varphi$, en fractions partielles et intégrant par rapport à φ.

Page 425. a) Pour la décomposition des transformations on peut voir Précis d'une théorie des fonctions elliptiques, chap. IV, § 7 (t. I, p. 589—593).

b) La résolubilité de l'équation $p - qy = 0$ est démontrée dans le Précis d'une théorie des fonctions elliptiques, chap. IV, § 12 (t. I, p. 604—606).

Pour démontrer la proposition indiquée par les formules (70), (71) on peut établir les deux lemmes suivans: 1) Quelle que soit la transformation dont il s'agit, il est toujours possible de choisir les quantités $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\nu$ telles que dans les formules (68) les nombres $m_1, m_2, \ldots m_{\nu-1}$ deviennent égaux à zéro. 2) Toute fonction rationnelle des quantités $\lambda(\theta + k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_\nu\alpha_\nu)$ qui ne varie pas, quand on

remplaçe θ par $\theta+\alpha_1$, par $\theta+\alpha_2$, ... et par $\theta+\alpha_\nu$, s'exprime sous la forme $p+q\sqrt{(1-c_1^2y^2)(1-e_1^2y^2)}$, p et q étant deux fonctions rationnelles de y (voyez t. I, p. 508, t. II, p. 244). Cela posé, on achèvera la démonstration par un procédé analogue à celui qui est exposé t. I, p. 496, 497. C'est par inadvertance évidemment qu'Abel dit que les exposans $n_1; n_2, \ldots n_\nu$ sont des nombres premiers entre eux; l'équation de division de l'intégrale elliptique donne l'exemple du contraire.

Pages 425, 426. Le théorème contenu dans l'article c) peut être démontré par les équations (13) t. I, p. 432, en supposant $c_1=e$.

Plus tard Abel s'exprima d'une manière moins décisive sur la possibilité d'exprimer les modules en question par radicaux. Voyez t. I, p. 526.

Sylow.

Le mémoire XX fut publié dans les Astronomische Nachrichten au mois de novembre 1828 sous le titre "*Addition au mémoire sur les fonctions elliptiques, inséré dans le Nr. 138 de ce journal*".

Le mémoire XXI fut publié le 3 décembre 1828 dans le journal de *Crelle*, tome III, fascicule 4.

Page 451, ligne 6 en remontant. Nous avons intercalé les mots "*diminué de deux unités*".

Lie.

Le mémoire XXII fut publié dans le Journal de *Crelle* le 3 décembre 1828. Le titre y semble altéré par une correction de *Crelle;* le voici:

"*Sur le nombre des transformations différentes qu'on peut faire subir à une fonction "elliptique par la substitution d'une fonction donnée du premier degré*".

Nous avons conservé celui de l'édition de *Holmboe.*

Page 461. Les équations (11) se déduisent de la formule (28) du mémoire XIX (t. I, p. 413), en remarquant qu'on a

$$\frac{p}{v}=\frac{(-1)^n}{\delta}, \quad \text{pour} \quad x=\lambda\theta=\frac{1}{\sqrt{c}};$$

$$\frac{p}{r}=\frac{1}{\delta\sqrt{-1}}, \quad \text{pour} \quad x=\lambda\theta=\frac{1}{\sqrt{c}\sqrt{-1}};$$

seulement on aura dans le premier membre de la première des équations (11) $r-(-1)^n\delta p$ au lieu de $r-\delta p$.

Page 465. L'équation (19) est en défaut pour la première valeur de δ, comme l'a remarqué *Holmboe*. En effet on trouve, pour $\alpha=\frac{\omega}{2n+1}$

$$\delta=(2n+1)\frac{\pi}{\omega}\cdot 2\sqrt[4]{q^{2n+1}}\,\Pi_m{}_1^\infty\left(\frac{1-q^{2m(2n+1)}}{1-q^{(2m-1)(2n+1)}}\right)^2,$$

et pour $\alpha=\frac{\varpi i+2\mu\omega}{2n+1}$

$$\delta \doteq (-1)^n \frac{\pi}{\omega}\, 2 \sqrt[4]{q^{\frac{1}{2n+1}} \cdot \delta_1^{\mu}}\, \prod_1^{\infty}{}_m \left\{ \frac{1-\left(q^{\frac{1}{2n+1}} \cdot \delta_1^{\mu}\right)^{2m}}{1-\left(q^{\frac{1}{2n+1}} \cdot \delta_1^{\mu}\right)^{2m-1}} \right\}^2 .$$

Sylow.

Le mémoire XXIII fut publié le 3 décembre 1828 dans le journal de *Crelle*, tome III, fascicule 4.

Le mémoire XXIV fut publié le 25 janvier 1829. Dans plusieurs endroits nous avons rétabli le texte primitif d'après la copie de *Crelle*.

Le mémoire XXV, daté le 29 mars 1828, ne parut que le 28 mars 1829. Autant que nous savons, Abel s'occupa pour la première fois de cette théorie à Paris dans les derniers mois de l'an 1826. Dans le livre A, qui date de cette année, on trouve quelques pages de notices qui contiennent tout ce qui est exposé dans la première partie du mémoire jusqu'à l'équation (35).

En 1827 (livre B) il voulait rédiger ce qu'il avait trouvé, mais il ne possédait pas encore toute la théorie. On lit en effet dans une ébauche de l'introduction du mémoire une proposition erronée que voici:

"*Si toutes les racines d'une équation d'un degré quelconque sont liées entre elles de la "manière qu'on puisse exprimer toutes les racines rationnellement en l'une d'elles, cette équation "est nécessairement résoluble algébriquement*".

Mais il ne tarda pas à découvrir l'erreur commise, car immédiatement après il recommence, et cette fois il fait une rédaction complète de sa théorie, qui jusqu'au théorème IV ne diffère que peu de la rédaction finale, excepté seulement l'introduction. Le reste est moins achevé, quoique les résultats sont les mêmes.

Dans le livre C on trouve un brouillon de l'introduction du mémoire, et immédiatement après une sorte de table des matières. Il n'y a aucun doute que cette dernière n'ait été écrite après la rédaction finale du mémoire, puisqu'on y trouve les théorèmes et même des formules avec leurs numéros définitifs. Elle embrasse, outre ce qui fut imprimé dans le journal de *Crelle*, encore un sixième et une partie au moins d'un septième paragraphe, qui y sont mentionnés dans les termes suivans:

"§ 6. *Fonctions elliptiques:* $\omega = \tilde{\omega}\sqrt{2n+1} = a\,\tilde{\omega}$*). (107) *Si* $\frac{m^2+2n+1}{2\mu+1}$ *est un "nombre entier, on trouve* $\varphi^2\left(m - a i\right)\frac{\omega}{2\mu+1}$ *etc. à l'aide d'une équation du degré* μ, "$(r=0)$ (116)."

"§ 7. *Formules pour la transformation des fonctions ellipt.:*
(134 *générale*)

(142) $$F(\theta', e_1) = a\,F(\theta, e)$$

*) Dans l'original on lit $a\sqrt{2n+1}$; c'est évidemment une faute d'écriture.

$$(144)\quad \begin{cases} \text{où } e_1 = e^m . (\sin\theta_1 . \sin\theta_3 \ldots \sin\theta_{2m-1})^2 \\ a = \dfrac{\sin\theta_2 \ldots \sin\theta_{2m-2}}{\sin\theta_1 \ldots \sin\theta_{2m-1}} \end{cases}$$

$$(145)\quad \psi = \theta + \text{arc tang}(\text{tang}\,\theta . A_1) + \cdots + \text{arc tang}(\text{tang}\,\theta . A_{m-1})$$

$$(146)\quad A_\mu = \sqrt{1 - e^2 \sin^2\theta_{2\mu}} . \quad F(\theta_\mu, e) = \frac{\mu}{m} F\left(\frac{\pi}{2}, e\right)$$

$$(151)\quad F(\psi', e_1') = a F(\theta', c); \quad c_1 = \sqrt{1 - e_1^2}; \quad c = \sqrt{1 - e^2}$$

$$\text{tang}(45^0 - \tfrac{1}{2}\psi') = \text{tang}(45^0 - \tfrac{1}{2}\theta') \frac{1 - A_1 \sin\theta'}{1 + A_1 \sin\theta'} \cdots \frac{1 - A_{m-1} \sin\theta'}{1 + A_{m-1} \sin\theta'} .$$

Dans le sixième paragraphe Abel voulait donc traiter le problème de la division des périodes des fonctions elliptiques dans le cas où l'on a $\omega = \bar{\omega}\sqrt{2n+1}$. Les formules du dixième paragraphe des Recherches sur les fonctions elliptiques lui en donnait le moyen. Notamment on en déduit sans difficulté l'existence et la résolubilité de l'équation $v = 0$. En effet, supposant que le nombre m soit pair, ce qui est permis, on trouve pour $\varphi(m + ai)\theta$ une expression de la forme $\varphi\theta . \frac{P}{Q}$, P et Q étant deux fonctions entières de $\varphi^2\theta$, dont les coefficiens sont rationnels en e, et qu'on peut supposer sans facteurs communs; pour $\varphi(2\mu + 1)\theta$ on a une expression analogue: $\varphi(2\mu + 1)\theta = \varphi\theta . \frac{P'}{Q'}$. Or si l'on fait $\varphi^2\theta = x$, et qu'on désigne par v le plus grand facteur commun des polynômes P et P', il est facile de voir que les racines de l'équation $v = 0$ sont les μ quantités $\varphi^2 \frac{r(m - ai)\bar{\omega} i}{2\mu + 1}$, ou bien $\varphi^2 \frac{s(m - ai)\omega}{2\mu + 1}$, r et s ayant les valeurs $1, 2, 3, \ldots \mu$.

Les formules (142), (144), (145), (146) ont passé dans le mémoire "Solution d'un problème général etc.", qui fut écrit après celui dont nous nous occupons, quoique il fût imprimé le premier (voyez t. 1, p. 422, 423). Sans doute Abel comptait faire d'autres applications aux fonctions elliptiques, pour lesquelles les formules de transformation des "Recherches" ne lui auraient pas suffi. On ne peut faire que des conjectures sur l'objet de ces applications ultérieures.

Dans les passages où Abel cite les Disquisitiones Arithmeticæ de *Gauss*, nous avons remplacé les chiffres des pages par ceux des articles pour faciliter l'emploi des Oeuvres de *Gauss*.

Page 491. L'équation (42) devient illusoire si v_1 est nul. Mais puisque dans le calcul précédent on peut remplacer v_1 par v_i pourvu que i soit premier à μ, il est évident que, si μ est un nombre premier, le procédé indiqué conduit toujours à une expression de x qui n'a que μ valeurs différentes. Si au contraire μ est un nombre composé, la quantité v_i pourrait être nulle pour toutes les valeurs de i qui sont premières à μ. Pour avoir dans ce cas une expression qui a la propriété voulue, soient

$$x = \frac{1}{\mu}\left(-A + v_a^{\frac{1}{\mu}} + v_b^{\frac{1}{\mu}} + \cdots + v_k^{\frac{1}{\mu}}\right),$$

$$v_a^{\frac{1}{\mu}} = x + \alpha^a \theta x + \alpha^{2a} \theta^2 x + \cdots + \alpha^{(\mu-1)a} \theta^{\mu-1} x,$$

$$v_b^{\frac{1}{\mu}} = x + \alpha^b \theta x + \alpha^{2b} \theta^2 x + \cdots + \alpha^{(\mu-1)b} \theta^{\mu-1} x,$$

. . . .

$$\alpha = \cos \frac{2\pi}{\mu} + \sqrt{-1} \sin \frac{2\pi}{\mu} \cdot$$

En faisant de plus

$$V^{\frac{1}{\mu}} = v_a^{\frac{m}{\mu}} v_b^{\frac{n}{\mu}} \ldots v_k^{\frac{p}{\mu}},$$

il est facile de voir qu'on pourra choisir les nombres $m, n, \ldots p$ telles que les radicaux $v_a^{\frac{1}{\mu}}, v_b^{\frac{1}{\mu}}, \ldots v_k^{\frac{1}{\mu}}$ s'expriment comme il suit:

$$v_a^{\frac{1}{\mu}} = \frac{A}{V} V^{\frac{a_1}{\mu}}, \quad v_b^{\frac{1}{\mu}} = \frac{B}{V} V^{\frac{b_1}{\mu}}, \ldots v_k = \frac{K}{V} V^{\frac{k_1}{\mu}}.$$

Page 493. *Théorème* V. Dans le manuscrit dont nous avons parlé plus haut (livre B), Abel fait l'observation suivante:

"*Dans le cas où μ est un nombre impair on peut même se dispenser de l'extraction de* "*la racine carrée*".

On a en effet

$$\varrho = a,$$

$$v_1 = c + d\sqrt{-1} = (\sqrt{a})^{\mu} (\cos \delta + \sqrt{-1} \sin \delta),$$

donc

$$\sqrt{\varrho} = \frac{a^{\frac{\mu+1}{2}} \cos \delta}{c} = \frac{a^{\frac{\mu+1}{2}} \sin \delta}{d} \cdot$$

Dans la copie de *Crelle* cette remarque n'est faite que pour l'équation qui détermine la quantité $\cos \frac{2\pi}{2n+1}$.

Page 506 en haut Abel paraît répéter l'énoncé de *Gauss* sans se souvenir qu'il traite un problème un peu différent. Il vient en effet de prouver que pour déterminer les quantités $\cos \frac{2k\pi}{2n+1}$ il suffit

1) de diviser la circonférence entière du cercle en n parties égales,
2) de diviser l'arc δ en n parties égales,
3) d'extraire la racine carrée de la quantité ϱ.

Dans les Disquisitiones Arithmeticæ art. 360 l'expression "sectio circuli" signifie la détermination des quantités $\cos \frac{2k\pi}{2n+1}$ et $\sin \frac{2k\pi}{2n+1}$. Toutefois, si n est un nombre impair, les opérations indiquées ci-dessus suffisent aussi pour la détermination des sinus, et de plus le radical $\sqrt{\varrho}$ peut être éliminé.

Page 507. La copie de *Crelle* contient encore quelques lignes du commencement du sixième paragraphe:

§ 6.

Application aux fonctions elliptiques.

"*Dans les recherches sur les fonctions elliptiques insérées dans le cahier II, tome II de* "*ce Journal j'ai démontré que les deux quantités*

$$\varphi\left(\frac{\omega}{2n+1}\right), \quad \varphi\left(\frac{\varpi i}{2n+1}\right)$$

"*seront racines d'une même équation*

(77) $$R=0$$

"*du degré* $(2n+1)^2-1$".

"*La fonction* $\varphi\alpha = x$ *est déterminée par la formule*

(78) $$\int\frac{dx}{\sqrt{(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)}}=\alpha."$$

Cela est rayé par un trait de crayon qui enlève en même temps la note qui se trouve au bas de la page 507, et qui ne fut pas imprimée dans le Journal. La date "*Christiania, le 29 mars 1828*", paraît être de la main de *Crelle.*

A la fin du mémoire on trouve dans le Journal la note suivante:

"L'auteur de ce mémoire donnera dans une autre occasion des applications aux "fonctions elliptiques. (Note du réd.)"

Sylow.

Le mémoire XXVI fut publié le 28 mars 1829 dans le Journal de *Crelle*, tome IV, fascicule 2. La copie nous a servi en plusieurs endroits à rétablir le texte original corrompu par des corrections de *Crelle*. Voyez tome II, page 251—253.

Le mémoire XXVII fut publié le 28 mars 1829 dans le Journal de *Crelle*, tome IV, fascicule 2. Dans la copie la date paraît être ajoutée par *Crelle*. Le 6 janvier Abel était à Froland et vraisemblablement déjà malade.

Lie.

Mémoire XXVIII. A la mort d'Abel le "Précis d'une théorie des fonctions elliptiques" était encore inachevé. Les trois premiers chapitres furent publiés le 10 juin 1829, le quatrième et le commencement du cinquième chapitre le 31 juillet 1829. Nous y avons pu ajouter quelques pages d'après un fragment du manuscrit d'Abel retrouvé en 1874. Avec cela il faut croire qu'on possède presque toute la première partie du mémoire. Nous n'avons rien trouvé dans les papiers d'Abel qui nous paraisse appartenir à la seconde partie.

A plusieurs endroits nous avons rétabli le texte primitif d'après la copie de *Crelle*.

Page 522, ligne 3 en remontant. C'est par inadvertance, sans doute, qu'Abel dit qu'on peut avoir $\lambda(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_\mu)$ égal à l'infini. En effet on a (voyez t. II, p. 194)

$$d\theta_1+d\theta_2+\cdots+d\theta_\mu=0;$$

or en faisant

$$p=(1+c^2)x^{\frac{\mu}{2}}-2x^{\frac{\mu}{2}-2},$$

$$q=2x^{\frac{\mu}{2}-2},$$

les quantités $\lambda\theta_1, \lambda\theta_2, \ldots \lambda\theta_\mu$ s'annulent toutes, d'où l'on conclut:

$$\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_\mu=0,$$

$$\lambda(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_\mu)=0.$$

Cela n'est nullement en désaccord avec ce qui est dit p. 535, article B.

Page 523. Dans les formules du n° 6 nous avons corrigé quelques fautes d'écriture. On obtient ces formules comme corollaire quand on traite de la résolution de l'équation de transformation du degré $2\mu+1$. En faisant

$$\alpha=\frac{2m\varpi+m'\omega i}{2\mu+1},$$

(a) $$y=a\frac{x\left(1-\frac{x^2}{\lambda^2\alpha}\right)\left(1-\frac{x^2}{\lambda^2 2\alpha}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{\lambda^2\mu\alpha}\right)}{(1-c^2x^2\lambda^2\alpha)(1-c^2x^2\lambda^2 2\alpha)\cdots(1-c^2x^2\lambda^2\mu\alpha)},$$

on a

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-c_1^2y^2)}}=a\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}}=a\,d\theta.$$

Pour résoudre l'équation (a), on est porté à considérer la fonction

$$\psi_r\theta=\Sigma\delta^{rp}\lambda(\theta+p\alpha),\quad (p=0,\ 1,\ 2,\ \ldots 2\mu).$$

Or puisqu'on a $\psi_r(\theta+\alpha)=\delta^{-r}\psi_r\theta$, les fonctions $(\psi_r\theta)^{2\mu+1}$, $(\psi_{-r}\theta)^{2\mu+1}$, $\psi_r\theta.\psi_{-r}\theta$ s'expriment en fonction entière de y et du radical $\sqrt{(1-y^2)(1-c_1^2y^2)}$, (voyez t. II, p. 244—250), et l'on voit aisément qu'on peut faire

$$(\psi_r\theta)^{2\mu+1}=\left(\frac{ac_1}{c}\right)^{2\mu+1}[p_r+q_r\Delta(y,c_1)],$$

$$(\psi_{-r}\theta)^{2\mu+1}=\left(\frac{ac_1}{c}\right)^{2\mu+1}[p_r-q_r\Delta(y,c_1)],$$

(b) $$\psi_r\theta.\psi_{-r}\theta=\left(\frac{ac_1}{c}\right)^2(y^2-f_r^2),$$

d'où l'on tire

$$p_r^2-q_r^2[\Delta(y,c_1)]^2=(y^2-f_r^2)^{2\mu+1}.$$

Il est facile de voir que p_r est une fonction impaire, q_r une fonction paire de y; on peut donc conclure que la valeur de la constante f_r est contenue dans l'expression

$$\lambda_1\frac{m_1\varpi_1+m_1'\omega_1 i}{2\mu+1},$$

en désignant par λ_1, $2\varpi_1$, $\omega_1 i$ respectivement la fonction elliptique et les périodes relatives au module c_1. En faisant dans l'équation (b) $\theta=0$, on trouve pour f_r cette autre expression:

$$(c)\quad f_r = \pm \frac{c}{a c_1} \psi_r(0) = \pm \frac{2ic}{a c_1} \left\{ \lambda\alpha \,.\, \sin \frac{2r\pi}{2\mu+1} + \lambda\, 2\alpha \,.\, \sin \frac{4r\pi}{2\mu+1} + \cdots + \lambda\mu\alpha \,.\, \sin \frac{2\mu r\pi}{2\mu+1} \right\}.$$

Si l'on fait $\alpha = \frac{\omega i}{2\mu+1}$, la constante f_r devient réelle; on a donc dans ce cas $f_r = \lambda_1 \frac{m_1 \varpi_1}{2\mu+1}$. Maintenant l'équation (b) montre que l'une des fonctions $\psi_r\theta$, $\psi_{-r}\theta$, s'annule pour $y = \lambda_1 \frac{m_1 \varpi_1}{2\mu+1}$, c'est-à-dire pour $\theta = \frac{m_1 \varpi}{2\mu+1}$. D'ailleurs, à des valeurs différentes de r répondent évidemment des valeurs différentes de m_1; on a donc, pour une valeur quelconque de m_1 et pour une valeur convenablement choisie de r,

$$\lambda \frac{m_1 \varpi}{2\mu+1} + \delta^r \lambda \frac{m_1 \varpi + \omega i}{2\mu+1} + \delta^{2r} \lambda \frac{m_1 \varpi + 2\omega i}{2\mu+1} + \cdots + \delta^{2\mu r} \lambda \frac{m_1 \varpi + 2\mu \omega i}{2\mu+1} = 0.$$

En faisant $\alpha = \frac{2\varpi}{2\mu+1}$, on trouve la seconde formule. Nous avons généralisé ces résultats dans un mémoire inséré dans les Comptes rendus de la Société des Sciences de Christiania, année 1864, p. 68, dont voici la conclusion:

Si l'on pose

$$\varpi' = m\varpi + n\omega i,$$
$$\omega' = m'\varpi + n'\omega i,$$

m et n n'ayant pas un même facteur commun avec $2\mu + 1$, on a pour un module quelconque

$$\Sigma\, \delta^{4pq(mn'-m'n)} \lambda \frac{2p\varpi' + 2q\omega'}{2\mu+1} = 0.$$
$$(p = 0,\ 1,\ \ldots 2\mu).$$

Il n'y a pas de doute que c'est de la manière indiquée ci-dessus qu'Abel a trouvé ces relations remarquables; les fragmens qu'on trouve imprimés t. II, p. 250, 251 le démontrent assez clairement. La manière la plus expéditive de les vérifier est pourtant le développement en séries. Voici une vérification que M. *Kronecker* a eu l'obligeance de nous communiquer dans une lettre datée le 25 mai 1876:

„Nach *Jacobi's* Fundam. pag. 101 Formel 19 ist:

$$\frac{ikK}{\pi} \sin \operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi} = \sum_\mu \sum_\nu q^{\frac{1}{2}\mu\nu} \left(e^{\nu x i} - e^{-\nu x i}\right)$$
$$(\mu,\ \nu = 1,\ 3,\ 5,\ 7 \ldots)$$

„also

$$\frac{ikK}{\pi} \Sigma e^{\frac{4rs\pi i}{n}} \sin \operatorname{am} \left(\frac{4rK + 2sK'i}{n} \right) = \sum_{r,\mu,\nu} q^{(\mu n + 2s)\frac{\nu}{2n}} e^{\frac{2r\pi i}{n}(2s+\nu)} - \sum_{r,\mu,\nu} q^{(\mu n - 2s)\frac{\nu}{2n}} e^{\frac{2r\pi i}{n}(2s-\nu)}.$$
$$(r = 0,\ 1,\ \ldots n-1)$$

„Hierbei ist um die Convergenz zu wahren $s < \frac{n}{2}$ vorauszusetzen wenn s positiv, oder „$-s < \frac{n}{2}$ wenn s negativ ist. Bei der Summation über $r = 0,\ 1,\ \ldots n-1$ bleiben nur

„diejenigen Glieder übrig, bei denen $2s+\nu$ und resp. $2s-\nu$ durch n theilbar ist, „also wo

$$2s+\nu=\lambda n \quad \text{und resp.} \quad \nu-2s=\lambda'\nu$$

„wird. Dabei sind λ und λ' *positiv* $\left(\text{da } s^2 < \frac{n^2}{4}\right)$, und jene Summe wird also

$$n\sum_{\mu,\lambda} q^{(\mu n+2s)(\lambda n-2s)\frac{1}{2n}} - n\sum_{\mu',\lambda'} q^{(\mu' n-2s)(\lambda' n+2s)\frac{1}{2n}}.$$

„und diese Differenz ist offenbar Null, da $\mu'=\lambda$ und $\lambda'=\mu$ gesetzt werden kann, da „λ, λ' ebenfalls alle positive ungraden Zahlen bedeuten. Also ist

$$\Sigma e^{\frac{4rsi}{n}} \sin \operatorname{am}\left(\frac{4rK+2sK'i}{n}\right)=0$$

$$(r=0,\ 1,\ \ldots\ n-1)$$

„und zwar für die Werthe $s=-\frac{n-1}{2}\cdots+\frac{n-1}{2}$. Durch Vertauschung von K und „K' etc. folgen die anderen. Aber auch diese könnten direct abgeleitet werden".

Les formules du n° 6, ainsi que la formule (c), peuvent encore être déduites d'une formule de *Jacobi* qu'on trouve dans le Journal für die reine und angewandte Mathematik t. 4, p. 190, ou bien de la formule qu'a donné M. *Hermite* dans le même journal t. 32, p. 287.

Pages 526, 527 (*n°* 9). A cet endroit, le dernier où il parle des modules singuliers qui admettent une multiplication complexe, Abel ne maintient qu'avec une certaine réserve la proposition qu'il avait déjà avancée (t. I, p. 426) sur la possibilité de les exprimer par des radicaux; il ne l'affirme avec certitude que pour le cas où le rapport des périodes est un nombre rationnel. Mais dans ce cas l'intégrale elliptique peut être transformée en une autre dont le module est égal à $\sqrt{\frac{1}{2}}$, ou bien si l'on veut à $\sqrt{-1}$; ce n'est donc qu'une conséquence presque immédiate de la théorie de la division de la lemniscate. Cependant les prévisions d'Abel ont été pleinement confirmées par les travaux de M. *Kronecker* (Monatsberichte der Königl. Preuss. Akad. der Wissenschaften, année 1857, p. 455 et année 1862, p. 363).

La résolubilité de l'équation modulaire est une conséquence immédiate de celle de l'équation de division des périodes; la résolution de cette dernière équation, pour le cas des modules singuliers, devait être traitée dans la continuation de ce mémoire (voyez t. II, p. 310 en bas et p. 313 en haut). Sans vouloir entrer en détails dans cette matière, nous exposerons aussi brièvement que possible comment cette résolution peut être réduite à des principes posés par Abel. D'abord, puisque tout module peut être transformé en son complément, on peut définir les modules en question comme ceux qui se transforment en eux-mêmes (par une transformation différente de la suivante, $y=\frac{1}{cx}$). Donc on aura, en vertu des deux premières formules de la page 525 (nous changeons seulement les signes des lettres n et n').

$$\varepsilon . 2\varpi = m . 2\varpi - n\omega i,$$

$$\varepsilon . \omega i = m' . 2\varpi - n'\omega i,$$

ce qui donne pour le rapport des périodes et pour la quantité ε les équations suivantes:

$$\varepsilon^2 + (n' - m)\varepsilon + nm' - mn' = 0,$$

$$n(\omega i)^2 - (n' + m)(\omega i)(2\varpi) + m' . (2\varpi)^2 = 0.$$

On voit qu'on peut se borner aux deux cas suivans

$$m = n', \quad \varepsilon = \sqrt{-(m'n - m^2)} = \sqrt{-\alpha},$$

$$m = n' + 1, \quad \varepsilon = \frac{1 + \sqrt{-[4m'n - 4m(m-1) - 1]}}{2} = \frac{1 + \sqrt{-\alpha}}{2}.$$

Cela posé, on aura la transformation d'après les règles du mémoire "Solution d'un problème général etc.", en faisant dans les formules (68) (t. I, p. 423)

$$\nu = 2, \quad \alpha_1 = \frac{-n' 2\varpi + n\omega i}{\delta}, \quad \alpha_2 = \frac{-m' 2\varpi + m\omega i}{\delta},$$

δ désignant le nombre nécessairement positif $m'n - mn'$; on aura ainsi un résultat de la forme

$$(d) \qquad \lambda(\varepsilon\theta + a) = f(\lambda\theta),$$

f dénotant une fonction rationnelle.

En remplaçant dans l'équation (d) θ par $\varpi - \theta$, on voit que la quantité a sera de la forme

$$(2r + 1)\frac{\varpi}{2} - s\frac{\omega i}{2} - \varepsilon\frac{\varpi}{2}.$$

Cela posé, on tirera de l'équation (d) la valeur de $\lambda^2(\varepsilon\theta)$ en fonction rationnelle de $\lambda^2\theta$ et du radical $\Delta\theta$.

Soit maintenant μ un nombre premier impair, et faisons

$$\theta = \frac{2p\varpi + q\omega i}{\mu} = \frac{H}{\mu};$$

le radical $\Delta\frac{H}{\mu}$ est exprimable en fonction rationnelle de $\lambda^2\frac{H}{\mu}$, de sorte qu'on aura $\lambda^2\frac{\varepsilon H}{\mu}$ en fonction rationnelle de $\lambda^2\frac{H}{\mu}$:

$$\lambda^2\frac{\varepsilon H}{\mu} = \varphi\left(\lambda^2\frac{H}{\mu}\right), \quad \text{ou bien} \quad \lambda^2\frac{(pm + qm')2\varpi - (pn + qn')\omega i}{\mu} = \varphi\left(\lambda^2\frac{2p\varpi + q\omega i}{\mu}\right).$$

Or nous pouvons supposer les nombres p et q tellement choisis que le premier membre de cette équation diffère des $\frac{\mu - 1}{2}$ quantités $\lambda^2\frac{\nu H}{\mu}$, ν étant un nombre entier (le seul cas d'exception, celui où μ divise à la fois les trois nombres n, $n' + m$, m', nous est sans importance, puisque alors le module admet une transformation plus simple). Cela étant, toutes les racines de l'équation proposée sont contenues dans l'expression $\lambda^2\frac{(r + s\varepsilon)H}{\mu}$.

"diejenigen Glieder übrig, bei denen $2s+\nu$ und resp. $2s-\nu$ durch n theilbar ist, "also wo

$$2s+\nu=\lambda n \text{ und resp. } \nu-2s=\lambda'\nu$$

"wird. Dabei sind λ und λ' *positiv* $\left(\text{da } s^2<\frac{n^2}{4}\right)$, und jene Summe wird also

$$n\sum_{\mu,\lambda} q^{(\mu n+2s)(\lambda n-2s)\frac{1}{2n}} - n\sum_{\mu',\lambda'} q^{(\mu' n-2s)(\lambda' n+2s)\frac{1}{2n}},$$

"und diese Differenz ist offenbar Null, da $\mu'=\lambda$ und $\lambda'=\mu$ gesetzt werden kann, da "λ, λ' ebenfalls alle positive ungraden Zahlen bedeuten. Also ist

$$\Sigma e^{\frac{4rs\pi i}{n}} \sin \operatorname{am}\left(\frac{4rK+2sK'i}{n}\right)=0$$

$$(r=0,\ 1,\ \ldots n-1)$$

"und zwar für die Werthe $s=-\frac{n-1}{2}\cdots+\frac{n-1}{2}$. Durch Vertauschung von K und "K' etc. folgen die anderen. Aber auch diese könnten direct abgeleitet werden".

Les formules du n° 6, ainsi que la formule (e), peuvent encore être déduites d'une formule de *Jacobi* qu'on trouve dans le Journal für die reine und angewandte Mathematik t. 4, p. 190, ou bien de la formule qu'a donné M. *Hermite* dans le même journal t. 32, p. 287.

Pages 526, 527 (n° 9). A cet endroit, le dernier où il parle des modules singuliers qui admettent une multiplication complexe, Abel ne maintient qu'avec une certaine réserve la proposition qu'il avait déjà avancée (t. I, p. 426) sur la possibilité de les exprimer par des radicaux; il ne l'affirme avec certitude que pour le cas où le rapport des périodes est un nombre rationnel. Mais dans ce cas l'intégrale elliptique peut être transformée en une autre dont le module est égal à $\sqrt{\frac{1}{2}}$, ou bien si l'on veut à $\sqrt{-1}$: ce n'est donc qu'une conséquence presque immédiate de la théorie de la division de la lemniscate. Cependant les prévisions d'Abel ont été pleinement confirmées par les travaux de M. *Kronecker* (Monatsberichte der Königl. Preuss. Akad. der Wissenschaften, année 1857, p. 455 et année 1862, p. 363).

La résolubilité de l'équation modulaire est une conséquence immédiate de celle de l'équation de division des périodes; la résolution de cette dernière équation, pour le cas des modules singuliers, devait être traitée dans la continuation de ce mémoire (voyez t. II, p. 310 en bas et p. 313 en haut). Sans vouloir entrer en détails dans cette matière, nous exposerons aussi brièvement que possible comment cette résolution peut être réduite à des principes posés par Abel. D'abord, puisque tout module peut être transformé en son complément, on peut définir les modules en question comme ceux qui se transforment en eux-mêmes $\left(\text{par une transformation différente de la suivante, } y=\frac{1}{cx}\right)$. Donc on aura, en vertu des deux premières formules de la page 525 (nous changerons seulement les signes des lettres n et n'),

$$\varepsilon \, . \, 2\varpi = m \, . \, 2\varpi - n\,\omega i,$$

$$\varepsilon \, . \, \omega i = m' . 2\varpi - n'\omega i,$$

ce qui donne pour le rapport des périodes et pour la quantité ε les équations suivantes:

$$\varepsilon^2 + (n' - m)\,\varepsilon + n m' - m n' = 0,$$

$$n(\omega i)^2 - (n' + m)(\omega i)(2\varpi) + m' . (2\varpi)^2 = 0.$$

On voit qu'on peut se borner aux deux cas suivans

$$m = n', \quad \varepsilon = \sqrt{-(m'n - m^2)} = \sqrt{-\alpha},$$

$$m = n' + 1, \quad \varepsilon = \frac{1 + \sqrt{-[4m'n - 4m(m-1) - 1]}}{2} = \frac{1 + \sqrt{-a}}{2}.$$

Cela posé, on aura la transformation d'après les règles du mémoire "Solution d'un problème général etc.", en faisant dans les formules (68) (t. I, p. 423)

$$\nu = 2, \quad \alpha_1 = \frac{-n' 2\varpi + n\,\omega i}{\delta}, \quad \alpha_2 = \frac{-m' 2\varpi + m\,\omega i}{\delta},$$

δ désignant le nombre nécessairement positif $m'n - m n'$; on aura ainsi un résultat de la forme

$$(d) \qquad \lambda(\varepsilon\theta + a) = f(\lambda\theta),$$

f dénotant une fonction rationnelle.

En remplaçant dans l'équation (d) θ par $\varpi - \theta$, on voit que la quantité a sera de la forme

$$(2r + 1)\frac{\varpi}{2} - s\frac{\omega i}{2} - \varepsilon\frac{\varpi}{2}.$$

Cela posé, on tirera de l'équation (d) la valeur de $\lambda^2(\varepsilon\theta)$ en fonction rationnelle de $\lambda^2\theta$ et du radical $\Delta\theta$.

Soit maintenant μ un nombre premier impair, et faisons

$$\theta = \frac{2p\varpi + q\omega i}{\mu} = \frac{H}{\mu};$$

le radical $\Delta\frac{H}{\mu}$ est exprimable en fonction rationnelle de $\lambda^2\frac{H}{\mu}$, de sorte qu'on aura $\lambda^2\frac{\varepsilon H}{\mu}$ en fonction rationnelle de $\lambda^2\frac{H}{\mu}$:

$$\lambda^2\frac{\varepsilon H}{\mu} = \varphi\left(\lambda^2\frac{H}{\mu}\right), \quad \text{ou bien} \quad \lambda^2\frac{(pm + qm')2\varpi - (pn + qn')\omega i}{\mu} = \varphi\left(\lambda^2\frac{2p\varpi + q\omega i}{\mu}\right).$$

Or nous pouvons supposer les nombres p et q tellement choisis que le premier membre de cette équation diffère des $\frac{\mu - 1}{2}$ quantités $\lambda^2\frac{\nu H}{\mu}$, ν étant un nombre entier (le seul cas d'exception, celui où μ divise à la fois les trois nombres n, $n' + m$, m', nous est sans importance, puisque alors le module admet une transformation plus simple). Cela étant, toutes les racines de l'équation proposée sont contenues dans l'expression $\lambda^2\frac{(\nu + s\varepsilon)H}{\mu}$.

En désignant par F et ψ des fonctions rationnelles, on a

$$\lambda^2 \frac{(r+s\varepsilon)H}{\mu} = F\left(\lambda^2 \frac{H}{\mu}, \ \lambda^2 \frac{\varepsilon H}{\mu}\right) = F\left[\lambda^2 \frac{H}{\mu}, \ \varphi\left(\lambda^2 \frac{H}{\mu}\right)\right] = \psi\left(\lambda^2 \frac{H}{\mu}\right).$$

Or en faisant de la même manière

$$\lambda^2 \frac{(r_1+s_1\varepsilon)H}{\mu} = \psi_1\left(\lambda^2 \frac{H}{\mu}\right),$$

il est facile à voir qu'on a

$$\psi\psi_1\left(\lambda^2 \frac{H}{\mu}\right) = \psi_1\psi\left(\lambda^2 \frac{H}{\mu}\right) = \lambda^2 \frac{(r+s\varepsilon)(r_1+s_1\varepsilon)H}{\mu},$$

égalité qui entraîne la résolubilité de l'équation proposée par les règles du "Mémoire sur une classe particulière d'équations etc." § 4 (t. I, p. 499).

Dans le cas où μ est de la forme $\frac{\varrho^2+\alpha}{t}$, ϱ et t étant des nombres entiers, l'équation de division des périodes est réductible; Abel a effectué cette réduction pour le module $\sqrt{-1}$ dans les Récherches sur les fonctions elliptiques (t. I, p. 353—355); voyez de plus t. II, p. 310, 311.

Si au contraire μ n'est pas de la forme $\frac{\varrho^2+\alpha}{t}$, toutes les racines peuvent être représentées par l'expression $\psi^k\left(\lambda^2 \frac{H}{\mu}\right)$, en prenant pour $r+s\varepsilon$ une racine primitive du module μ. Si nous ne pouvons pas assurer qu'Abel a connu l'existence des racines primitives parmis les nombres de la forme $r+s\varepsilon$ en général, au moins le livre manuscrit A le montre cherchant, déjà en 1826, la racine primitive $2+i$ à l'occasion de la division de la lemniscate en 7 parties égales.

Le dernier alinéa du n° 9 est assez étrange; Abel aurait donc cru que toutes les racines de l'équation modulaire étaient des fonctions rationnelles de deux d'entre elles, et ce serait de cette proposition erronée qu'il conclut qu'on peut exprimer toutes les modules transformés par un d'eux à l'aide de radicaux. Mais nous croyons plutôt qu'en écrivant la première des deux phrases, il a momentanément confondu l'équation modulaire avec l'équation de division des périodes, qui a précisément la propriété en question, voyez t. I, p. 599 et 600. La seconde proposition fut confirmée par les recherches de *Galois* (Journal de Mathématiques pures et appliquées, année 1846 p. 410—412), dont les résultats ont été retrouvés et démontrés par MM. *Betti*, *Hermite* et *Jordan*.

Page 527, n° 10. Les fonctions φx, fx sont sans doute les mêmes dont parle Abel dans la lettre à *Legendre* (voyez t. II, p 274, 275), et qui ont été traitées depuis par M. *Weierstrass* (Journal für die reine und angewandte Mathematik t. 52, p. 339—380). Le livre manuscrit C contient vers la fin un calcul qui a pour objet de déduire les équations différentielles auxquelles satisfont les fonctions φx et fx, en partant des équations

$$\varphi(x+y)\varphi(x-y) = (\varphi x)^2(fy)^2 - (\varphi y)^2(fx)^2,$$
$$f(x+y)f(x-y) = (fx)^2(fy)^2 - c^2(\varphi x)^2\varphi(y)^2.$$

En différentiant la seconde équation deux fois de suite par rapport à x, et faisant $x=0$, il trouve

$$f''y \cdot fy-(f'y)^2=a(fy)^2-c^2 b(\varphi y)^2,$$

où par conséquent

$$a=f(o) \cdot f''(o); \quad b=(\varphi' o)^2;$$

de même il trouve

$$-\varphi'' y \cdot \varphi y+(\varphi' y)^2=b(fy)^2-a(\varphi y)^2.$$

Puis il écrit les équations

$$(f'y)^2-f''(y) \cdot fy=c^2(\varphi y)^2,$$
$$(\varphi' y)^2-\varphi'' y \cdot \varphi y=(fy)^2,$$

soit que les constantes a et b fussent connues d'avance, soit qu'il les suppose déterminées pour que ces relations aient lieu.

Il déduit de la même manière l'équation

$$2f^{\text{IV}} y \cdot fy-8f''' y \cdot f'y+6(f''y)^2=-2c^2(fy)^2+8c^2(1+c^2)(\varphi y)^2,$$

en se servant, pour déterminer les constantes, des développemens

$$\varphi x=x-\frac{1+c^2}{6} x^3+\cdots,$$

$$fx=1-\frac{c^2}{12} x^4+\cdots.$$

C'est à peu près tout ce que nous avons trouvé sur ce sujet dans les manuscrits d'Abel.

Page 528, n° 11. Nous avons cherché en vain dans les manuscrits d'Abel une indication de la méthode dont il comptait se servir pour étendre ses résultats aux modules imaginaires.

Page 531. La note au bas de la page contenait primitivement la démonstration du théorème appelé par préférence "Théorème d'Abel", dans une rédaction presque identique à celle du mémoire XXVII (t. I, p. 515). Il paraît qu'Abel ne s'est décidé à en faire un mémoire à part qu'après avoir expédié son manuscrit à *Crelle*, et que celui-ci, sur sa demande, a substitué à la démonstration une citation du mémoire XXVII.

Page 535, lignes 6, 7 en remontant: "*Il sera facile de démontrer qu'elle sera égale à* $\frac{1}{cy}$, *la valeur de* y *étant déterminée par l'équation* (14)". Voici comment le démontre M. *Broch* dans son Traité élémentaire des fonctions elliptiques: Si l'on fait

$$(fx)^2-(\varphi x)^2(\varDelta x)^2=(x^2-x_1^2)(x^2-x_2^2)\ldots(x^2-x_{2n-1}^2)(x^2-y^2),$$
$$(f_1 x)^2-(\varphi_1 x)^2(\varDelta x)^2=(x^2-x_1^2)(x^2-x_2^2)\ldots(x^2-x_{2n-1}^2)(x^2-z^2),$$

en supposant les fonctions fx et $\varphi_1 x$ paires, φx et $f_1 x$ impaires, les équations

$$fx+\varphi x\, \varDelta x=0, \quad f_1 x+\varphi_1 x \cdot \varDelta x=0$$

seront satisfaites en substituant pour x une quelconque des quantités $x_1, x_2, \ldots x_{2n-1}$. En éliminant $\varDelta x$ on en tire

$$fx \cdot \varphi_1 x - f_1 x \cdot \varphi x = 0.$$

Or puisque le premier membre de cette équation est une fonction paire de x du degré $4n-2$, ses racines seront $\pm x_1, \pm x_2, \ldots \pm x_{2n-1}$, donc on a

$$f(0) \cdot \varphi_1(0) = \frac{1}{ic} x_1^2 x_2^2 \ldots x_{2n-1}^2;$$

mais on a

$$f(0) = -x_1 x_2 \ldots x_{2n-1} y, \quad \varphi_1(0) = \pm i x_1 x_2 \ldots x_{2n-1} z,$$

donc

$$z = \pm \frac{1}{cy}.$$

Page 537, ligne 11 en remontant. Dans le Journal, ainsi que dans la copie de *Crelle*, on lit:

"*Cela posé, si l'on suppose toutes les quantités* $x_2, x_3, x_4, \ldots y$ *égales à des constantes déterminées.*"

Nous croyons rendre la pensée d'Abel en effaçant la lettre x_2. En effet, si l'on fait varier x_1 et x_2 en supposant $x_3, x_4, \ldots y$ constans, x_2 sera une fonction de x_1 ainsi que les dérivées partielles de y et de v par rapport à x_1; $\psi' y$ au contraire devient une constante.

Page 548, lignes 10—15. Dans le Journal ce passage est gâté par une correction de *Crelle*; nous avons rétabli le texte d'Abel d'après la copie.

Page 563, lignes 12, 13. En désignant par α une racine de l'équation $x_m = 0$, $\frac{1}{c\alpha}$ est racine de l'équation $x_m = \frac{1}{0}$, si m est un nombre impair; au contraire, si m est un nombre pair, $\frac{1}{c\alpha}$ est racine de l'équation $x_m = 0$.

Page 568. Théorème VIII. Ce ne sont que les modules qui resteront après l'emploi du théorème VI qui satisferont nécessairement à l'équation $\varpi(y, c') = \varepsilon \varpi(x, c) + C$. Il faut en effet remarquer que quand on fait usage du théorème II, ou d'un des théorèmes qui en dérivent, quelques-unes des fonctions $\psi_1 \theta_1, \psi_2 \theta_2, \ldots$ pourront bien se réduire à des constantes. Cela arrive notamment si à des valeurs données de $x_1, x_2, \ldots x_\mu, y_1, y_2, \ldots y_\mu$, et à une même valeur de t_m, répondent deux valeurs de $\varDelta_m t_m$; car dans ce cas les membres de l'expression

$$\frac{dt_m'}{\varDelta t_m'} + \frac{dt_m''}{\varDelta t_m''} + \cdots + \frac{dt_m^{\delta}}{\varDelta t_m^{\delta}}$$

se détruisent deux à deux, d'où l'on conclut que dans la formule (75) p. 549 la quantité T_m (ou θ_m comme elle s'appelle dans l'énoncé du théorème VIII) est une constante.

Pages 584—587. Pour qu'on puisse faire $c' = \frac{1}{\alpha}$ (p. 585), il faut que α ne soit ni nul, ni infini, ni égal à ± 1. Il est facile de voir que dans le cas qu'on considère, α

ne saura être nul ou infini; au contraire α sera nécessairement égal à ± 1, si μ est un nombre pair. Pour avoir des formules générales on déterminera la quantité δ par les équations

$$\delta_2 = e, \quad \varDelta\delta_2 = \varDelta e;$$

en faisant de plus

$$\vartheta(x) = \frac{x\varDelta\delta + \delta\varDelta x}{1 - c^2\delta^2 x^2},$$

on aura

$$\vartheta^{2m} x = \theta^m x; \quad \vartheta^m x = \frac{x\varDelta\delta_m + \delta_m\varDelta x}{1 - c^2\delta_m^2 x^2}, \quad \vartheta^{4\mu-m} x = \frac{x\varDelta\delta_m - \delta_m\varDelta x}{1 - c^2\delta_m^2 x^2};$$

$$p - qy = -by(z-x)(z-\vartheta^2 x)(z-\vartheta^4 x)\ldots(z-\vartheta^{4\mu-2}x).$$

En faisant dans cette équation $x = \vartheta(1)$, $p - qy$ sera un carré parfait; on peut donc supposer que y devienne égal à $\frac{1}{c'}$ pour $x = \vartheta(1)$.

En faisant $x = \vartheta(0) = \delta$, on a

$$x + \theta x + \cdots + \theta^{2\mu-1} x = \vartheta(0) + \vartheta^3(0) + \cdots + \vartheta^{4\mu-1}(0) = 0,$$

d'où l'on voit que q' s'annule pour $x = \delta$. Cette quantité δ est donc précisément celle qui doit figurer dans l'expression de q' qu'on trouve au commencement de la page 587. Les formules (162) sont exactes dans tous les cas; la valeur de c' sera $\frac{\varphi(1)}{\varphi[\vartheta(1)]}$.

Page 588. Valeurs de a, a', b, b':

En faisant $\delta_2 = e$, $\varDelta\delta_2 = \varDelta e$, on peut toujours supposer que y devienne égal à

$$1, \; -1, \; \frac{1}{c'}, \; -\frac{1}{c'}$$

pour x égal à

$$0, \quad \infty, \quad \delta, \quad \frac{1}{c\delta},$$

ce qui donne

$$a' = b' = 1; \quad b = \pm c^\mu, \quad a = \mp c^\mu,$$

$$y = \frac{1 + c^\mu \varphi x}{1 - c^\mu \varphi x},$$

φx dénotant la fonction $(x \,.\, \theta x \,.\, \theta^2 x \ldots \theta^{\mu-1} x)^2$. On aura

$$c' = \frac{1 - c^\mu \varphi\delta}{1 + c^\mu \varphi\delta}, \quad \text{ou bien} \quad \frac{1-c'}{1+c'} = c^\mu \delta_1^2 \,.\, \delta_3^2 \ldots \delta_{2\mu-1}^2;$$

$$\varepsilon = (1 + c^\mu \varphi\delta)\frac{e_1 \,.\, e_2 \ldots e_{\mu-1}}{\delta_1 \,.\, \delta_3 \ldots \delta_{2\mu-1}}\sqrt{-1}.$$

Page 597. Le signe de la quantité A pourrait paraître incertain. Pour le déterminer on fera dans les formules (13) et (13′) (t. I, p. 533) toutes les variables $x_1, \ldots x_{n-1}$ infinies, en supposant $\varDelta x_i = +cx_i^2$; en raisonnant comme le fait Abel p. 535 pour les valeurs infiniment petites, on verra qu'on a $\varDelta y = +cy^2$, c'est-à-dire $\varDelta x_{2\mu+1} = cx_{2\mu+1}^2$.

Le signe de la constante a peut être déterminé au moyen des formules (48) et (49) p. 543. On trouve

$$a = (-1)^{\mu} c^{2\mu^2+2\mu}; \quad e_1^2 e_2^2 \dots e_n^2 = (-1)^{\mu} \frac{2\mu+1}{c^{2\mu^2+2\mu}}.$$

Page 599 *à la fin, et page* 600. On sait que e_m est une fonction rationnelle de e pour toutes les valeurs impaires de m; de plus on a $e_2 = -e_{2\mu-1}$, $e_4 = -e_{2\mu-3}$, $\dots e_{2\mu} = -e_1$. La formule

$$e_{2m} = \frac{2e_m \Delta e_m}{1 - c^2 c_m^4}$$

donne

$$\Delta e_m = \tfrac{1}{2} \frac{e_{2m}}{c_m} (1 - c^2 e_m^4),$$

par suite $e_{m,k}$ ou $\dfrac{e_m \Delta e_k' + e_k' \Delta e_m}{1 - c^2 e_m^2 e_k'^2}$ s'exprime en fonction rationnelle de e et de e'.

Le second membre de la formule (196) doit être précédé du facteur $(-1)^{\mu}$.

Page 608. Dans l'énoncé du théorème XIII Abel suppose évidemment qu'il n'existe aucune relation entre les mêmes fonctions elliptiques qui ne contienne pas toutes les modules $c, c_1 \dots c_m$.

Page 609. La partie du mémoire qui fut publiée dans le Journal de *Crelle* termine par la ligne qui suit la formule 211; elle fut accompagnée de la note suivante de l'éditeur:

"C'est jusqu'ici que ce mémoire est parvenu à l'éditeur. Mr. *Abel* est mort sans "l'avoir fini".

Ce que nous avons ajouté est la reproduction de deux feuilles écrites de la main d'Abel, qui furent retrouvées avec d'autres manuscrits en 1874. Le contenu et les numéros des formules font voir que c'est la continuation immédiate de la partie imprimée dans le Journal de *Crelle**).

La rédaction paraît être parfaitement achevée; l'une des feuilles porte même un avis au compositeur.

Page 613. Si le degré de la fonction y est un nombre pair, le degré du numérateur étant plus grand que celui du dénominateur, la fonction y a la forme suivante

$$y = \frac{(1-\delta_1^2 x^2)(1-\delta_2^2 x^2)\dots(1-\delta_\mu^2 x^2)}{\varepsilon c' x (1-\beta_1^2 x^2)(1-\beta_2^2 x^2)\dots(1-\beta_{\mu-1}^2 x^2)};$$

dans ce cas on ne peut trouver la valeur de $\varpi_0(y, c')$ par le procédé indiqué par Abel,

*) Nous avons d'ailleurs changé les numéros des formules à partir du n° 167 p. 589 pour remédier à une faute d'écriture et à quelques omissions.



mais on trouve, soit directement, soit en faisant $y = \frac{1}{c'y'}$, y' étant la valeur de y qui repond à la formule (222):

$$\varepsilon c'^2 \tilde{\omega}_0(y, c') = 2\mu c^2 \tilde{\omega}_0(x, c) - 2c^2 \left\{ \frac{1}{\delta_1^2} + \frac{1}{\delta_2^2} + \cdots + \frac{1}{\delta_\mu^2} \right\} \tilde{\omega}(x, c)$$

$$+ 2x \,.\, \Delta(x, c) \left\{ -\frac{1}{2x^2} + \frac{\beta_1^2}{1 - \beta_1^2 x^2} + \cdots + \frac{\beta_{\mu-1}^2}{1 - \beta_{\mu-1}^2 x^2} \right\}.$$

Sylow.

NOTES AUX MÉMOIRES DU TOME II.

D'après le témoignage de *Holmboe* les mémoires I—XIII du second tome furent écrits avant les voyages d'Abel. Ils datent donc d'un temps antérieur au réveil de sa critique dont il parle dans ses lettres à *Hansteen* et à *Holmboe*, voyez t. II, p. 257, 263. Dans ces lettres il désavoue fortement la méthode peu rigoureuse dont il s'est servi dans plusieurs de ces mémoires. Nous ne parlerons, dans les notes suivantes, des erreurs que nous y avons remarquées, que quand nous aurons à rendre compte de corrections ou de suppressions.

Les originaux sont tous perdus; il n'existe donc pas pour ces mémoires d'autre source que l'édition de *Holmboe*.

Mémoire II. Entre la troisième et la quatrième ligne p. 13 nous avons supprimé deux formules issues d'une différentiation incorrecte.

Mémoire V. Nous avons supprimé la dernière partie du mémoire, une page à peu près, où Abel pose $r = \alpha + \beta y + a \log(y + \gamma)$, parce que tout ce morceau est gâté dès le commencement par une faute de calcul.

Les mémoires VIII *et* IX ont été commentés par *Jacobi* (Journal für die reine und angewandte Mathematik t. 32). En faisant $\varepsilon = 0$, les dernières formules du mémoire IX conduisent immédiatement à l'équation (2) de *Jacobi*. Plus tard les recherches d'Abel et de *Jacobi* ont été poursuivies par M. *Fuchs* (Journal f. d. reine und angew. Math. t. 76), et par M. *Frobenius* (t. 78 du même journal).

Sylow.



Mémoire XIII. *Page* 94, lignes 2, 3. Voici le texte de l'édition de *Holmboe:* "*En* "*effet, comme* $\varepsilon^{(1)}=\varepsilon^{(2)}=\varepsilon^{(3)}=0$, *et comme* $\varepsilon^{(4)}=\alpha$ *est la seule quantité qui a une valeur* "*différente de zéro, il est clair* etc."

Page 105, ligne 11 en remontant, après le mot "*illusoires*" nous avons supprimé la phrase suivante: "*et alors c'est seulement l'équation du numéro* 17 *qui peut avoir lieu*". Le n° 17 est le n° 16 de notre édition par suite d'une correction des numéros faite plus haut.

Page 109, ligne 13 en remontant, après les mots "*on voit que* M *est*" nous avons supprimé les mots "*tout au plus*".

Ligne 4 en remontant, le texte de l'édition de *Holmboe* est le suivant:

"*D'après la valeur de* $\frac{M}{N}$ *il est aisé de conclure que* $\frac{dT'}{dx}$ *a la même forme. Soit donc*".

Page 125, ligne 9, nous avons mis "$2n+4 \geq m$" au lieu de "$2n+4 > m$".

Page 138, ligne 4 en remontant, nous avons ajouté au second membre le terme $\frac{L^{(n)}}{x-e^{(n)}}$; par suite nous avons mis, p. 139, ligne 1, $n+1$ au lieu de n.

Page 146, ligne 9 en remontant Dans l'édition de *Holmboe* la phrase "*mais il faut observer que A change de valeur*" est suivi des mots "*à moins que R' ne soit constant, comme dans l'exemple précédent*".

Pages 176—180 il a fallu corriger quelques fautes de calcul; par suite de ces corrections il a été nécessaire de mettre, p. 178 lignes 8, 9 en remontant, les mots "*contenu entre les limites* 1 *et* 0" au lieu de "*contenu entre les limites* -1 *et* $-\frac{3}{5}$". De plus nous avons supprimé la phrase "*En différentiant la valeur de* γ *par rapport à* u, *on verra que* $\frac{d\gamma}{du}$ *est toujours positif, lorsque* u *est positif*", laquelle dans l'édition de *Holmboe* se trouve après la valeur de γ, p. 178 ligne 5 en remontant.

Page 181, ligne 12 et 13 en remontant, nous avons corrigé la valeur approchée de α_1, et changé le texte de l'édition de *Holmboe,* qui est: "*donc la plus grande valeur de* α_1 *est* $=1$. α_1 *reçoit sa moindre valeur en faisant* $\alpha=1$".

Sylow.

Le mémoire XIV fut traduit en français d'après un original écrit en allemand, qui maintenant est perdu. Il fut, croyons nous, écrit à Freiberg au mois de mars 1826. Voici notre raison: Il est, d'après ce qui dit *Holmboe,* le seul mémoire qu'Abel écrivit en allemand. Or nous savons par une lettre d'Abel à *Holmboe,* qu'il avait écrit à Freiberg un mémoire en allemand qui devait être imprimé dans le Journal de *Crelle;* mais puisque *Holmboe* dit dans la préface de son édition que tous les mémoires d'Abel imprimés dans le Journal de *Crelle,* étaient rédigés en français, il faut croire que le mémoire de Freiberg n'y fut pas inséré; cela s'accorde avec un passage d'une lettre de *Crelle* à Abel

qui fait présumer que les mémoires qu'Abel avait écrits pour le Journal n'y furent pas tous imprimés.

Mémoire XV. L'original du premier numéro est conservé, celui du second est perdu. Nous ignorons pourquoi *Holmboe* a réuni ces deux morceaux sous un même titre; le manuscrit conservé n'en porte aucun.

Le mémoire XVI est un extrait d'une suite de notices intitulée: *Sur les séries* qui se trouve dans le livre B, et qui paraît écrite dans la seconde moitié de l'an 1827.

Page 201, lignes 9—11. Abel donne une série de règles successives pour décider si une série infinie à termes positifs est convergente ou divergente. Ces règles, identiques à celles publiées pour la première fois par M. *Bertrand* (Journal de Mathématiques publié par *Liouville* t. VII, p. 35—54) s'accordent au fond, comme le remarque M. *Bertrand*, avec celles données par *A. de Morgan* dans son Traité de calcul différentiel et intégral imprimé à Londres en 1839.

Le théorème au bas de la page 201 est à peu près le même que le théorème V du mémoire XIV, t. I. Le texte étant écrit après la publication de ce mémoire, comme le montre le passage qui se rapporte à *Olivier*, on peut sans doute conclure qu'Abel a senti lui-même l'insuffisance de sa démonstration antérieure du théorème dont il s'agit. La démonstration que notre texte reproduit peut facilement être complétée, si l'on admet qu'on puisse indiquer une quantité finie M telle que l'inégalité

$$[\varphi_n(\beta-\omega)-A_n]\alpha_0^n < M$$

subsiste pour toute valeur de l'entier n, pour toute valeur de α_0 moindre que α et plus grande que x_1, et pour toute valeur suffisamment petite de ω. En effet, en désignant par ε une quantité infinitésimale, on peut choisir un entier μ si grand que l'inégalité

$$M\left(\frac{x_1}{\alpha_0}\right)^n < \varepsilon$$

a lieu pour toute valeur de n égale ou plus grande que μ. Depuis on peut prendre ω_1 si petite que l'inégalité

$$[\varphi_n(\beta-\omega)-A_n]\,x_1^n < \varepsilon$$

subsiste aussi pour toute valeur de n moindre que μ, en supposant $\omega < \omega_1$. Donc l'inégalité

$$f(\beta-\omega)-R < \frac{k}{1-x_2}\,\varepsilon$$

aura lieu pour toute valeur de ω moindre que ω_1. M. *P. Du Bois-Reymond* a démontré d'une manière décisive (Mathematische Annalen, Tome IV, p. 135) un théorème plus général. Plus bas (p. 204, ligne 14) *Abel* applique le théorème dont nous parlons, en supposant que la quantité y représente l'ensemble des nombres entiers, et que β soit égal à ∞.

Les mots placés entre accolades sur les pages 203 et 204 sont intercalés par nous.

Lie.



Mémoire XVII. Ces notices sont tirées du livre manuscrit C; d'après la place qu'elles y occupent il est à croire qu'elles furent écrites au printemps 1828.

Pages 206, 207. En lisant la démonstration du théorème I il faut sousentendre qu'il est supposé impossible de trouver une relation algébrique ne contenant qu'une partie des intégrales $r_1, r_2, \ldots r_\mu$; c'est de cette hypothèse qu'Abel conclut (p. 207) que l'équation $y_\mu + P' = 0$ est identique en $r_{\mu-1}$.

Après l'équation $R = r_\mu + P = 0$ (p. 206) nous avons supprimé le passage suivant: "*En differentiant on en tire:*

$$y_\mu + \left(\frac{dP}{dr_{\mu-1}}\right) y_{\mu-1} + \left(\frac{dP}{dr_{\mu-2}}\right) y_{\mu-2} + \cdots + \left(\frac{dP}{dx}\right) = 0$$

"*donc*

$$\left(\frac{dP}{dr_{\mu-1}}\right) = S".$$

Page 208. Après l'énoncé du théorème II nous avons supprimé les deux équations

$$\int y\,dx = \text{fonct. rat. } (x, y).$$

$$\int \psi(y, x)\,dx = \text{fonct. rat. } (x, y).$$

Page 209. Dans le théorème VI nous avons mis $\psi_1(x, y_1)$ au lieu de $\psi(x, y_1)$. La phrase: "*Supposons . . . . qu'il soit impossible d'avoir* $f(y, y_1, x) = 0$" veut dire, sans doute, que l'équation algébrique qui définit y_1 en fonction de x reste irréductible après l'adjonction de la quantité y.

Page 210. Après la démonstration du théorème VII le manuscrit contient quelques lignes du troisième paragraphe intitulé: "§ 3. *Réduction des intégrales* $\int \psi(x, y)\,dx$ *à l'aide des fonctions algébriques*". Mais ce commencement a été abandonné. La page suivante contient des formules elliptiques; vient ensuite le § 5, sans qu'il y ait aucune trace d'un § 4.

Après les dernières lignes de la page 213, Abel a commencé de traiter l'exemple suivant:

"*Trouver* S_2 *en* $S_1, R_0, R_1, \ldots$"

mais le calcul n'a pas été achevé.

Dans le dernier morceau, qui commence p. 214, Abel désigne par $E(n)$ le plus grand nombre entier positif ou négatif qui est moindre que la quantité n, par $R(n)$ le reste, qui est par consequent nul ou positif, et par λ_p la fonction

$$(x - a_1)^{R\left(\frac{pk_1}{m_1}\right)} (x - a_2)^{R\left(\frac{pk_2}{m_2}\right)} \ldots (x - a_n)^{R\left(\frac{pk_n}{m_n}\right)};$$

les λ_p sont donc les mêmes que les s_m du "Mémoire sur une propriété générale etc." n° 10 (T. 1, p. 193). Par le raisonnement de la page 214 il est démontré que, s'il existe entre les intégrales $R_0, R_1, \ldots R_{n-2}, t_1, t_2, \ldots t_\mu$, une relation:

$$c_0 R_0 + \cdots + c_{n-2} R_{n-2} + \varepsilon_1 t_1 + \cdots + \varepsilon_\mu t_\mu = P + \alpha_1 \log v_1 + \cdots + \alpha_m \log v_m,$$

il est permis de supposer que le second membre soit de la forme

$$r_{\nu-1}\lambda_{\nu-1} + \Sigma\alpha\Sigma\omega^{k'}\log\left[\Sigma(s_k\lambda_k\omega^{kk'})\right],$$

où évidemment on peut supposer les fonctions $s_0, s_1, \ldots s_{\nu-1}$ entières. C'est la forme analogue à celle

$$r\,\varDelta x + \Sigma A \log\frac{fx + \varphi x . \varDelta x}{fx - \varphi x . \varDelta x},$$

qu'Abel a donnée au second membre pour le cas des fonctions elliptiques. Le raisonnement peut être poursuivi en parfaite analogie avec le troisième chapitre du "Précis d'une théorie des fonctions elliptiques"; on démontrera ainsi qu'on a $r_{\nu-1} = 0$, et qu'en supposant tous les coefficiens α nuls excepté un seul, on a les relations d'où toutes les autres se déduissent par voie d'addition.

Aux pages 215, 216 il paraît qu'Abel regarde les constantes des fonctions $s_0, s_1, \ldots s_{\nu-1}$ comme des quantités indéterminées Le reste de ces notices est trop inachevé pour être reproduit; il faut nous contenter d'indiquer ici le contenu. Abel a d'abord cherché une expression de la fonction p; s'il n'y avait pas une faute de calcul, le resultat aurait été que p est égal au terme constant dans le développement de $\frac{\varphi\alpha}{F\alpha}\cdot\frac{\alpha}{\alpha - x}$ suivant les puissances descendantes de α. Plus bas il a déterminé le nombre θ des coefficiens indéterminés qu'il est possible d'introduire dans la formule. Si l'on fait

$$\nu = m_1 . m_1' = m_2 . m_2' = \cdots = m_n . m_n',$$

$$\frac{k_1}{m_1} + \frac{k_2}{m_2} + \cdots + \frac{k_n}{m_n} = \frac{\nu'}{\nu} = \frac{\nu'''}{\nu''}, \quad \nu = \nu_1\nu'',$$

ν'' et ν''' étant premiers entre eux, on a

$$\theta = \mu - 1 + \frac{\nu + \nu_1}{2} - \frac{n\nu - m_1' - m_2' - \cdots - m_n'}{2},$$

de sorte qu'en désignant par θ' le nombre des paramètres qui dépendent des autres, on a

$$\theta' = \mu - \theta = \tfrac{1}{2}\left[(n-1)\nu - \nu_1 - m_1' - m_2' - \cdots - m_n'\right] + 1.$$

Le calcul contient quelques fautes et aboutit à une valeur inexacte, mais le résultat correct est annoté à la marge. Cette valeur de θ' est précisément celle qu'on déduit de la formule (172) t. I, p. 198 pour le nombre $\mu - \alpha$, en appliquant cette formule à l'intégrale $\int\frac{fx . dx}{\lambda_1}$.

Enfin il note ce théorème:

"*Si* $\int\frac{p\,dx}{\lambda_1}$, *où* p *est une fonction entière, est intégrable par des logarithmes, le degré* "*de* λ_1 *doit être un nombre entier, et le degré* p *moindre d'une unité que celui de* λ_1, *et* "*on aura*

$$\int\frac{p\,dx}{\lambda_1} = A\,\theta(x, \lambda_1)\text{"},$$

et il se propose de traiter l'exemple suivant:

"*Trouver toutes les différentielles de la forme* $p\,dx = x^{\frac{m}{n}}(1-x)^{\frac{\mu}{\nu}}\,dx$ *qui sont inté-*
"*grables à l'aide des fonctions algébriques et logarithmiques*"
sans toutefois le terminer.

Sylow.

Le mémoire XVIII est la reproduction du dernier morceau des manuscrits d'Abel qui traite de la théorie des équations résolubles par radicaux. Il date de la seconde moitié de l'an 1828, et fut imprimé pour la première fois en 1839 dans l'édition de *Holmboe*.

Le passage qui commence p. 234 par les mots: "*De là on tirera*", et finit par la formule (a), est rayé dans le manuscrit et se trouve immédiatement après la troisième ligne de la même page. En intercalant ce passage plus bas, nous avons suivi *Holmboe*, mais en conservant, ici et p. 235, les termes q_0, qu'il avait supprimé à tort. C'est le seul changement du texte d'Abel que nous avons fait, sauf quelques fautes de calcul ou d'écriture.

La première partie de l'introduction, jusqu'à l'énoncé du problème "*Trouver l'équation la moins élevée à laquelle une fonction algébrique puisse satisfaire*" (p. 221), a été remaniée par Abel; la rédaction nouvelle et abrégée se trouve à la marge du manuscrit à côté de la première. Comme *Holmboe* nous avons cru devoir préférer la première, surtout parce qu'Abel s'y prononce sur la méthode qu'il faut suivre dans les recherches mathématiques. Toutefois la seconde rédaction ne laisse pas d'avoir certains avantages sur la première, c'est pourquoi nous la reproduisons ici:

NOUVELLE THÉORIE DE LA RÉSOLUTION ALGÉBRIQUE DES ÉQUATIONS.

"La théorie des équations a toujours été regardée comme une des plus intéressantes "parties de l'analyse. Des géomètres de premier rang s'en sont occupés, et l'ont beau- "coup enrichie. C'est surtout aux travaux excellens de *Lagrange* qu'on doit une con- "naissance profonde de cette partie des mathématiques. On s'est beaucoup attaché à "trouver la résolution algébrique des équations, mais on n'a pu y réussir généralement "pour des équations supérieures au quatrième degré. Tant d'efforts inutiles des géomè- "tres les plus distingués ont fait présumer que la résolution algébrique des équations "générales était impossible. On a cherché à en donner la démonstration, mais il paraît "que l'impossibilité de la résolution n'est pas encore rigoureusement établie. L'auteur de "ce mémoire s'est occupé pendant longtemps de cette question intéressante, et il croit "être parvenu à y répondre d'une manière satisfaisante. Il a donné un premier essai "sur ce sujet dans un mémoire imprimé dans le premier cahier de ce journal, mais "quoique le raisonnement qu'il a employé paraisse être rigoureux, il faut cependant "avouer que la méthode dont il a fait usage laisse beaucoup à désirer. J'ai repris de "nouveau la question dont il s'agit, et en me proposant des problèmes beaucoup plus "généraux, je suis, si je ne me trompe, parvenu à montrer clairement à quoi tient véri- "tablement l'impossibilité de la résolution des équations générales".

"S'il est impossible de résoudre les équations générales, il est du moins très pos- "sible d'en trouver une infinité de cas particuliers qui jouiront de cette propriété. Il en

"existe une infinité pour chaque degré. Cela est établi depuis longtemps, mais personne "n'a considéré le problème sous un point de vue général. C'est ce que je tacherai de "faire dans ce mémoire, en traitant la solution de ce problème:

Une équation d'un degré quelconque étant proposée, reconnaître si elle pourra être satisfaite algébriquement, ou non".

"La solution complète de ce problème doit nécessairement conduire à tout ce qui "concerne la résolution algébrique des équations. Une analyse raisonnée nous conduira "comme on va voir, à des théorèmes importans sur les équations, principalement relatifs "à la forme des racines. Ce sont les propositions générales plutôt que la solution elle-"même qui sont le point le plus important, car il est une question de pure curiosité que "de demander si une équation particulière est résoluble ou non. J'ai donné au problème "la forme énoncée ci-dessus, parce que la solution ne peut manquer de conduire à des "résultats généraux".

"Je vais d'abord donner l'analyse du problème avec les résultats les plus importans "auxquels je suis parvenu".

"D'abord nous devons fixer précisément ce que nous entendrons par la résolubilité "algébrique d'une équation. Lorsque l'équation est générale, cela veut dire, suivant la "conception généralement adoptée de cette expression, que toutes les racines de l'équation "sont exprimables *par les coefficiens* à l'aide des opérations *algébriques*. Les racines "sont alors des fonctions algébriques des coefficiens et leur expression pourra contenir "un nombre quelconque de quantités constantes, algébriques ou non. Mais si l'équation "n'est pas générale, ce qui est le cas que nous considérons, j'ai cru devoir, pour avoir la "plus grande généralité possible, faire les distinctions suivantes:

"Étant données un nombre quelconque de quantités $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots$, indéterminées "ou non, nous appellerons *expression radicale* de ces quantités toute quantité qu'on en "pourra former à l'aide des opérations suivantes: Addition, Soustraction, Multiplication, "Division, Extraction de racines avec des exposans qui sont des nombres premiers".

"Une équation algébrique quelconque est dite pouvoir être *satisfaite* algébriquement "en des quantités quelconques, $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$, si on la satisfera, en mettant pour l'in-"connue une expression radicale de $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$."

"Une équation algébrique est *résoluble* algébriquement par rapport aux quantités "$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$, si toutes les racines peuvent être représentées par des expressions ra-"dicales de $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$."

"Nous avons distingué les équations qui pourront être satisfaites algébriquement de "celles qui sont résolubles algébriquement, puisqu'il y a, comme on sait, des équations "dont l'une ou plusieurs des racines sont algébriques, sans qu'on puisse affirmer la même "chose par rapport à toutes les racines".

"Cela posé, le problème qui va être l'objet de nos recherches est le suivant:

Étant proposée une équation algébrique quelconque, reconnaître si cette équation pourra être satisfaite par une expression radicale des quantités données $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$."

"La marche naturelle pour résoudre ce problème se prête d'elle-même. En effet il "faut substituer à la place de l'inconnue l'expression radicale la plus générale de

"$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ et voir ensuite si elle pourra être satisfaite de cette manière. De là "naît d'abord ce problème:

Trouver l'expression radicale la plus générale en $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$.

"La solution de ce problème doit donc être l'objet de nos premières recherches. Nous "la donnerons dans un premier chapitre".

"On peut, comme on sait, donner à la même expression radicale une infinité de "formes différentes. De toutes ces formes nous chercherons celle qui contient le nombre "le plus petit possible de radicaux, et qui est par là en quelque sorte irréductible".

"Cela posé, la première propriété de cette expression doit être de satisfaire à une "équation algébrique; or cette condition est, comme on sait, remplie d'elle même; car "toute expression radicale de $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ peut satisfaire à une équation algébrique "dont les coefficiens sont rationnels en $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$. Or une même expression radi-"cale peut satisfaire à une infinité d'équations différentes; il y a donc deux cas à con-"sidérer: ou l'équation proposée est la moins élevée à laquelle puisse satisfaire l'expression "radicale, ou cette expression peut satisfaire à une autre d'un degré moindre. Donc le "problème général se divise en ces deux-ci:

1. Étant proposée une équation quelconque, reconnaître si une de ses racines pourra satisfaire à une équation moins élevée dont les coefficiens sont rationnels en $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$. Si cela est impossible, nous dirons que l'équation est irréductible par rapport aux quantités $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$.
2. Reconnaître si une équation irréductible pourra être satisfaite algébriquement ou non".

"Nous ne considérons dans ce mémoire que le dernier de ces problèmes comme "celui qui est incomparablement d'une plus grande importance".

"Cela posé, on aura d'abord ce problème:

Trouver l'équation la moins élevée à laquelle une expression radicale puisse satisfaire."

Quoique en commençant Abel eût évidemment l'intention d'écrire un exposé complet de sa théorie des équations résolubles par radicaux, son travail n'est pour la majeure partie devenue qu'une ébauche. Il faut bien avouer que cette ébauche contient quelques expressions peu exactes, quelques notions un peu vagues, et qu'il y a même quelques lacunes dans les démonstrations; mais ces imperfections ne sont pas essentielles, et les difficultés qui en naissent peuvent facilement être levées, ce qu'il n'est pas aujourd'hui difficile de faire voir.

Observons d'abord que le but du § 2 étant de déterminer l'équation irréductible qui est satisfaite par une expression algébrique donnée, il n'est dans ce paragraphe question d'autres expressions algébriques que celles qui peuvent être formées par les mêmes radicaux qui se trouvent dans l'expression primitive, ou plutôt par les différentes valeurs qu'ils peuvent prendre. Soient

$$\sqrt[\mu_1]{R_1}, \ \sqrt[\mu_2]{R_2}, \ \ldots \sqrt[\mu_n]{R_n}$$

ces radicaux, rangés de telle sorte qu'ils peuvent être évalués numériquement dans l'ordre où ils sont écrits; "le radical extérieur" d'une expression algébrique est le dernier des

radicaux énumérés qu'elle contient; il faut en effet supposer, comme le cas le plus général, que la quantité R_m contienne les radicaux $\sqrt[\mu_1]{R_1}, \ldots \sqrt[\mu_{m-1}]{R_{m-1}}$. L'ordre d'une expression n'est pas précisément le nombre de radicaux qu'elle contient, mais plutôt le nombre marquant le rang qu'occupe son radical extérieur. Si l'on voulait prendre la définition d'Abel à la lettre, le théorème III serait en défaut dans beaucoup de cas.

Dans la démonstration du théorème I (p. 229) Abel déclare impossible l'équation

$$z = y_1^{\frac{1}{\mu_1}} = -s_0 .$$

En effet, dans le cas contraire z satisferait à une équation irréductible dont les coefficiens ne contiendrait pas ω, et dont le degré k' serait moindre que μ_1. En désignant le dernier terme de cette équation par a, on aurait

$$\omega^r y_1^{\frac{k'}{\mu_1}} = \pm a;$$

mais en faisant

$$k'k'' = 1 + h\mu,$$

on en tirerait

$$\omega^{k''r} y_1^{\frac{1}{\mu_1}} = \pm a y_1^{-h},$$

ce qui est contre l'hypothèse.

Les démonstrations des théorèmes IV et V supposent non seulement que l'équation $\varphi(y, m) = 0$ soit irréductible, mais encore que la fonction $\varphi(y, m)$ n'ait aucun facteur dont les coefficiens sont des fonctions rationnelles des radicaux $y_1^{\frac{1}{\mu_1}}$, $y_2^{\frac{1}{\mu_2}} \ldots$, des quantités connues et de ω. Dans le cas contraire il arrive quelquefois que l'équation $\Pi\varphi(y, m) = 0$, est une puissance de l'équation irréductible; par exemple pour l'équation

$$\varphi(y, 1) = y^2 + a^{\frac{1}{2}} y + a^{\frac{1}{2}} = 0.$$

Nous ferons voir plus bas qu'on peut toujours diriger les opérations nécessaires pour chasser les radicaux de manière à éviter les cas d'exception.

Enfin le passage qui commence par les mots: "*En ajoutant il viendra*" p. 234, et finit p. 235 par les mots: "*$p_1^\mu s$ doit donc satisfaire à une équation qui est tout au plus du degré $\mu - 1$*", n'est pas à l'abri d'objections fondées. En effet, de la circonstance que $s^{\frac{1}{\mu}}$ s'exprime rationnellement par $s, s', p_1, p_1', \ldots p_{\mu-1}, p'_{\mu-1}$, sans que $s', p_1', \ldots p'_{\mu-1}$, soient des fonctions rationnelles de $s, p, \ldots p_{\mu-1}$, il ne s'ensuit pas immédiatement que le degré de l'équation sera un nombre composé. Mais en mettant au lieu de $s^{\frac{1}{\mu}}$ une fonction rationnelle de $s, s', p_1, p_1' \ldots p_{\mu-1}, p'_{\mu-1}$, on a effectué une espèce de simplification de l'expression de la racine z_1, et on peut supposer cette simplification opérée partout où elle est possible.

Il n'est pas en effet difficile de faire subir à l'expression algébrique donnée une transformation préalable telle que les raisonnemens d'Abel peuvent être appliqués avec



quelques modifications légères. Supposons les radicaux contenus dans l'expression algébrique donnée rangés dans l'ordre de l'évaluation numérique, et soit $r_0^{\frac{1}{\mu_0}}$ le premier d'eux, ω_0 une racine $\mu_0^{\text{ème}}$ imaginaire de l'unité. Puisqu'il faut bien admettre que l'expression donnée pourra contenir toutesles μ_0 valeurs du radical $r_0^{\frac{1}{\mu_0}}$, nous comptons comme son premier groupe d'irrationnelles ω_0, $r_0^{\frac{1}{\mu_0}}$. Si parmi les autres radicaux il y en a qui s'expriment en fonction rationnelle des quantités connues, ω_0 et $r_0^{\frac{1}{\mu_0}}$, ils peuvent être éliminés; soit $r_1^{\frac{1}{\mu_1}}$ le premier des radicaux restans, et ω_1 une racine $\mu_1^{\text{ème}}$ imaginaire de l'unité. Or la quantité r_1, pouvant conténir ω_0 et $r_0^{\frac{1}{\mu_0}}$, est succeptible d'un certain nombre de valeurs différentes, que nous désignerons par r_1, r_1', r_1'', ..., et il faut admettre que l'expression donnée pourra contenir non seulement $r_1^{\frac{1}{\mu_1}}$, mais aussi $r_1'^{\frac{1}{\mu_1}}$, $r_1''^{\frac{1}{\mu_1}}$, ... Supposons maintenant que tous ces radicaux s'expriment rationnellement par un certain nombre d'entre eux: $r_1^{\frac{1}{\mu_1}}$, $r_1'^{\frac{1}{\mu_1}}$, ... $(r_1^{(\varepsilon_1-1)})^{\frac{1}{\mu_1}}$, et par $r_0^{\frac{1}{\mu_0}}$, ω_0 et les quantités connues, le nombre ε_1 étant réduit à son minimum. Cela posé, le deuxième groupe d'irrationnelles sera:

$$\omega_1,\ r_1^{\frac{1}{\mu_1}},\ r_1'^{\frac{1}{\mu_1}},\ \ldots (r_1^{(\varepsilon_1-1)})^{\frac{1}{\mu_1}}.$$

Si ces deux groupes d'irrationnelles ne suffisent pas, il faut ajouter un troisième groupe, et ainsi de suite. Voici donc le tableau des irrationelles dont se compose l'expression algébrique donnée:

$$\omega_0,\ r_0^{\frac{1}{\mu_0}};$$
$$\omega_1,\ r_1^{\frac{1}{\mu_1}},\ r_1'^{\frac{1}{\mu_1}},\ \ldots (r_1^{(\varepsilon_1-1)})^{\frac{1}{\mu_1}};$$
$$\omega_2,\ r_2^{\frac{1}{\mu_2}},\ r_2'^{\frac{1}{\mu_2}},\ \ldots (r_2^{(\varepsilon_2-1)})^{\frac{1}{\mu_2}};$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

On place les racines de l'unité avant les radicaux du groupe, l'ordre de ceux-ci restant arbitraire. Dans des cas spéciaux l'expression donnée ne contient pas toutes ces irrationnelles, mais elle contient toujours au moins un radical de chaque groupe. Une des pages suivantes du manuscrit contient un tableau identique à celui que nous venons d'écrire, avec la seule différence que les ω n'y sont pas expressément mentionnés. Or ils peuvent bien être exprimés par radicaux, mais il est aussi simple de les conserver. Quand nous parlons des valeurs dont ils sont susceptibles, il faut par cela entendre les racines de l'équation irréductible qui définit ω au moyen des quantités connues et des irrationnelles des groupes précédens. Quelles que soient ces dernières, les valeurs de ω sont toujours exprimées par

$$\omega,\ \omega^{\delta},\ \omega^{\delta^2},\ \ldots\ \omega^{\delta^{\nu-1}},$$

$1, \delta, \delta^2, \ldots \delta^{\nu-1}$ étant les solutions différentes de la congruence $\delta^{\nu} \equiv 1 \pmod{\mu}$, ν étant un diviseur de $\mu - 1$. Pour chasser les ω on a évidemment un théorème analogue au théorème IV, qu'on peut énoncer comme il suit:

Si l'équation

$$f(x, \omega_i) = 0$$

dont les coefficiens contiennent, outre ω_i, les irrationnelles des i premiers groupes, est irréductible,

$$\Pi' f(x, \omega_i) = f(x, \omega_i) \cdot f(x, \omega_i^{\delta}) f(x, \omega_i^{\delta^2}) \ldots f(x, \omega_i^{\delta^{\nu'-1}}) = 0$$

est aussi une équation irréductible dont les coefficiens s'expriment rationnellement par les irrationnelles des i premiers groupes, ν' étant le plus petit nombre pour lequel on ait

$$f(x, \omega_i^{\delta^{\nu'}}) = f(x, \omega_i).$$

Évidemment ν' est un diviseur de ν, et égal au produit des exposans de certains radicaux qui servent à exprimer ω_i par les irrationnelles des groupes précédens.

L'expression algébrique donnée a_m étant préparée comme nous avons indiqué, on peut chasser successivement toutes les irrationnelles de l'équation

$$y - a_m = 0,$$

en suivant l'ordre inverse de celui du tableau; on trouvera ainsi nécessairement l'équation irréductible dont les coefficiens sont des fonctions rationnelles des quantités connues, car évidemment on ne rencontrera pas le cas où le théorème V est en défaut.

En désignant maintenant par $\omega, S^{\frac{1}{\mu}}, S_1^{\frac{1}{\mu}}, \ldots S_{\varepsilon-1}^{\frac{1}{\mu}}$ le dernier groupe d'irrationnelles, l'expression algébrique donnée a la forme suivante

$$\Sigma p_{m, m_1, \ldots m_{\varepsilon-1}} S^{\frac{m}{\mu}} S_1^{\frac{m_1}{\mu}} S_{\varepsilon-1}^{\frac{m_{\varepsilon-1}}{\mu}},$$

$m, m_1, \ldots m_{\varepsilon-1}$ ayant toutes les combinaisons des valeurs $0, 1, 2, \ldots (\mu-1)$. Or, si le degré de l'équation est μ, il faut qu'en remplaçant $S_i^{\frac{1}{\mu}}$ par $\omega S_i^{\frac{1}{\mu}}$, on a la même valeur qu'en substituant $\omega^r S^{\frac{1}{\mu}}$ au lieu de $S^{\frac{1}{\mu}}$. On en conclut que l'expression doit être spécialisée de la manière suivante

$$\Sigma p_m S^{\frac{m}{\mu}} S_1^{\frac{mn_1}{\mu}} \ldots S_{\varepsilon-1}^{\frac{mn_{\varepsilon-1}}{\mu}}, \qquad [m = 0, 1, 2 \ldots (\mu-1)]$$

ou bien, en écrivant s au lieu de $S S^{n_1} \ldots S^{n_{\varepsilon-1}}$,

$$\Sigma p_m s^{\frac{m}{\mu}},$$

où évidemment $s^{\frac{1}{\mu}}$ ne peut être exprimé rationnellement par les radicaux des groupes

précédens. Si maintenant on applique le raisonnement des pages 234, 235, il est évident qu'on a $q_0 = 0$, $t_1 = t_2 = \cdots = t_{\mu-1} = 0$, et que par suite

$$p_1'^{\mu} s' = p_{\nu}^{\mu} \; s^{\nu}.$$

La dernière partie du mémoire, à partir de la page 236, ne consiste qu'en des notices abrégées; il paraît qu'Abel, n'étant pas satisfait de ce qu'il avait écrit, à cessé d'y voir la rédaction finale du mémoire qu'il voulait publier. Néanmoins les pages 236—240 forment une déduction continue qui n'est pas difficile à suivre. P. 236, 237 il est démontré que les quantités $p_2, p_3 \ldots p_{\mu-1}$ sont des fonctions rationnelles de s et des quantités connues. Dans la dernière partie de la page 236 la lettre ν désigne le nombre $2 . 3 \ldots (\mu - 1)$; $q_1, q_2, \ldots q_\nu$ sont les valeurs que prend q_1, ou $p_m\, s$, quand on permute les racines $z_1, z_2, \ldots z_\mu$ de toutes les manières; $s_1, s_2, \ldots s_\nu$ sont les valeurs correspondantes de s. Il est facile de voir que les quantités $a_0, a_1, \ldots a_{\nu-1}$ s'expriment rationnellement par les quantités connues sans ω. Les pages 237—239 contiennent l'étude de l'équation irréductible en s; il est démontré qu'elle appartient à la classe d'équations traitée dans le mémoire XXV, § 3 (t. I, p. 488). P. 238 il faut compléter les formules

$$s_1^{\frac{1}{\mu}} = p_1 s^{\frac{m^{n\beta}}{\mu}}$$

etc. par la remarque, facile à démontrer, qu'on peut faire $n = 1$. Enfin les formules de la page 240 contiennent le résultat des recherches pour le cas où le degré est un nombre premier. Les équations

$$s^{\frac{1}{\mu}} = A . a^{\frac{1}{\mu}} . a_1^{\frac{m^\alpha}{\mu}} . a_2^{\frac{m^{2\alpha}}{\mu}} \ldots a_{\nu-1}^{\frac{m^{(\nu-1)\alpha}}{\mu}}$$

etc. se déduisent facilement de celles de la page 239. En effet, en faisant $fs = p$, $fs_1 = p_1$ etc., on a

$$s^{\frac{1}{\mu}} = p_{\nu-1} . p_{\nu-2}^{m^\alpha} . p_{\nu-3}^{m^{2\alpha}} \ldots p^{m^{(\nu-1)\alpha}} . s^{\frac{m^{\nu\alpha}}{\mu}};$$

d'où l'on tire, en posant $m^{\nu\alpha} - 1 = \mu . r$,

$$s^r = p_{\nu-1}^{-1} . p_{\nu-2}^{-m^\alpha} . p_{\nu-3}^{-m^{2\alpha}} \ldots p^{-m^{(\nu-1)\alpha}}.$$

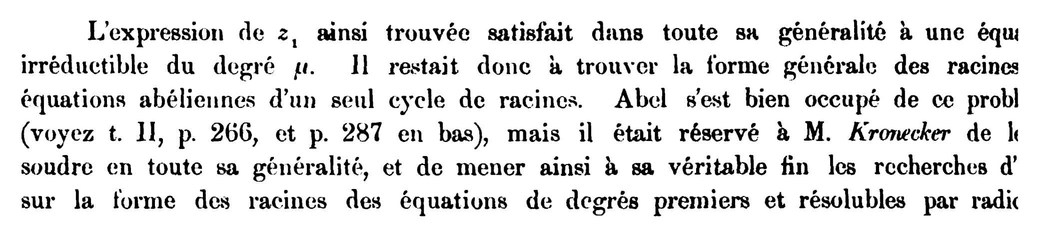
En supposant maintenant, ce qui est permis, que r ne soit pas divisible par μ, on peut faire

$$r . r' = 1 + h\mu,$$

d'où

$$s^{\frac{1}{\mu}} = s^{-h} . (p_{\nu-1}^{-r'})^{\frac{1}{\mu}} . (p_{\nu-2}^{-r'})^{\frac{m^\alpha}{\mu}} . (p_{\nu-3}^{-r'})^{\frac{m^{2\alpha}}{\mu}} \ldots (p^{-r'})^{\frac{m^{(\nu-1)\alpha}}{\mu}},$$

ce qui donne la formule citée, en remplaçant s^{-h}, $p_{\nu-1}^{-r'}$, $p_{\nu-2}^{-r'}$, $p_{\nu-3}^{-r'} \ldots p^{-r'}$ par A, a, a_1, a_2, $\ldots a_{\nu-1}$. La quantité a, étant fonction rationnelle de s, est racine d'une équation de la même espèce et du même degré que l'équation en s; de plus on voit facilement que l'équation en a du degré ν est irréductible. Par conséquent la quantité A ou s^{-h} est fonction rationnelle de a.


L'expression de z_1 ainsi trouvée satisfait dans toute sa généralité à une équ irréductible du degré μ. Il restait donc à trouver la forme générale des racines équations abéliennes d'un seul cycle de racines. Abel s'est bien occupé de ce probl (voyez t. II, p. 266, et p. 287 en bas), mais il était réservé à M. *Kronecker* de l soudre en toute sa généralité, et de mener ainsi à sa véritable fin les recherches d' sur la forme des racines des équations de degrés premiers et résolubles par radi

Nous interprétons les formules des pages 241, 242 de la manière suivante. désigne par $\psi y = 0$ une équation irréductible résoluble par radicaux. Si par le pro du § 2 on remonte de l'équation $y - a_m = 0$ jusqu'à l'équation donnée, l'avant-der équation est désignée par $\varphi(y, s) = 0$, de sorte qu'on ait $\Pi \varphi(y, s) = \psi(y)$, s étai dernier radical qui détermine une élévation du degré, μ son exposant, $s, s', s'', \ldots$ ses μ valeurs. La lettre ϱ désigne une expression algébrique, formée par ω et pa irrationnelles des groupes précédens, et tellement choisie qu'il est possible d'expr chacune d'elles par une fonction rationnelle de ϱ et des quantités connues; c'est l moyen dont Abel s'est servi dans une autre occasion (voyez t. I, p. 546, 547). L'é tion irréductible en ϱ, $\varphi \varrho = 0$, est du degré ν; $\varrho, \varrho_1, \ldots \varrho_{\nu-1}$ sont ses racines; cune d'elles s'exprime en fonction rationnelle de ϱ. En suite $\varphi(s, \varrho) = 0$ est l'équ à deux termes qui définit s; en mettant ϱ_i pour ϱ, cette équation devient $\varphi(s,$ dont les racines sont $s_i, s_i', s_i'', \ldots s_i^{(\mu-1)}$.

Dorénavant l'équation qui était d'abord désignée par $\varphi(y, s) = 0$, s'appelle $f(y, s, \varrho$ Comme dans le cas des équations de degrés premiers il est permis de supposer que équation ne contient pas les radicaux $s_1, s_2, \ldots s_{\nu-1}$; elle est irréductible par quantités $s, \varrho, \varrho_1, \ldots \varrho_{\nu-1}$. Or, puisqu'on a

$$\psi(y) = \Pi f(y, s, \varrho) = \Pi f(y, s_1, \varrho_1) = \cdots = \Pi f(y, s_{\nu-1}, \varrho_{\nu-1}),$$

on peut supposer que toutes les équations

$$f(y, s, \varrho) = 0, \; f(y, s_1, \varrho_1) = 0, \; \ldots f(y, s_{\nu-1}, \varrho_{\nu-1}) = 0$$

ont une racine commune; l'équation qui contient toutes les racines communes à ces é tions est designée par

$$F(y, s, s_1, \ldots s_{\nu-1}, \varrho, \varrho_1, \ldots \varrho_{\nu-1}) = 0.$$

Cela posé, Abel suppose que $s_\varepsilon, s_{\varepsilon-1}, \ldots s_{\nu-1}$ s'expriment en fonction ration de $\varrho, \varrho_1, \ldots \varrho_{\nu-1}$ et de $s, s_1, \ldots s_{\varepsilon-1}$, mais qu'aucun de ces derniers radicaux ne exprimable en fonction des autres et de $\varrho, \varrho_1, \ldots \varrho_{\nu-1}$. Dans cette conditio affirme que

$$F(y, s, s_1, \ldots s_{\nu-1}, \varrho, \varrho_1, \ldots \varrho_{\nu-1})$$

divise ψy pour toutes les valeurs de $s, s_1, \ldots s_{\varepsilon-1}$, et que par suite le degré de est divisible par μ^ε.

Soit pour le démontrer $\Phi(y, s, s_1, \ldots s_{\varepsilon-1})$ le plus grand diviseur commun ε fonctions $f(y, s, \varrho), f(y, s_1, \varrho_1) \ldots f(y, s_{\varepsilon-1}, \varrho_{\varepsilon-1})$; alors $\Phi(y, s^{(\alpha)}, s_1^{(\beta)}, \ldots s_{\varepsilon-1}^{(\zeta)})$ le plus grand diviseur commun des fonctions $f(y, s^{(\alpha)}, \varrho), f(y, s_1^{(\beta)}, \varrho_1), \ldots f(y, s_{\varepsilon-1}^{(\zeta)}, \varrho_\varepsilon$ d'où il est facile de conclure qu'on a



$$\Pi^\varepsilon \Phi(y, s, s_1, \dots s_{\varepsilon-1}) = \psi(y)$$

Il s'ensuit que l'équation $\Phi(y, s, s_1, \dots s_{\varepsilon-1})$ est irréductible; en effet, puisque l'équation $f(y, s, \varrho) = 0$ est irréductible, $\Pi f(y, s, \varrho)$ ou ψy ne peut avoir de racine commune avec une équation d'un degré moins élevé dont les coefficiens sont rationnels en ϱ, ce qui aurait nécessairement lieu, si l'équation $\Phi(y, s, s_1, \dots s_{\varepsilon-1}) = 0$ était réductible. De plus cette équation a toutes ses racines communes avec $f(y, s_{\varepsilon+n}, \varrho_{\varepsilon+n}) = 0$, puisque $s_{\varepsilon+n}$ est une fonction rationnelle de $s, s_1, \dots s_{\varepsilon-1}, \varrho, \varrho_1, \dots \varrho_{\nu-1}$. Donc $\Phi(y, s \dots s_{\varepsilon-1})$ est identique à $F(y, s \dots s_{\nu-1}, \varrho \dots \varrho_{\nu-1})$.

Si maintenant on donne aux radicaux qui entrent dans l'expression ϱ des valeurs nouvelles, et qu'on désigne par S_i la valeur correspondante de s_i, on a

$$\Pi^\varepsilon \Phi(y, S, S_1, \dots S_{\varepsilon-1}) = \psi y,$$

d'où l'on conclut que $\Phi(y, S, S_1, \dots S_{\varepsilon-1})$ a un facteur commun avec l'une des fonctions $\Phi(y, s^{(\alpha)}, s_1^{(\beta)}, \dots s_{\varepsilon-1}^{(\zeta)})$. Cela étant, ces deux fonctions sont identiques, donc la quantité z ou $\Phi(\alpha, s, s_1, \dots s_{\varepsilon-1})$ a seulement μ^ε valeurs distinctes.

Il faut donc dire que les notices des pages 241, 242 indiquent une démonstration rigoureuse de la proposition 2, p. 222.

Dans cette démonstration on pourra d'ailleurs se débarrasser de la quantité ϱ dès le commencement. Supposons en effet qu'à deux valeurs différentes de ϱ il réponde une même valeur de s^μ, on aura

$$\Pi f(y, s, \varrho) = \Pi f(y, s, \varrho_1), \text{ d'où l'on tire } f(y, s, \varrho_1) = f(y, \omega^i s, \varrho).$$

Soit maintenant

$$c = \Sigma p_m s^m$$

un coefficient de la fonction $f(y, s, \varrho)$, et

$$c' = \Sigma p_m' s^m$$

le coefficient correspondant de $f(y, s, \varrho_1)$, on aura

$$p_m' = \omega^{mi} p_m.$$

Or on peut faire, dans l'un de ces coefficiens, l'une des quantités p_m égale à l'unité. Alors on a $\omega_i = 1$, donc généralement $p_m' = p_m$; cela étant, p_m peut être exprimé en fonction rationnelle de s^μ. Les coefficiens de $f(y, s, \varrho)$ sont donc des fonctions rationnelles de s.

Si maintenant le degré de l'équation donnée est μ^ε, la fonction $\Phi(y, s, s_1, \dots s_{\varepsilon-1})$ est du premier degré, d'où il suit que y est une fonction entière et même symétrique de $s, s_1, \dots s_{\varepsilon-1}$. C'est la proposition 4, p. 223; évidemment cette proposition n'a lieu que lorsque la décomposition mentionnée dans la proposition 2 est impossible. La démonstration de celle-ci s'achève comme pour les équations du degré μ.

La citation de Lagrange p. 223 doit sans doute être rapportée au Traité de la résolution des équations numériques, Note XIII, dont les numéros 14—22 conviennent aux équations dont les degrés sont des nombres premiers, les numéros 25—27 aux

équations qui se décomposent en vertu des propositions 2 et 3. Quant aux éq tions qu'on nomme aujourd'hui primitives, les propositions 2 et 4 conduisent à u équation du degré

$$\frac{2 \cdot 3 \ldots (\mu^\alpha - 2)}{(\mu^\alpha - \mu)(\mu^\alpha - \mu^2) \ldots (\mu^\alpha - \mu^{\alpha-1})},$$

qui doit avoir une racine rationnelle en quantités connues.

Les formules de la page 243 ne sont qu'une répétition de celles des pages pr dentes.

Sylow.

XIX. *Fragmens sur les fonctions elliptiques.* Les numéros I et II sont, croy nous, des fragmens d'un même mémoire qui paraît dater de la première partie de 1828. Le numéro III se rattache au mémoire intitulé Théorèmes sur les fonctions liptiques (t. I, p. 508). A l'égard du numéro II voyez d'ailleurs la note relative page 523 du premier tome (t. II, p. 314, 315).

XX—XXIII. *Lettres d'Abel.* Pages 254, 255 nous avons imprimé les trois miers théorèmes exactement comme nous les avons trouvés écrits dans la lettre d'A quoiqu'ils paraissent contenir quelques incorrections. Après le quatrième théorème avons supprimé un passage qui dans l'original n'est pas achevé.

Dans la lettre d'Abel à *Legendre* p. 272, 273 nous avons corrigé quelques fa d'écriture évidentes. Page 275, où la valeur de $f\left(x \frac{\omega}{\pi}\right)$ est évidemment erroné où les valeurs de q et p sont échangées entre elles, nous n'avons pas cru devoir tou au texte d'Abel.

Sylow.



TABLE POUR FACILITER LA RECHERCHE DES CITATIONS.

(La colonne *A* contient les chiffres du tome et des pages qu'occupe chaque mémoire dans l'édition de *Holmboe*. La colonne *B* contient les chiffres correspondans dans le Journal de *Crelle* (J. d. C.), les Astronomische Nachrichten de *Schumacher* (A. N.), dans les Annales de *Gergonne* (A. d. G.), ou dans les Mémoires présentés par divers Savants (S. E.). La colonne *C* contient les chiffres correspondans de la présente édition.)

	A.	*B.*	*C.*
Recherche des fonctions de deux quant. variables...	I, 1—4.	J. d. C., I, 11—15.	I, 61—65.
Démonstr. de l'imposs. de la rés. algéb. des équations...	I, 5—24.	J. d. C., I, 65—84.	I, 66—87.
Remarque sur le mém. N° 4... du Journ. de *Crelle*.	I, 25—26.	J. d. C., I, 117—118.	I, 95—96.
Résolution d'un problème de mécanique. . . .	I, 27—30.	J. d. C., I, 153—157.	I, 97—101.
Démonstr. d'une express. de laquelle la form. binôme...	I, 31—32.	J. d. C., I, 159—160.	I, 102—103.
Sur l'intégration de la form. différentielle $\frac{\varrho\,dx}{\sqrt{R}}$...	I, 33—65.	J. d. C., I, 185—221.	I, 104—144.
Recherches sur la série $1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2+\cdots$	I, 66—92.	J. d. C., I, 311—339.	I, 219—250.
Sur quelques intégrales définies	I, 93—102.	J. d. C., II, 22—30.	I, 251—262.
Sur les fonctions... $\varphi x+\varphi y=\psi(xfy+yfx)$	I, 103—110.	J. d. C., II, 386—394.	I, 389—398.
Note sur un mémoire de M. *L. Olivier*	I, 111—113.	J. d. C., III, 79—81.	I, 399—402.
Mémoire sur une classe particulière d'équations...	I, 114—140.	J. d. C., IV, 131—156.	I, 478—507.
Recherches sur les fonctions elliptiques	I, 141—252.	J. d. C., II, 101—181. J. d. C, III, 160—190.	I, 263—388.
Solution d'un problème... concernant la transf....	I, 253—274.	A. N., VI, 365—388.	I, 403—428.
Addition au mémoire précédent	I, 275—287.	A. N., VII, 33—44.	I, 429—443.
Remarques sur quelques propriétés générales . . .	I, 288—298.	J. d. C., III, 313—323.	I, 444—456.
Note sur quelques formules elliptiques	I, 299—308.	J. d. C., IV, 85—93.	I, 467—477.
Sur le nombre des transformations différentes . . .	I, 309—316.	J. d. C., III, 394—401.	I, 457—465.
Théorème général sur la transformation	I, 317.	J. d. C., III, 402.	I, 466.
Théorèmes sur les fonctions elliptiques	I, 318—323.	J. d. C., IV, 194—199.	I, 508—514.
Démonstration d'une propriété générale	I, 324—325.	J. d. C., IV, 200—201.	I, 515—517.
Précis d'une théorie des fonctions elliptiques. . .	I, 326—408.	J. d. C., IV, 236—277. 309—348.	I, 518—609.
Mémoire sur une propriété générale.		S. E., VII, 176—264.	I, 145—211.
Recherche de la quant. qui satisfait... à deux équ.		A. d. G., XVII, 204—213.	I, 212—218.
Théorèmes et Problèmes		J. d. C., II, 286; III, 212.	I, 618—619.

TABLE POUR FACILITER LA RECHERCHE DES CITATIONS.

(La colonne *A* contient les chiffres du tome et des pages qu'occupe chaque mémoire dans l'édition de *Holmboe*. La colonne *C* contient les chiffres correspondans de la présente édition).

	A.	C.
Sur les maximums et minimums des intégrales aux différences . .	II, 1—8.	
Sur les conditions nécessaires pour que l'intégrale finie	II, 9—13.	
De la fonction transcendante $\Sigma \frac{1}{x}$	II, 14—29.	
Les fonctions transcendantes $\Sigma \frac{1}{a^2}$, $\Sigma \frac{1}{a^3}$	II, 30—34.	II, 1—6.
Sur l'intégrale définie $\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{c-1}\left(l\frac{1}{x}\right)^{a-1}dx$	II, 35—40.	II, 7—13.
Sommation de la série $y=\varphi(0)+\varphi(1)x+\cdots+\varphi(n)x^n$	II, 41—44.	II, 14—18.
L'intégrale finie $\Sigma^n\varphi x$ exprimée par une intégrale définie simple	II, 45—50.	I, 34—39.
Propriétés remarquables de la fonction $y=\varphi x$	II, 51—53.	II, 40—42.
Sur une propriété remarquable d'une classe très étendue de fonct.	II, 54—57.	II, 43—46.
Extension de la théorie précédente	II, 58—65.	II, 47—54.
Sur la comparaison des fonctions transcendantes	II, 66—76.	II, 55—66.
Sur les fonctions génératrices et leurs déterminantes	II, 77—88.	II, 67—81.
Sur quelques intégrales définies	II, 89—92.	II, 82—86.
Théorie des transcendantes elliptiques	II, 93—184.	II, 87—188.
Sur la résolution algébrique des équations	II, 185—209.	II, 217—243.
Démonstration de quelques formules elliptiques	II, 210—212.	II, 194—196.
Méthode générale pour trouver des fonctions	II, 213—221.	I, 1—10.
Solution de quelques problèmes à l'aide d'intégrales définies . . .	II, 222—228.	I, 18—25.
Sur l'équation différentielle $dy+(p+qy+ry^2)dx=0$	II, 229—235.	II, 19—25.
Sur l'équation différentielle $(y+s)dy+(p+qy+ry^2)dx=0$ . . .	II, 236—245.	II, 26—35.
Détermination d'une fonction	II, 246—248.	II, 36—39.
Note sur la fonction $\psi x = x+\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^3}{3^2}+\cdots$	II, 249—252.	II, 189—193.

ERRATA.

Page 120, ligne 3, en descendant, *au lieu de* 32, *lisez* 31.

Page 167, ligne 6, en descendant, *au lieu de* $\frac{A\sqrt{b^2+c^2}}{l+k}$, *lisez* $\frac{A\sqrt{b^2+c}}{l+k}$.

Page 176, ligne 11, en remontant, *au lieu de* $+\frac{2a\sqrt{n}-(2n+n_1)}{n_1-a\sqrt{n}}F$,

lisez $-\frac{2a\sqrt{n}-(2n+n_1)}{n_1-a\sqrt{n}}F$.

Page 176, ligne 5, en remontant, *au lieu de* $\frac{\pm\sqrt{n}}{n_1\mp a\sqrt{n}}$, *lisez* $\frac{\mp\sqrt{n}}{n_1\pm a\sqrt{n}}$.

Page 176, ligne 4, en remontant, *au lieu de* $\frac{\pm 2a\sqrt{n}-2n-n_1}{n_1\pm a\sqrt{n}}$,

lisez $\frac{\mp 2a\sqrt{n}+2n+n_1}{n_1\mp a\sqrt{n}}$.

Page 176, ligne 1, en remontant, *au lieu de* $-\alpha \text{ arc tang } \frac{ax+bx^3}{\sqrt{R}}$,

lisez $+\alpha \text{ arc tang } \frac{ax+bx^3}{\sqrt{R}}$.

Page 178, ligne 14, en remontant, *au lieu de* $\frac{\sqrt{n_{m-1}}}{n_m-a_{m-1}\sqrt{n_{m-1}}}$, *lisez* $\frac{-\sqrt{n_{m-1}}}{n_m-a_{m-1}\sqrt{n_{m-1}}}$.

Page 180, ligne 2, en descendant, *au lieu de* $-\frac{1}{a+\sqrt{k}}$, *lisez* $\frac{1}{a+\sqrt{k}}$.

Page 180, ligne 4, en descendant, *au lieu de* $\frac{1}{3(a+\sqrt{k})} \text{ arc tang } \frac{ax-k^{\frac{1}{3}}x^3}{\sqrt{R}}$,

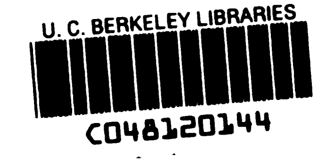
lisez $+\frac{1}{3(a+\sqrt{k})} \text{ arc tang } \frac{ax-k^{\frac{1}{3}}x^3}{\sqrt{R}}$.

Page 234, ligne 12, en descendant, *au lieu de* $\mu p' s'^{\frac{1}{\mu}}$, *lisez* $\mu p_1' s'^{\frac{1}{\mu}}$.

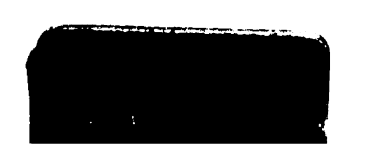
Page 291, ligne 7, en descendant, *au lieu de* n'est, *lisez* ne paraît.

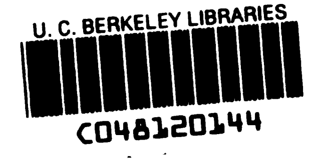






-MHacc.




U. C. BERKELEY LIBRARIES
C048120144

